МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-023

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 1) $\exists (x_1; y_1)$ - (.) перес-я параболы $y=2x^2$ с прямой $y=98$

$2x_1^2=98$

$x_1^2=49 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1=-7 & y_1=98 \\ x_1=7 & y_1=98 \end{array}\right.$ => длина отсекаемого параболой отрезка от прямой $\underset{7\cdot 2}{d} = \underline{14}$

2) $\exists (x_2; y_2)$ - (.) перес-я параболы $y=2x^2$ с прямой $y=18$

$2x_2^2=18$

$x_2^2=9 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x_2=3 & y_2=18 \\ x_2=-3 & y_2=18 \end{array}\right.$ => длина отсекаемого отрезка $\underset{3\cdot 2}{b} = \underline{6}$

3) $\exists (x_3; y_3)$ - (.) перес-я параболы $y=2x^2$ с прямой $y=a$

$2x_3^2=a$

$x_3^2=\frac{a}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x_3=\sqrt{\frac{a}{2}} & y_3=a \\ x_3=-\sqrt{\frac{a}{2}} & y_3=a \end{array}\right.$ => длина отсекаемого отрезка $c=2\sqrt{\frac{a}{2}}=\underline{\sqrt{2a}}$

I. $\exists\ c>d>b$ => в силу соотн-я между сторонами и углами Δ-ка, т.к. $\angle 120°$ - тупой - лежит напротив наиб. стороны - c

по th косинусов:

$$c^2=d^2+b^2-\underset{120}{2db}\overset{-\frac{1}{2}}{\cos 120°}=d^2+b^2+db$$

$2a=196+36+84=316$

$a=\boxed{158}$

II. $\exists\ d>c>b$ => аналогично напротив $\angle 120°$ лежит d
или $d>b>c$

=> по th. косинусов: $d^2=c^2+b^2-2cb\cdot\overset{-\frac{1}{2}}{\cos 120°}=c^2+b^2+cb$

$196=2a+36+6\sqrt{2a}$ $\quad 27+9$

$169=(\sqrt{2a})^2+3\cdot 2\sqrt{2a}+(3)^2=(\sqrt{2a}+3)^2$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2a}+3=13 \Rightarrow \sqrt{2a}=10 \Rightarrow 2a=100 \Rightarrow a=\boxed{50} \\ \sqrt{2a}+3=-13 \Rightarrow \sqrt{2a}=-16 \text{ - не подх.}\varnothing \end{array}\right.$

Ответ: 158 или 50

② $\min(g(x))$ − ? $\max(g(x))$ − ?

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)$

$g(x) = \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 10x}{2} - \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + \left(\frac{1+\cos 10x}{2}\right) + 4 =$

$= \frac{\cos 4x}{2} - \cancel{\frac{\cos 10x}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{\cos 2x}{2} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{\cos 10x}{2}} + 4 = \frac{2\cos^2 2x - 1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + 4 =$

$= \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{7}{2}$

Обозначим $t = \cos 2x$, $t \in [-1; 1]$

Исследуем $f(t) = t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{2}$ на отрезке $[-1; 1]$

$f(t)$ − парабола => вершина и наим. знач. в (·) $t_0 = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4} \in [-1; 1]$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{16} = \frac{56-1}{16} = \frac{55}{16} = \boxed{3\frac{7}{16}}$

$f(-1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \cancel{2}\ 4$

$f(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \boxed{5}$

Ответ: 5 ; $3\frac{7}{16}$

③ $\underbrace{\ldots\ldots\ldots}^{17}$ 1..7 2..8 3..9 4..10 5..11 6..12 7..13 8..14 9..15 10..16 11..17

11 способов выбрать позиции для подряд идущих 7 цифр „8" из 17

I. Если это первые 7 цифр: −1 вариант

осталось 10 позиций − на каждой может стоять „0" или „7" (т.к. „8" ровно 7)

кол-во вариантов − $2^{10} - \underbrace{2}$ когда все оставшиеся „0" или „7" (каждая цифра встреч-ся хотя бы 1 раз)

$\boxed{1022}$

II. Если это не первые 7 цифр − 10 вариантов

осталось 10 − на первом месте обязательно „7" − иначе не подх (с „0" не начинается)

кол-во вариантов − $2^9 - \underbrace{1}$ когда все оставшиеся „7"

$\boxed{511}$

5110

Итого: $1022 + 511 \cdot 10 = 6132$

Ответ: 6132

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0$
(a) (б)

(a) ∢ $\sqrt{x+7}-x-1>0$ ($>$ - т.к. $\sqrt{x+7}-x \neq 1$ по ООН)

$\sqrt{x+7} > x+1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1\leq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \quad x\in[-7;-1] \\ \begin{cases} x+7 > x^2+1+2x \quad x^2+x-6<0 \\ x+1\geq 0 \quad x\geq -1 \quad (x+3)(x-2)<0 \end{cases} \quad x\in[-1;2) \\ \qquad x\in(-3;2) \end{array}\right.$

⇕

$x\in[-7;2) \Leftrightarrow \sqrt{x+7}-x-1>0$

(б) ∢ $2x+4-\sqrt{x+7} \geq 0$

$\sqrt{x+7} \leq 2x+4$

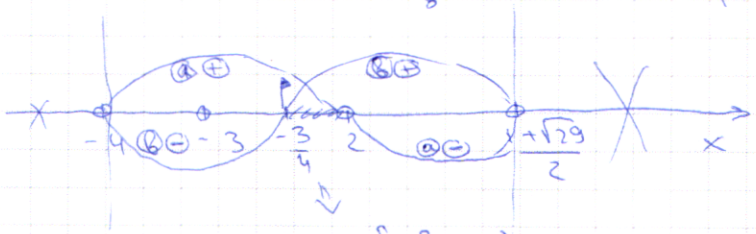
$\begin{cases} 2x+4\geq 0 \quad x\geq -2 \\ x+7\geq 0 \quad x\geq -7 \\ 4x^2+16+16x \geq x+7 \quad 4x^2+15x+9\geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{225-4\cdot 36}=9$
$\quad 144$

$x_1 = \frac{-15+9}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

$x_2 = -\frac{24}{8} = -3$

$\Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[-\frac{3}{4};+\infty) \\ x\geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-\frac{3}{4};+\infty)$



⇕

$x\in[-\frac{3}{4};2)$

Ответ: $[-\frac{3}{4};2)$

Область определения нер-ва:

$\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ x+7\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x\geq -7 \\ \sqrt{x+7}\neq x+1 \quad (1) \\ \sqrt{x+7}>x \quad (2) \end{cases}$

(1) ∢ $\sqrt{x+7}=x+1$

$\begin{cases} x\geq -1 \\ x+7=x^2+1+2x \quad x^2+x-6=0 \quad (x+3)(x-2)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\neq -3 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right.$

(2) ∢ $\sqrt{x+7}>x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq 0 \\ x+7\geq 0 \end{cases} \quad x\in[-7;0] \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x+7>x^2 \end{cases} \quad x\in[0;\frac{1+\sqrt{29}}{2}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-7;\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$x^2-x-7<0$

$\sqrt{D}=\sqrt{1-4\cdot -7}=\sqrt{29}$

Перепишем ООН:

$\begin{cases} x>-4 \\ x\geq -7 \\ x\in[-7;\frac{1+\sqrt{29}}{2}) \\ x\neq -3 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x\in(-4;-3)\cup(-3;2)\cup(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2})}$

⑥ Дано:

$\triangle ABC$:

$(\cdot)F \in AC$: $\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$

$(\cdot)L \in BC$

$BF \cap AL = (\cdot)Q$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

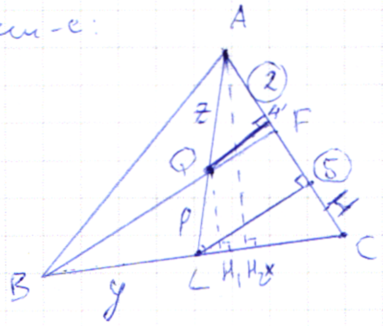
$(\cdot)H' \in AC$: $QH' \perp AC$

$QH' = 6$

$(\cdot)H \in AC$: $LH \perp AC$

LH - ?

Реш-е:



1) Обозначим $LC = x$

$BL = y$

$AQ = z$

$QL = p$

2) По th. Менелая:

$$\frac{FC}{AF} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{p} \cdot \frac{y}{(x+y)} = 1$$

$$\frac{z}{p} \cdot \frac{y}{(x+y)} = \frac{2}{5} \Rightarrow \underline{\frac{p}{z}\left(\frac{x}{y}+1\right) = \frac{5}{2}}$$

3) $\exists \begin{cases} QH_1 \text{ – высоты к } BC \\ AH_2 \end{cases}$

в силу под-я $\triangle LQH_1 \sim \triangle LAH_2$ по 2-м углам ($\angle ALH_2$ - общий, $\angle QH_1L = \angle AH_2L = 90°$)

$\Downarrow$

$$\frac{QH_1}{AH_2} = \frac{p}{p+z} = \frac{QL}{AL}$$

4)
$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BL \cdot QH_1}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH_2} = \frac{BL}{BC} \cdot \frac{QH_1}{AH_2} = \frac{y}{(x+y)} \cdot \frac{p}{(p+z)} = \frac{5}{12}$$

$$\left(\frac{x+y}{y}\right)\left(\frac{p+z}{p}\right) = \frac{12}{5}$$

$$\underline{\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(1+\frac{z}{p}\right) = \frac{12}{5}}$$

5) Обозначим $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{z}{p}$

$$\begin{cases} (1+a)(1+b) = \frac{12}{5} \Rightarrow (1+a)\left(\frac{2}{5}a + \frac{7}{5}\right) = \frac{12}{5} \Rightarrow (1+a)(2a+7) = 12 \\ \frac{1}{b} \cdot (a+1) = \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{2}{5}(a+1) \end{cases}$$

$2a + 7 + 2a^2 + 7a = 12$

$2a^2 + 9a - 5 = 0$

$\sqrt{81 - 4 \cdot -10} = \sqrt{121} = 11$

$a_1 = \frac{-9+11}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$a_2 = \frac{-9-11}{4} = -5 < 0$ - не подх.

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{z}{p} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AQ}{QL} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AQ}{AL} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

6) $\triangle AQH' \sim \triangle ALH$ по 2-м углам ($\angle LAH$ - общий; $\angle AH'Q = \angle AHL = 90°$)

$$\frac{QH'}{LH} = \frac{AQ}{AL} = \frac{3}{8} = \frac{\overset{6}{QH'}}{LH} \Rightarrow LH = \frac{8}{3} \cdot 6 = 16$$

Ответ: 16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) 1) Заметим, что для чисел из одного промежутка разность между ними не делится на 45 т.к. разница между ними <45

2) При этом для всех чисел из всех промежутков их остатки от деления на 45 не должны совпасть, иначе разность будет делится на 45 => наиболее выгодно (с минимальной суммой) брать первые из 45 чисел в каждом промежутке, остатки от деления на 45 которых еще не встречались, например, следующим образом:

1 … 6 в 1 диапазоне $\quad \Sigma = \frac{n(n+1)}{2} = 21$

(46 + 6·1)
52 … 57 в 2 –"– $\quad \Sigma = \frac{57(58)}{2} - \frac{51(52)}{2} = \underline{327}$ (вычисления в черновике)

(91 + 6·2)
103 … 108 в 3 –"– $\quad \Sigma = 600 + 3+4+5+6+7+8 = 600 + \frac{8\cdot 9}{2} - 3 = \underline{633}$

(136 + 6·3)
154 … 159 в 4 –"– $\quad \Sigma = 150\cdot 6 + 4+5+6+7+8+9 = 900 + \frac{9\cdot 10}{2} - 6 = \underline{939}$

(181 + 6·4)
205 … 210 в 5 –"– $\quad \Sigma = 200\cdot 6 + 5+6+7+8+9+10 = 1200 + 45 = \underline{1245}$

Итого, сумма равна $\underbrace{21 + 327 + 633}_{960} + 939 + 1245 = 3165$

Ответ: 3165

④ Дано:

ABCD - 4-х-к

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - окр.

R_1, R_2, R_3 - их радиусы

$R_1 = R_2 = R_3 = R$

ω_1 кас-ся AD и DC

ω_2 кас-ся DC и CB

ω_3 кас-ся CB, BA и AD

$AD + BC - AB - CD = 12$

а) R - ?

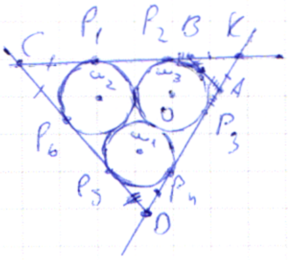
б) (·)O - центр ω_3

$\angle AOB$ - ?

в) $AO \cdot BO = 58$

AB - ?

Решение:

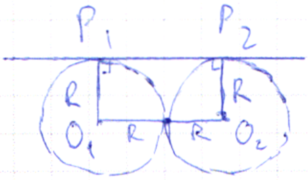


а) 1) Пользуясь тем, что касательные проведенные к окружности из одной точки, равны, обозначим на рисунке равные отрезки

⇓

$AD + BC - (AB + CD) = 12 = P_1P_2 + P_3P_4 - P_5P_6$,

где $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ - точки касания окружностей со сторонами 4-х-ка



т.к. $\begin{cases} P_1O_1 = P_2O_2 = R \\ P_1O_1 \perp P_1P_2 \text{ (как касат.)} \\ P_2O_2 \perp P_1P_2 \end{cases}$

⇐

$O_1P_1P_2O_2$ - прямоугольник

⇐

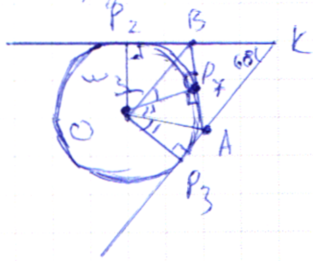
$P_1P_2 = O_1O_2 = 2R$, аналогично $P_3P_4 = 2R$, $P_5P_6 = 2R$

⇐

$12 = 2R \Rightarrow R = \boxed{6}$

б) $\exists$ (·) $K = CD \cap AD$

Заметим, что т.к. ΔCDK „построен" на равных взаимно касающихся окружностях, он правильный $\Rightarrow \angle CKD = 60° \Rightarrow$



из суммы $\angle$ 4-х-ка OP_2KP_3 находим $\angle P_2OP_3$.

$\angle P_2OP_3 = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$

$\exists\ P_7$ - точка кас-я AB и ω_3

$\Delta P_2OB = \Delta P_7OB$ по катету и гипотенузе

⇐

$\angle P_2OB = \angle BOP_7$

аналогично $\begin{cases} \Delta OP_7A = \Delta OAP_3 \text{ по катету и гипотенузе} \\ \Leftarrow \angle P_7OA = \angle AOP_3 \end{cases}$

$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle P_2OP_3 = \frac{120°}{2} = \boxed{60°}$

Ответ: а) 6 б) 60°

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-023

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 1) $2x^2 = 98$

$x^2 = 49 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-7 & y=98 \\ x=7 & y=98 \end{array}\right. \Rightarrow$ длина $d=14$

$14 \cdot 14 = 56 + 14 = 196$

2) $2x^2 = 18$

$x^2 = 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-3 & y=18 \\ x=3 & y=18 \end{array}\right. \Rightarrow$ длина $b=6$

3) $2x^2 = a$

$x^2 = \frac{a}{2}$ $\left[\begin{array}{ll} x=-\sqrt{\frac{a}{2}} & y=a \\ x=\sqrt{\frac{a}{2}} & y=a \end{array}\right. \Rightarrow$ длина $c = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$

I. $c > d > b \Rightarrow$ в силу ~~перв~~ соотн-я между сторонами и углами Δ-ка, т.к. $\angle 120°$ — тупой — лежит напротив $c \Rightarrow$ по th. cos:

$c^2 = d^2 + b^2 \mp 2ab \underbrace{\cos 120°}_{=-\frac{1}{2}} = a^2 + b^2 + ab$

$2a = 196 + \underbrace{36 + 84}_{120} = 316$

$a = \boxed{158}$

II. $d > c > b \Rightarrow$ аналогично по th. cos:

$d^2 = \underbrace{c^2 + b^2}_{27+9} - 2cb\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\cos 120°} = c^2 + b^2 + cb$

$196 = 2a + 36 + 6\sqrt{2a}$

$169 = (\sqrt{2a})^2 + 3 \cdot 2\sqrt{2a} + (3)^2$

$(\sqrt{2a}+3)^2 = 169 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2a}+3 = -13 \\ \sqrt{2a}+3 = 13 \end{array}\right.$

$\sqrt{2a} = -16 < 0$ — не подх

$\sqrt{2a} = 10$

$2a = 100$

$a = \boxed{50}$

III. $d > b > c$ — те же самые вычисления через th. cos.

$a = \underline{50}$

Ответ: 50 или 158

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(2) $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \underset{\frac{1+\cos 10x}{2}}{\cos^2 5x} + 4$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)$

$g(x) = \frac{\cos 4x}{2} - \cancel{\frac{\cos 10x}{2}} - \underset{\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{\cos 10x}{2}} + 4 =$

$= \frac{2\cos^2 2x - 1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{\cos 2x}{2} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{4} = \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{7}{2}$

Сделаем замену $\exists\ t = \cos 2x$, $t \in [-1; 1]$

$\cancel{f}\ f(t) = t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{2} = 0$

$t_0 = \frac{-\frac{1}{2}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{4}$ $\quad f(t_0) = f_{min} = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{2} = -\frac{1}{16} + \frac{56}{16} = \underline{\frac{55}{16}}$

$f(-1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$

$f(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \underline{5}$

Ответ: $\left[\frac{55}{16}; 5\right]$ - неверно, пропал 2 значения

(3) 17   1..7 2..8 3..9 4..10 5..11 6..12 7..13 8..14 9..15 10..16 11..17

11 способов выбрать подряд идущие 7 цифр из 17

I. Если это 1-е 7 цифр: - 1 вариант

осталось 10 - на каждом может стоять „0" или „7" (т.к. „8" равно 7)

кол-во вариантов - $2^{10} - \underline{2}$

$\boxed{1022}$ когда все оставшиеся „0" или „7"

II. Если это не 1-е 7 цифр - 10 вариантов

осталось 10 - на первом месте обязательно „7" - иного не числ (с „0" не начин-ся)

осталось 9 - $2^9 - \underline{1}$ - когда все оставшиеся „7"

$\boxed{511}$

рез-т: $1022 + 511 \cdot 7 = 4599$

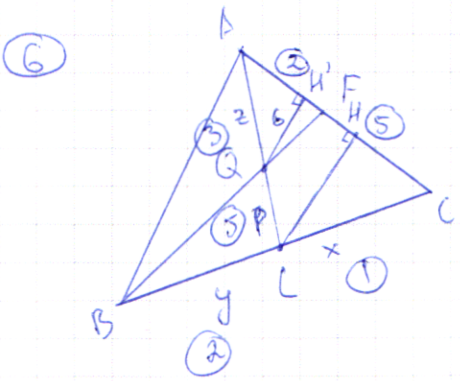
$511 \times 7 = 3577$

$3577 + 1022 = 4599$

Ответ: 4589

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



$LH - ?$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{y}{(y+x)} \cdot \frac{p}{(p+z)} = \frac{5}{12}$$

$$\left(\frac{y+x}{y}\right) \cdot \left(\frac{p+z}{p}\right) = \frac{12}{5}$$

$$\Big(1+\underbrace{\frac{x}{y}}_{a}\Big)\Big(1+\underbrace{\frac{z}{p}}_{b}\Big) = \frac{12}{5}$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{z}{p} \cdot \frac{y}{(x+y)} = 1$$

$$\frac{z}{p} \cdot \frac{y}{(x+y)} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{p}{z} \cdot \left(\frac{x}{y}+1\right) = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} (1+a)(1+b) = \frac{12}{5} \\ \frac{1}{b} \cdot (a+1) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$b = \frac{2}{5}(a+1)$$

$$(1+a)\Big(\frac{2}{5}a + \underbrace{\frac{2}{5}+1}_{\frac{7}{5}}\Big) = \frac{12}{5}$$

$$(1+a)\left(\frac{2a+7}{\cancel{5}}\right) = \frac{12}{\cancel{5}}$$

$$2a^2 + 7a + 2a + 7 = 12$$

$$2a^2 + 9a - 5 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{81 - 4 \cdot 10} = \sqrt{121} = 11 \qquad a_1 = \frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{-20}{4} = -5 < 0$$ — не подх

$$b = \frac{x}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{5} = \frac{z}{p}$$

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times\ 29 \\ \hline 513 \\ +\ 114 \\ \hline 1653 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 51 \\ \times\ 26 \\ \hline 306 \\ +\ 102 \\ \hline 1326 \end{array} = 327$$

$$LH = 6 \cdot \frac{8}{3} = \boxed{16}$$

7 - для чисел из одного промежутка разность между ними не $\vdots$ на 45 т.к. разница между ними < 45

46
47
48
49
50
51

При этом для всех чисел из всех промежутков их остатки от деления на 45 не должен совпасть, иначе разность будет делиться на 45 => наиболее выгодно брать первые (минимально) из 45 чисел в каждом промежутке, остатки от дел-я на 45 кот-х еще не встречались, например: 1...6 в 1

+6 52...57 во 2

+12

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

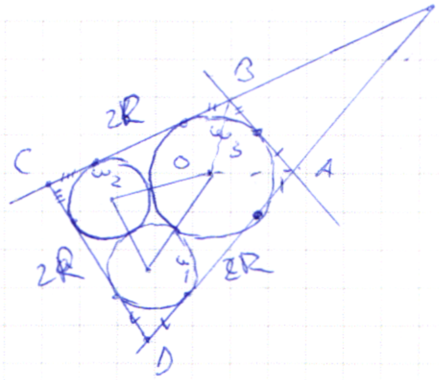
15-023

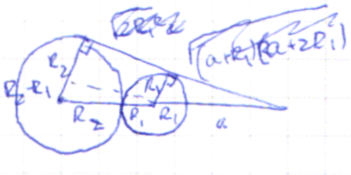
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4





$(a+R_1)^2 - R_1^2 = a^2 + 2aR_1$

$(a+2R_1+R_2)^2 = R_2^2$

$R_1, R_2, R_3 - ?$

$AD + BC - AB - CD = 12$

$b + c - a = 12$

$(R_2+R_1)^2 - (R_2-R_1)^2 = h^2$

$R_1 = R_2 = R_3$

$2\sqrt{R_2R_3} + 2\sqrt{R_1R_3} - 2\sqrt{R_2R_1} = \cancel{12}\ 6$

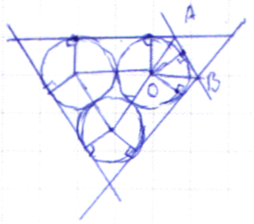
$2R_1R_2 + 2R_1R_2 = h^2$

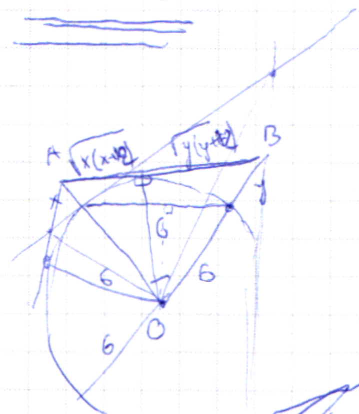
$h = 2\sqrt{R_1R_2}$

а)

$R = 6$

б)





$(y+6)^2 = 6^2 + y(y+6)$

$y^2 + 36 + 12y = 36 + y^2 + 6y$

$\sqrt{y^2 + 36 + 12y - 36} = \sqrt{y(y+12)}$

$\cancel{6\sqrt{xy(x+12)(y+12)}} = \frac{1}{2}\cdot(6+y)(6+x)\cdot\sin\alpha$

$x^2 + 12x + y^2 + 12y + 2\sqrt{xy(x+12)(y+12)} =$

$= x^2 + 12x + 36 + y^2 + 12y + \cancel{36} - 2(x+6)(y+6)\cos\alpha$

$6\cdot\frac{(\sqrt{x(x+12)} + \sqrt{y(y+12)})}{2}$

$= (36 + y^2 + 12y)(36 + x^2 + 12x)\sin\alpha$

$36(x^2 + 12x + y^2 + 12y + 2\sqrt{xy(x+12)(y+12)})$

$\sqrt{xy(x+12)(y+12)} = 36 - (x+6)(y+6)\cos\alpha$

$xy + 12x + 12y + 144$

$x^2y^2 + 12x^2y + 12xy^2 + 144xy =$

$(x+6)(y+6) = 58$

$xy + 36 + 6(x+y) = 58$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

5) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ООН:

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \\ x+4>0 \quad x>-4 \\ x+7\geq 0 \quad x>-7 \end{cases}$

$\sqrt{x+7} > x$ $\quad \left[\begin{cases} x\leq 0 \\ x\geq -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x+7\geq x^2 \end{cases}\right.$

$\sqrt{x+7} = x+1$

$x+7 \neq x^2+1+2x$

$x^2+x-6\neq 0$

$(x+3)(x-2)\neq 0$

$x\neq -3$

$x\neq 2$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x)\geq 0$

$2x-\sqrt{x+7}+4$

$\sqrt{x+7} \geq x+1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq -1 \\ x\geq -7 \end{cases} \quad x\in[-7;-1] \\ \begin{cases} x+1\geq 0 \quad x\geq -1 \\ x+7>x^2+1+2x \quad x\in[-1;2) \\ x^2+x-6<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$x\in[-7;2)$ - $\boxed{>0}$

$\sqrt{x+7} > x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq 0 \\ x+7\geq 0 \end{cases} \quad x\in[-7;0] \\ \begin{cases} x+7>x^2 \\ x>0 \end{cases} \end{array}\right.$

$x^2-x-7<0$

$\sqrt{D}=\sqrt{1-4\cdot -7}=\sqrt{29}$

$x_1=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$x_2=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x\in\left[-7;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

5

$2\sqrt{2}-1$

1,73

3,4

2,4

$2x+4\geq\sqrt{x+7}$

$\begin{cases} 2x+4\geq 0 \quad x\geq -2 \\ x\geq -7 \quad x\geq -7 \\ 4x^2+16+16x\geq x+7 \end{cases}$

$4x^2+15x+9\geq 0$

$\sqrt{225-4\cdot 36}=9$

81 144

$x_1=\frac{-15+9}{8}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$

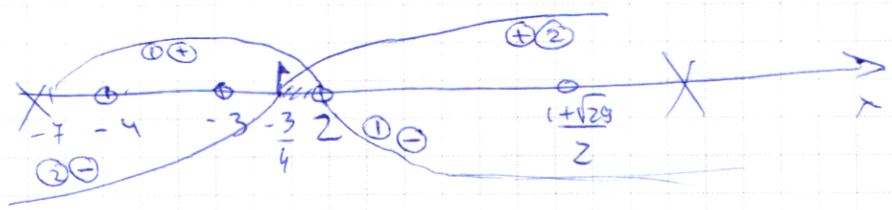
$x_2=\frac{-24}{8}=-3$

$x\in(-\infty;-3]\cup\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

$x\in\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$ - $\boxed{\geq 0}$

ООН:

$x\in(-4;-3)\cup(-3;2)\cup\left(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$



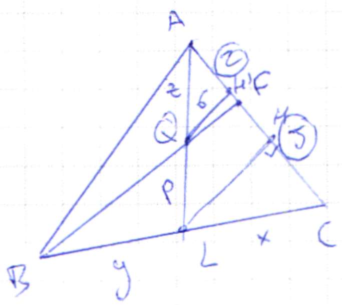
Ответ: $x\in\left[-\frac{3}{4};2\right)$

$\frac{1}{ab}=\frac{2}{5}$

$ab=\frac{5}{2}$

$\frac{1}{a}=\frac{z}{p}$ $\quad \frac{1}{b}=\frac{y}{x}$

6)



$\frac{AF}{FC}=\frac{2}{5}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}}=\frac{5}{12}$

$QH'=6$

$Lh-?$

$\frac{h}{H}=\frac{QL}{AL}$

$\frac{5}{2}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{BL}{BC}=1$

$\frac{QL\cdot BL}{AL\cdot BC}=\frac{5}{12}$

$\frac{AL}{QL}\cdot\frac{BC}{BL}=\frac{12}{5}$

$\left(1+\frac{z}{p}\right)\left(1+\frac{x}{y}\right)=\frac{12}{5}$

a b

$(1+a)(b+1)=\frac{12}{5}$

$1+a+b+ab=\frac{12}{5}$ $\quad \frac{7}{5}$

$a+b=\frac{7}{5}-\frac{5}{2}=\frac{14}{10}-\frac{25}{10}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)