

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

6-002

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решите неравенство №5. $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$.

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

ОДЗ

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$$

$$\sqrt{x+3}-x > 0$$

$$\sqrt{x+3}-x \neq 1$$

$$\sqrt{x+3}-x \neq 1$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$$

$$(x+5) > 0$$

$$\sqrt{x+3} \neq 1+x$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$x+3 \neq 1+2x+x^2$$

$$x+3 \geq 0$$

$$x^2+x-2 \neq 0$$

$$x \geq -3$$

$$x \neq 1 \quad x \neq -2$$

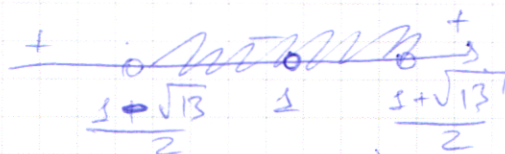
$$x+3 > x^2$$

$$x^2-x-3 < 0$$

$$\Delta = 1+12$$

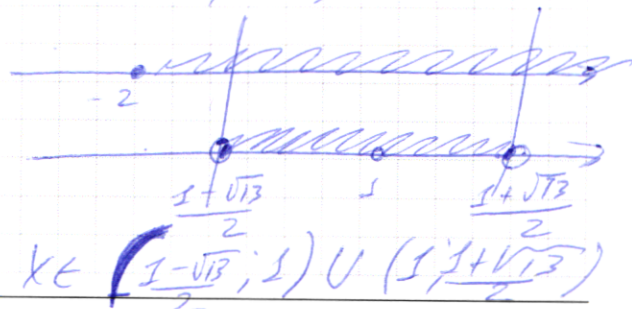
$$\Delta = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 1 \right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

$$x \in [-2; +\infty)$$



$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 1 \right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ 4x^2+20x+25 \geq x+3 \end{cases}$$

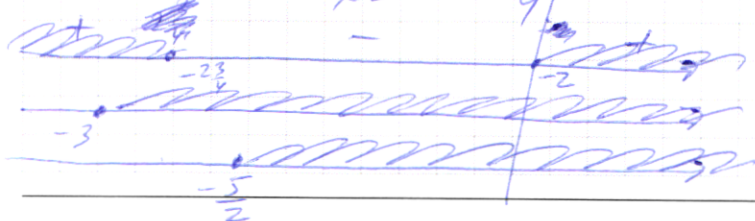
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ 4x^2+18x+22 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ \Delta = 361 - 352 \end{cases}$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-18 \pm 3}{8} = -2$$

$$x = -2 \frac{3}{4}$$



Ответ: $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

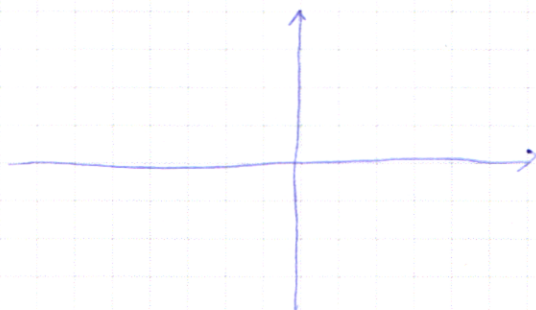
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) y = x^2$$

$$x_1 = 13$$

$$x_2 = 8$$

$$x_3 = \sqrt{9}$$



$$g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (\sin$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \quad 3,6 \\ 3,5 \quad 3,6 \\ \hline 175 \quad 216 \\ 105 \quad 108 \\ \hline 1225 \quad 2296 \end{array}$$

$$3) \log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

ОДЗ

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} \sqrt{x+3}-x$$

$$\sqrt{x+3}-x \neq 1$$

$$(x+5) > 0$$

$$\sqrt{x+3} \neq 1+x$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$x+3 \neq 1+2x+x^2$$

$$x \geq -3$$

$$x^2+x-2 \neq 0$$

$$x \neq 1; x \neq -2$$

$$x+3 > x^2$$

$$x^2-x-3 < 0$$

$$\Delta = 1+12$$

$$\Delta = 13$$

$$(x+5) \geq \sqrt{x+3}-x$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$$

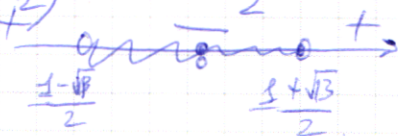
~~$$x+3 \geq 0$$~~

$$x+3 \leq 4x^2+20x+25$$

$$2x+5 \geq 0$$

$$x \geq -3$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 1 \right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$



$$\sqrt{13} \approx 3,6$$

$$x_1 \approx 2,3$$

$$x_2 \approx -1,3$$

$$4x^2+19x+22 \geq 0 \quad x = \frac{-19 \pm 3}{8}$$

$$\Delta = 361 - 16 \cdot 22 \quad x = -2,8$$

$$\Delta = 361 - 352$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-15 \pm 3}{4} = 2 \frac{3}{4}$$

$$14 \cos 8x - 4 \sin 8x - 28 \sin 14x + 2 \sin x \cos x$$

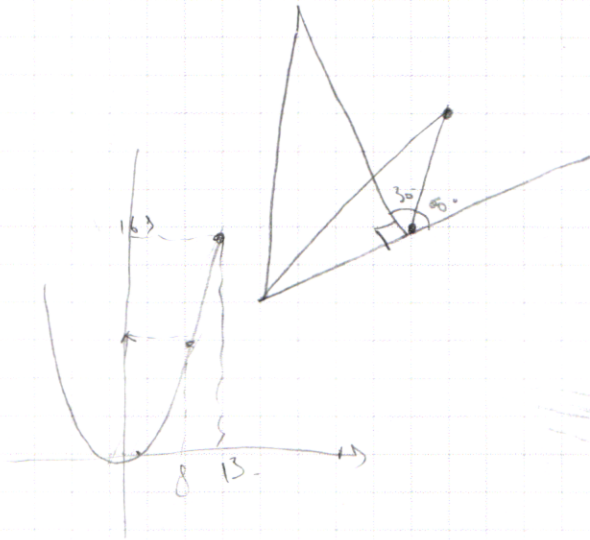
$$14 \cos 28x - 4 \sin 8x - 28 \sin 14x + \sin 2x = 0$$

$$14 (\cos 28x - 2 \sin 14x) + \sin 2x - 4 \sin 8x = 0$$

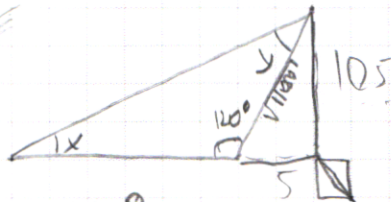
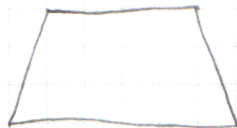
$$7 (\cos 28x) - 14 \sin 14x + \frac{\sin 2x}{2} - 2 \sin 8x = 0$$

$$- 2 \sin 8x \cos 5x$$

$$\frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 14x) - \sin$$



25

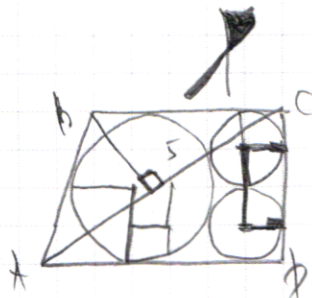


$$8 + 13 = \sqrt{21}$$

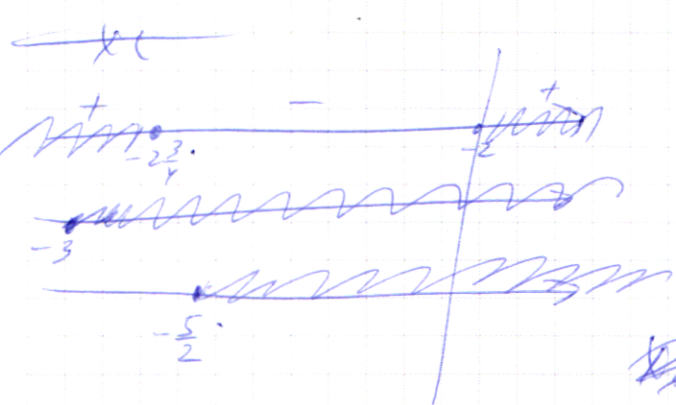
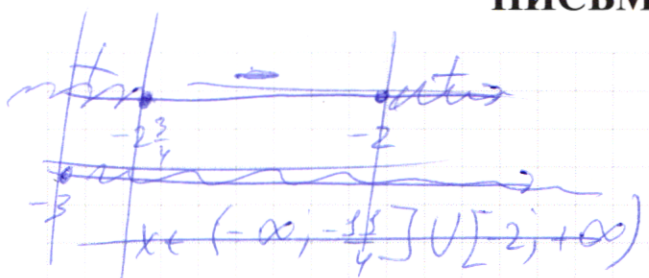
$$\begin{array}{r} 169 \\ 64 \\ \hline 233 \end{array}$$

$$169 - 64$$

$$169 + 64 = 233$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2x + 5 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{2}{4}$$

$$\frac{81}{4} - \frac{18 \cdot 9}{4} + 22 \geq 0$$

$$\frac{81}{4} - \frac{162}{4} + 22 \geq 0$$

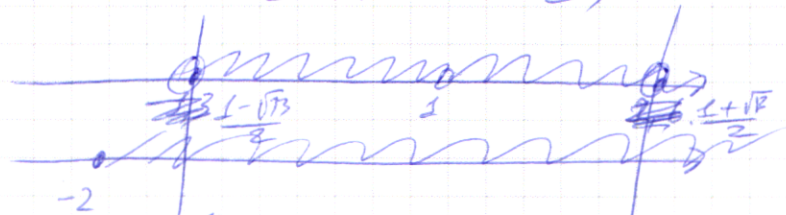
$$\frac{81 - 171}{4} + 22 \geq 0$$

$$22 - \frac{90}{4} \geq 0$$

$$22 - 22.5 < 0$$

$$x \in [-2; +\infty)$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$



$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

2) $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$$g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - 1 + \sin^2 x - 3$$

$$g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x + \sin^2 x - 4$$

$$g'(x) = 7 \cos 14x$$

$$\frac{1}{2} (\sin 14x + \cos 4x) - \sin^2 7x + \sin^2 x - 4$$

$$2 \sin^2 7x - 14 \cos 7x + 2 \cos x$$

$$\sin 9x \sin 5x = \frac{\sin 14x}{2} + \frac{\cos 4x}{2} - \sin^2 7x + \sin^2 x - 4$$

$$7 \sin 14x \cos 14x - 14 \cos 7x \sin 7x = 2 \cos 4x \sin 4x$$

черновик чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$-(CD - DA) + AB - BC = 10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD - DC + CB - BA = 10$

$g'(x) = 7\cos 4x + 2\sin 4x - 14\cos 7x + 2\cos x$

$7\cos 4x + 2\sin 4x - 14\cos 7x + 2\cos x = 0$

$\cos 7x = \cos x$

$7\cos 2x \rightarrow 7\cos^2 x - 7\sin^2 x$

$$\begin{array}{r} 4347/9 \\ 36 \overline{) 4347} \\ \underline{36} \\ 747 \\ \underline{72} \\ 270 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

264

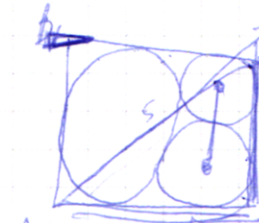
132

132

174

24

$7\cos^2 7x - 7\sin^2 7x + 2\sin 4x - 14\cos 7x + 2\cos x = 0$



$\sqrt{17388}$

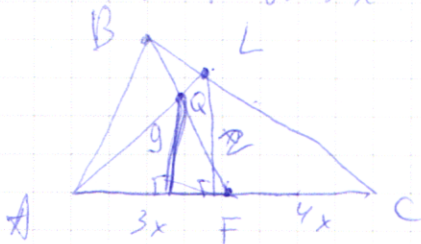
$2\sqrt{4347}$

$7t^2 - 7\sin^2 7x + 4\sin x \cos x - 14t + 2\cos x = 0$

$7t^2 - 7\sin^2 7x + 8\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 14t + 2\cos x = 0$

$7t^2 - 7\sin^2 7x + 8\sin x \cos^3 x - 8\sin^3 x \cos x - 14t + 2\cos x = 0$

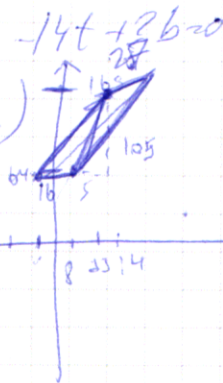
$7t^2 - 7\sin^2 7x + 8\sin x b^3 - 8\sin^3 x b - 14t + 2b = 0$



$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$

$\frac{S_{BQC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$

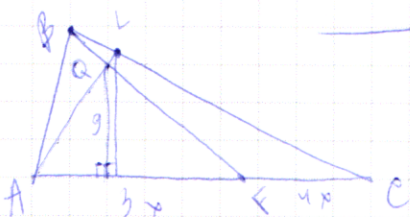
$7t^2 - 7a^2 - 8\sin x b (b^2 + \sin^2 x)$



$33025 + 25$

$\sqrt{11050}$

$10\sqrt{110,5}$



$FQ \cdot QB = QL \cdot AQ$

$\frac{1}{2} \cdot BQ \cdot QL / \frac{1}{2} ABAC = 111610 \sqrt{\frac{221}{2}}$

