МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 6-003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

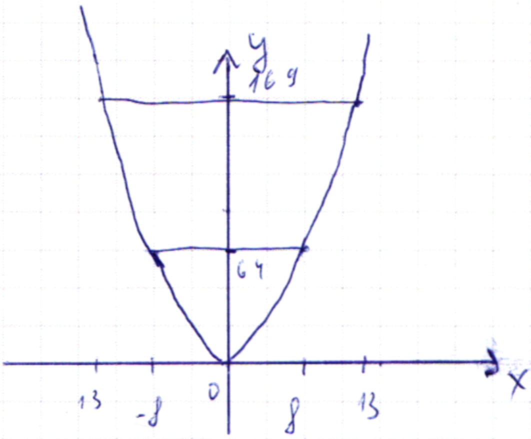
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



$y = x^2$, высекает отрезки $2\sqrt{169}$, $2\sqrt{8}$ и $2\sqrt{a}$ из функций, $y = 169$; $y = 64$, $y = a$

1) Запишем неравенства треугольника:

$$\begin{cases} 26 + 16 > 2\sqrt{a} \\ 16 + 2\sqrt{a} > 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} < 21 \\ \sqrt{a} > 5 \end{cases}$$

2) Так как наш треугольник тупоугольный, то угол в $120°$ будет лежать либо напротив отрезка длиной 26, либо напротив $2\sqrt{a}$.

I: $2\sqrt{a} < 26 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 13 \Rightarrow$ угол $120°$ лежит напротив 26. Запишем теорему cosine:

$$(16)^2 + (2\sqrt{a})^2 - 64\sqrt{a}\cdot\cos(120°) = (26)^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 64 + a + 8\sqrt{a} = 169 \Leftrightarrow a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$; сумма корней -8 а произведение -105, $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a} = -15 \text{ (н.у.)} \\ \sqrt{a} = 7 \end{array}\right. \Rightarrow a = 49$

II: $2\sqrt{a} > 26 \Leftrightarrow \sqrt{a} > 13 \Rightarrow (16)^2 + (26)^2 - 2\cdot16\cdot26\cdot\cos(120°) =$
$= (2\sqrt{a})^2 \Leftrightarrow a = 64 + 169 + 104 = 337$

Ответ: $a \in \{49; 337\}$

№3

1) "0"; „5"; „9". Т.к. „5" у нас ровно 6 и они идут подряд, их можно объеденить в один элемент „φ", „φ"=„555555", тогда 18-значное число становится 13-значным.

2) N – кол-во таких цифр.

„9" – может быть на 13 позициях, тогда „φ" – на 12, а „0" – на 11. Но вариант когда „0" на первой позиции не учитывается, в прот случае наше число 17-значное.

$N = 13\cdot 12\cdot 11 - 1 = 1715$ чисел

Ответ: 1715 чисел

№2

1) $g(x) = \sin 5x\cdot\sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = -\frac{1}{2}(\cos 14x - \cos 4x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = -\frac{1}{2} + \cancel{\sin^2 7x} - \cancel{\sin^2 7} + \cos^2 2x - \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3 = \cos^2 2x - \cos^2 x - 4$

2) $g'(x) = 2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 - 2\cos x(-\sin x) = -4\cos 2x\cdot\sin 2x + \sin 2x = -\sin 2x(4\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \cos 2x = \frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\\ 2\cos^2 x = -\frac{3}{4}\ (\text{Н.у.})\end{array}\right.$

I: $\sin x = 0 \Rightarrow g(x) = (1 - 2\sin^2 x)^2 - \cos^2 x - 4 = 1 - 1 - 4 = -4$

II: $\cos x = 0 \Rightarrow g(x) = (2\cos^2 x - 1)^2 - \cos^2 x - 4 = 1 - 4 = -3$

Ответ: наименьшее: -4

наибольшее: -3

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2
(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+5-\sqrt{x+3}+x)}{\sqrt{x+3}-x-1}\geq 0 \\ \sqrt{x+3}-x\neq 1 \\ x+3\geq 0 \\ x+5>0 \\ \sqrt{x+3}>x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+5-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-x-1}\geq 0 \\ \sqrt{x+3}\neq x+1 \\ x\geq -3 \\ x>-5 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x\geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ \cancel{x\in\ldots} \end{cases};\ x\in\left[0;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+5-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-x-1}\geq 0 \\ x\in\left[-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ \sqrt{x+3}\neq x+1 \end{cases}$$

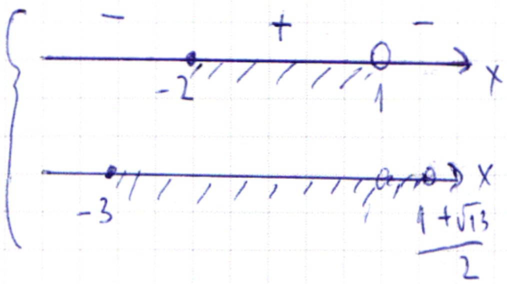
Используем обобщ. метод интервалов.

Нули: $2x+5=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow /x>-2,5/ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+20x+25=x+3 \Leftrightarrow 4x^2+19x+22=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-2,75\ (\text{н.у.}) \end{array}\right.$

$\sqrt{x+3}=x+1 \Leftrightarrow /x>-1/ \Leftrightarrow x^2+2x+1=x+3 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$

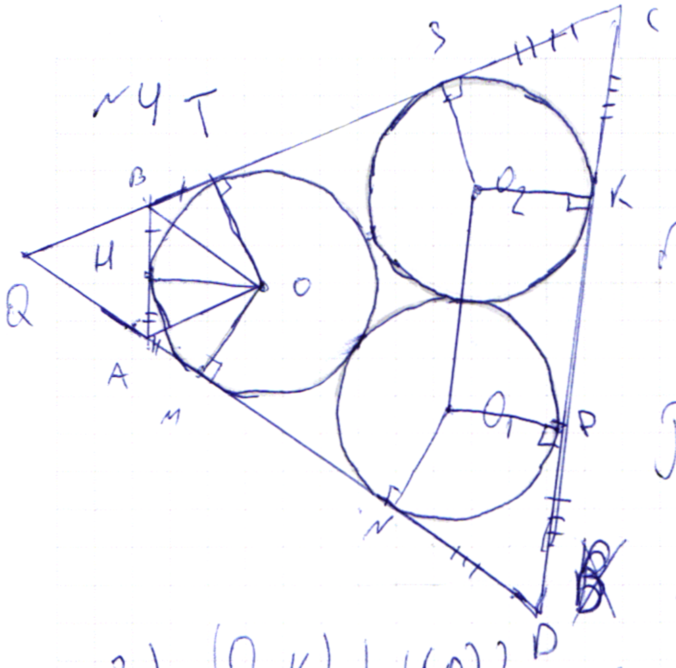
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\ (\text{н.у.}) \\ x=1 \end{array}\right.$



$x\in[-2;1)$

Ответ: $x\in[-2;1)$

№4



а) $AD + BC - AB - CD = 10$
Найти: R

б) Найти: $\angle AOB$

в) $AO \cdot BO = 42$; Найти $|AB|$

Решение: а) 1) Отметим точки касания и проведем радиусы.

2) $\left.\begin{array}{l}(O_2K) \perp (CD) \\ (O_1P) \perp (CD)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(O_2K) \parallel (O_1P) \\ |O_2K| = |O_1P| = R\end{array}\right\} \Rightarrow O_1O_2KP$ – прямоугольник $\Rightarrow |KP| = 2R$, аналогично для $|TS|$ и $|MN|$

3) $AD + BC - AB - CD = 10 \Leftrightarrow \cancel{AM} + MN + \cancel{ND} + \cancel{BT} + TS + \cancel{SC} = 10 + \cancel{AH} + \cancel{HB} + \cancel{CK} + \cancel{DP} + KP \Leftrightarrow 2R + 2R = 10 + 2R \Rightarrow R = 5$

б) 1) $(BC) \cap (AD) = Q$;

2) $\left.\begin{array}{l}\triangle OO_1O_2 \text{ – прав. треугольник} \\ QC \parallel OO_2 \\ QD \parallel OO_1 \\ DC \parallel O_1O_2\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle QDC \sim \triangle OO_1O_2$, $\triangle QDC$ – правильный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DQC = 60^\circ$

3) (BO) и (AO) – биссектрисы своих углов, по св-ву окр. $\Rightarrow \angle AOB = \frac{1}{2}\angle TOM$

4) Из $TOMQ$, $\angle TOM = 360^\circ - \angle Q - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$

в) Рассмотрим $\triangle AOB$: $\frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} OH \cdot AB \Leftrightarrow$ (*)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

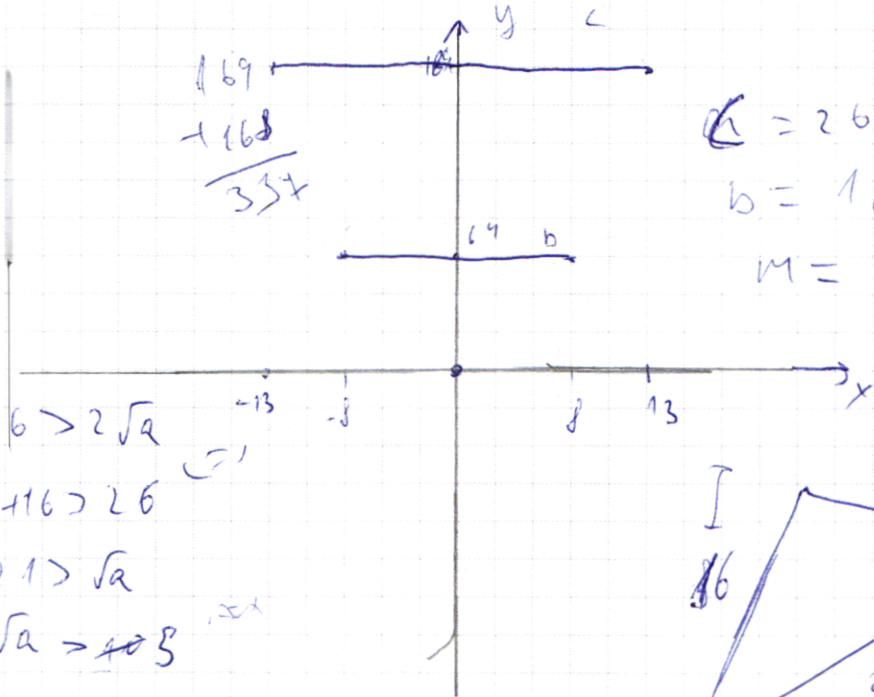
6-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



$a \geq 0$

$c = 26$

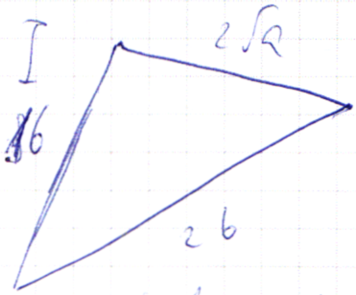
$b = 16$

$m = 2\sqrt{a}$

$$\begin{array}{r}169\\-64\\\hline 105\end{array}$$

$$\begin{array}{r}169\\+168\\\hline 337\end{array}$$

$\begin{cases} 26+16 > 2\sqrt{a} \\ 2\sqrt{a}+16 > 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21 > \sqrt{a} \\ \sqrt{a} > 5 \end{cases}$



I $\sqrt{a} < 13$, $256 + 4a - 64\sqrt{a}\cdot(-\frac{1}{2}) = 4\cdot 169 \Leftrightarrow$

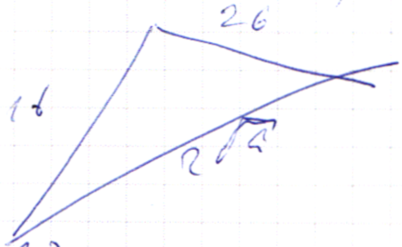
$\Leftrightarrow 64 + a + 8\sqrt{a} = 169 \Leftrightarrow a + 8\sqrt{a} = 105 \Leftrightarrow$

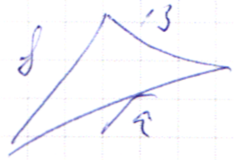
$\Leftrightarrow a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$ $\left[\begin{array}{l}\sqrt{a} = -15 \ (\text{!}) \\ \sqrt{a} = 7, \quad a = 49\end{array}\right.$

$D = -8$

$D = -105$

$105 \,|\, 15$, 7





II $\sqrt{a} > 13$

$$\begin{array}{r}16\\\times 13\\\hline 208\end{array}$$

$64 + 169 - 208\,(-\frac{1}{2}) = a \Leftrightarrow a = 337$

$64 + 169 + 104$

$$\begin{array}{r}169\\+104\\\hline 273\\+64\\\hline 337\end{array}$$

$$\begin{array}{r}233\\+104\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}143\\\times 12\\\hline 286\\+143\\\hline 1716\end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№8

$y(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= -\frac{1}{2}(\cos 14x - \cos 4x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2} - \sin^2 7x - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) - \sin^2 7x - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\cos^2 2x - \frac{1}{2} + \sin^2 7x - \frac{1}{2} - \cancel{\sin^2 7x} - \cos^2 x - 3 =$

$= \underline{\cos^2 2x - \cos^2 x - 4} = 0 \Rightarrow \cancel{\cos^2 2x}\ \cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - 4{,}5 = 0$

$2\cos^2 2x - \cos 2x - 9 = 0$ $\quad y'(x) = 2\cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot$

-5

-4

$\cdot 2 + 2\cos x \cdot \sin x = -2\sin 4x +$

$+ \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \\ \cos^2 x = \frac{3}{8} \end{array}\right.$

2

$(\frac{6}{8} - 1)^2 - \frac{3}{8} - 4 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 4 = \boxed{-4{,}25}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (Продолжение)

(※1) $\frac{LC}{LB} = \frac{4}{7}\frac{BQ}{QF}$ ~~$= \frac{4}{4} \cdot \frac{4}{7}$~~

$\frac{AQ}{QL} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{LC}{LB}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{7}\frac{BQ}{QF} = \frac{3}{4}\frac{BC}{BL}$

$\frac{AL}{AQ} = \frac{QL}{AQ-QL}$, $\frac{BQ}{QF} = \frac{7}{4}\frac{BL}{LC} = \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ (•)

$|BL| = \sqrt{\frac{1}{16}}|BC| \Rightarrow BL = \frac{BC}{4} \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$

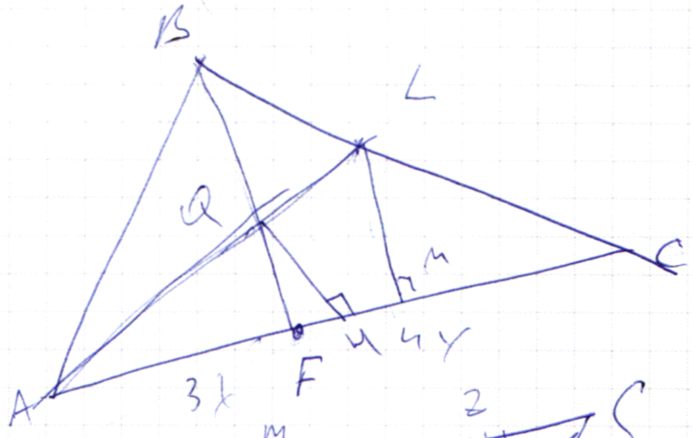
~~$|LR| = 9\cdot\frac{AL}{AQ} = 9\cdot\frac{7}{12} = \frac{21}{4} = 5{,}25$~~

$\frac{AQ}{QL} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1 \Rightarrow \frac{AQ}{AL} = \frac{1}{2} \Rightarrow |LR| = 2|QM| = 18$

Ответ: $|LR| = 18$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

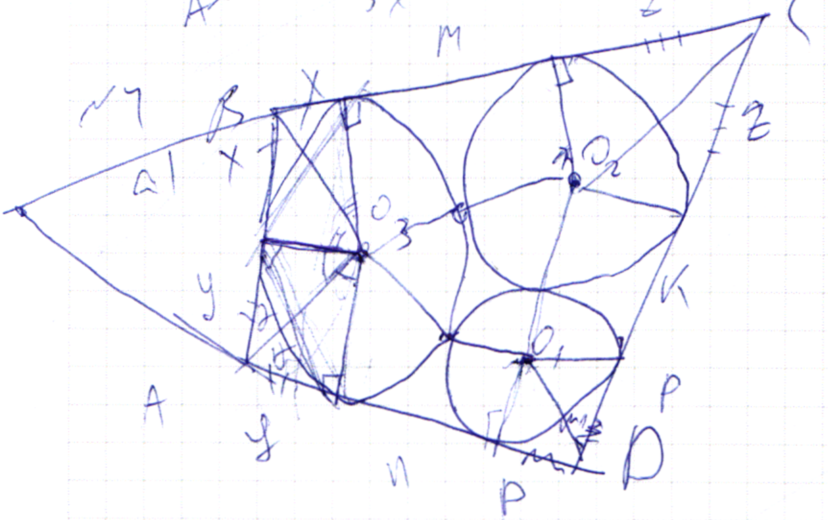
№6



$S_{BQL} : S_{BAC} = 1:16$

$|QH| = 9$

$|LM| = ?$



R − const

$AD + BC = AB + CD + 10$

$y + n + p + x + m + z = y + p + z + k + 10$

$n + m = k + 10$

$4R = 2R + 10$

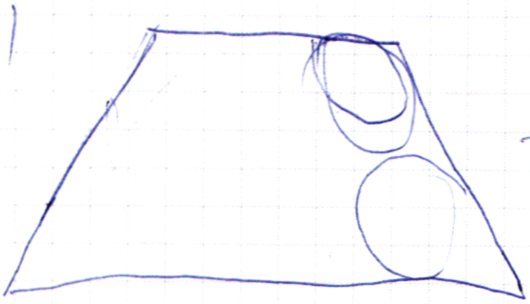
$\boxed{R = 5}$

$m = 2R$

$k = 2R$

$n = 2R$

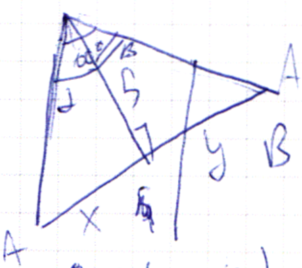
δ1



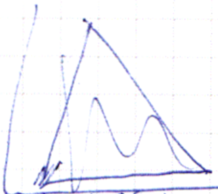
$\angle AOB = 60°$

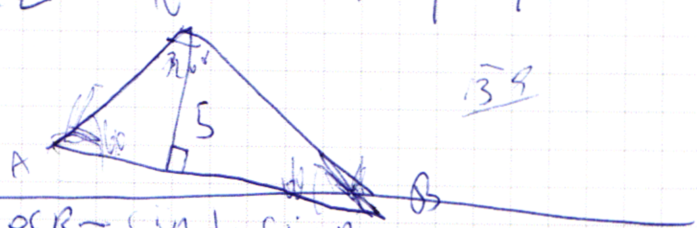
Продлим, прав. треуг.

$|AB| = |\overline{OB} - \overline{OA}|$



$AO + OB = 4R$





.39

$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$42\sqrt{3} = AB \cdot 5 \quad \frac{25}{42} - \frac{xy}{42} = \frac{1}{2} \Rightarrow 25 - xy = 21 \Rightarrow xy = 4$

$AB = \frac{42\sqrt{3}}{5}$

1; 2; 3; 4; 5;

36; 37;

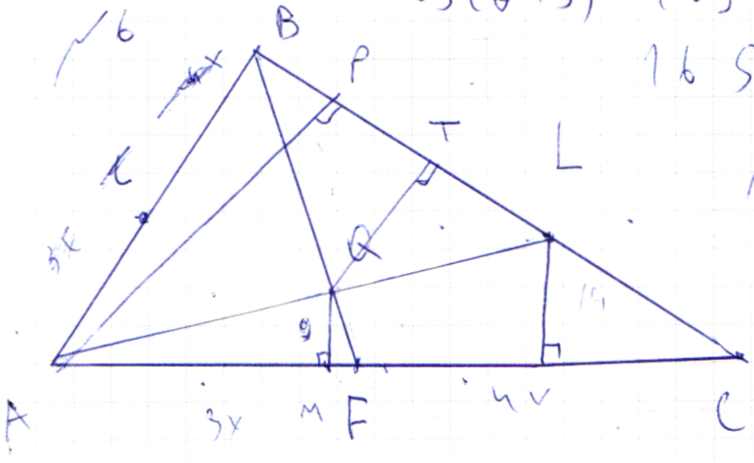
1 3 5 7 9

37 39 41 43 45

73 75 77 79

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta$



$16\, S_{BQL} = S_{ABC}$

$AP \cdot BC = QT \cdot BL \quad 16$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6 - 003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13, 0; 5; 9

9 : 12 5 : 13

9: 13

5: 12

0: 11

$\sqrt{x+3} > x$

$x \le 0$

$x+3 > x^2$ $x \ge 0$

$x^2 - x - 3 < 0$

$\sqrt{x+3} \ne x+1$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

3 - 6 - 1

№ 5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \ge 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3} - x - 1\right)\left(x+5+x-\sqrt{x+3}\right) \ge 0$

$\begin{cases} x+5>0 \\ x+3 \ge 0 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3}-x \ne 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -3 \\ x \in [-3; 0] \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ \cancel{x \in [-3;-1) \cup (} \end{cases}$

$x \in [-3; -1)$

$\left[\sqrt{x+3} = x+1;\ ;\ x > -1 \right.$ $\boxed{x=1}$

$x+3 = x^2+2x+1$

$x^2+x-2 = 0$ $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$

$\oplus = -1$

$\odot = -2$

$\sqrt{x+3} = 2x+5 \Leftrightarrow x+3 = 4x^2+25+20x$

$4x^2 + 19x + 22 = 0$ $x = -2$

$\oplus = -19$

$x > -2,5$ $\odot = 88$ $x = -\frac{11}{4} = -2,75$ (1)

— + —

-2 -1 1 x

-3 $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ 0 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$-2 \vee \frac{1-\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow -4 \vee 1-\sqrt{13} \mid -5 \vee -\sqrt{13}$

$x \in \left[-2, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

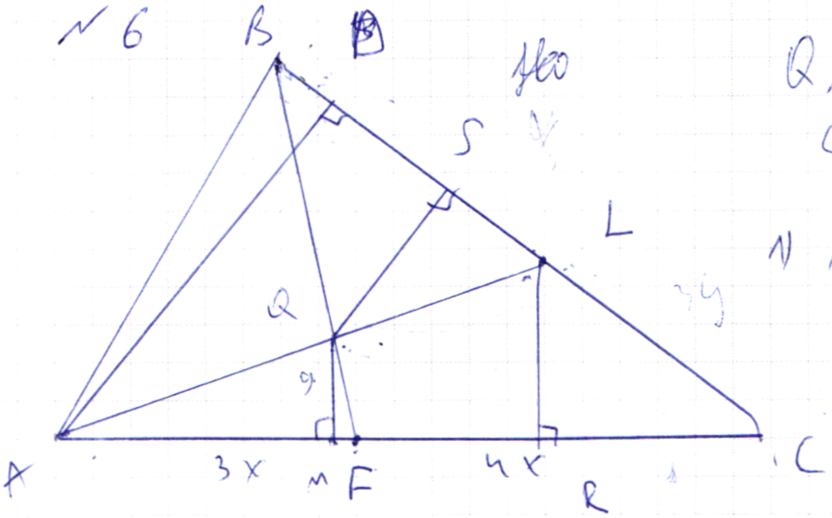
№4 (Продолжение)

(*) $\frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} OH \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{AO \cdot BO \sin 60^\circ}{R} =$

$= \frac{21\sqrt{3}}{5}$ ед.

Ответ: а) $R = 5$; б) $\angle AOB = 60^\circ$; в) $AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$

№6



$QM = 9$, $LR - ?$

$S_{ABC} = 16 S_{BQL}$

1) $\triangle AQM \sim \triangle ALR \Rightarrow$

$\Rightarrow |LR| = \frac{AR}{AF} \cdot 9$

2) $AD \cdot BC = 16\, QS \cdot BL$;

3) $\frac{BQ}{QF} = \frac{BC}{LC}\left(1 + \frac{CF}{AF}\right) \Rightarrow \frac{BQ}{QF} = \frac{7}{4} \cdot \frac{BL}{LC}$

$\frac{AQ}{QL} = \frac{AF}{FC}\left(1 + \frac{LC}{BL}\right) \Rightarrow \frac{AQ}{QL} = \frac{3}{4}\, \frac{BC}{BL} = \frac{12\, QS}{AD} \Rightarrow$

$\frac{AD}{QS} = \frac{AL}{QL}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{BQ}{QF} = \frac{7}{4}\, \frac{BL}{LC} \\ \frac{AQ}{QL} = \frac{12\, AL}{AQ} \end{cases}$ $\frac{BQ}{BL} = \frac{7}{4}\, \frac{QF}{LC} \Rightarrow \frac{LC}{LB} = \frac{4BQ}{7QF}$

$\frac{AL}{QL} - 1 = \frac{AL}{AQ} \Rightarrow 1 = AL\, \frac{(AQ - QL)}{QL \cdot AQ} \Rightarrow$

(*)

$\Rightarrow \frac{AL}{AQ} = \frac{QL}{AQ - QL}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №5 (Нумеровать только чистовики)