

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

11-024

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1 \rightarrow \frac{\log_2 (x+4)}{\log_2 (\sqrt{x+7}-x)} - 1 \geq 0$$

$$\frac{\log_2 (x+4) - \log_2 (\sqrt{x+7}-x)}{\log_2 (\sqrt{x+7}-x)} \geq 0 \rightarrow \left(\log_2 \left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} \right) \log_2 (\sqrt{x+7}-x) \right) \geq 0$$

$$\log_2 \frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} \geq 0 \rightarrow \log_2 \frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} \geq \log_2 2^0$$

$$\rightarrow \frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{x+4+x-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}-x} \geq 0$$

$$(2x+4 - \sqrt{x+7})(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7} \rightarrow 4x^2 + 16x + 16 - x - 7 \geq 0$$

$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$D = 225 - 144 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} \quad x_2 = \frac{-18}{8} = \frac{-9}{4}$$

$$\sqrt{x+7} - x \geq 0 \rightarrow \sqrt{x+7} \geq x \rightarrow x^2 - x - 7 \geq 0$$

$$D = 1 + 28 = 29 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$\log_2 (\sqrt{x+7}-x) \geq 0 \rightarrow \log_2 (\sqrt{x+7}-x) \geq \log_2 2^0$$

$$\sqrt{x+7} \geq x+1$$

$$\sqrt{x+7} \geq x+1 \rightarrow x+7 \geq x^2+2x+1 \rightarrow x^2+x-6 \geq 0$$

$$D \geq 1+24=25$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

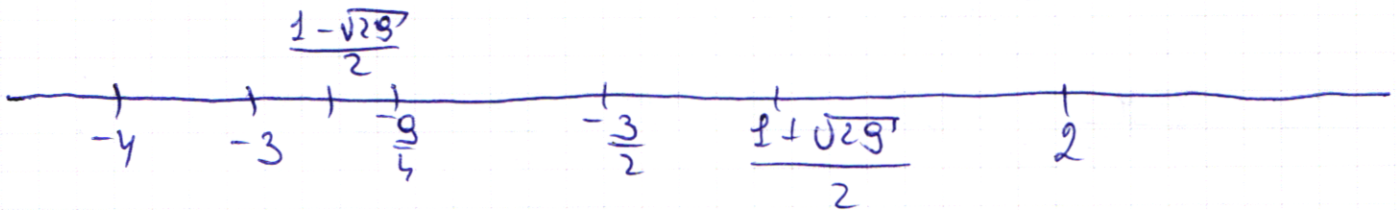
0, D, B

$$x+4 \geq 0 \quad x \geq -4$$

$$\sqrt{x+7} - x \geq 1 \rightarrow \sqrt{x+7} > x+1 \quad x^2+2x+1 - x - 7 > 0$$

$$x^2+x-6 > 0 \quad D \geq 25$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad x_2 = -3$$

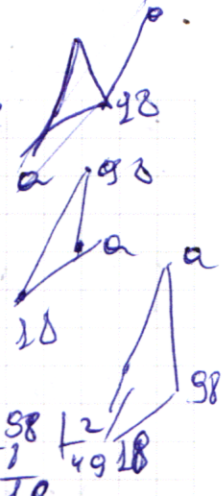


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x+4 \geq \sqrt{x+7} + x$
 $x - x + 4 \geq \sqrt{x+7}$

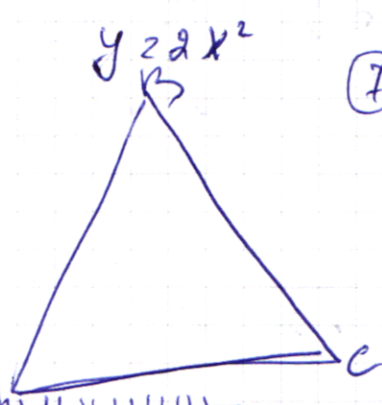
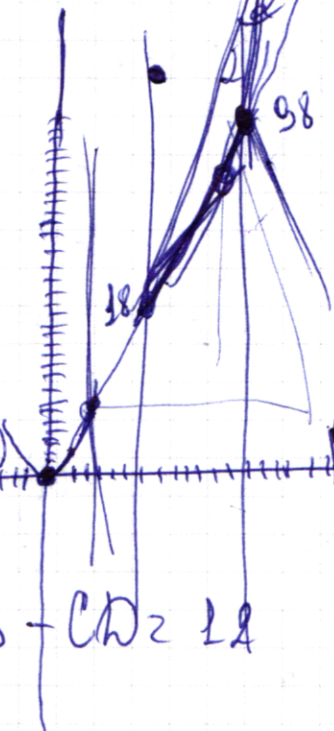
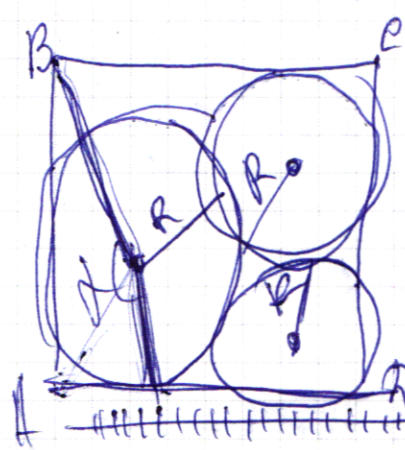
$4 \geq \sqrt{x+7}$
 $16 \geq x$

$16 \geq x+7$
 $x+4 > 0$
 $x > -4$
 $2x^2 = 98$
 $x^2 = 49$
 $x = 7$
 $2x^2 = 28$
 $x = 2.3$



$\sqrt{x+7} - x > 0$
 $\sqrt{x+7} > x$
 $x^2 - x - 7 < 0$

$D = 1 + 28$
 $x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$



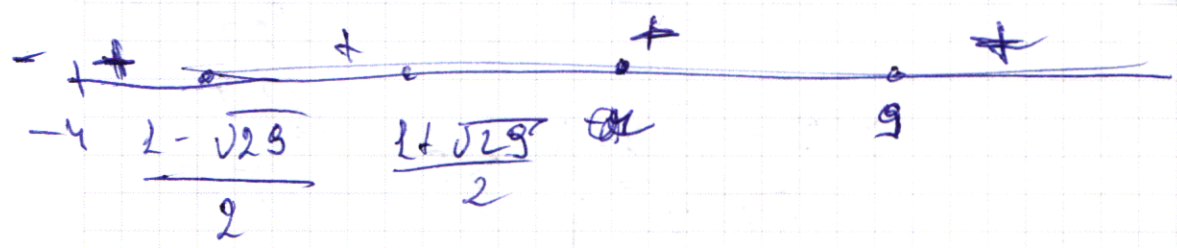
$AD \cdot BC = 58$

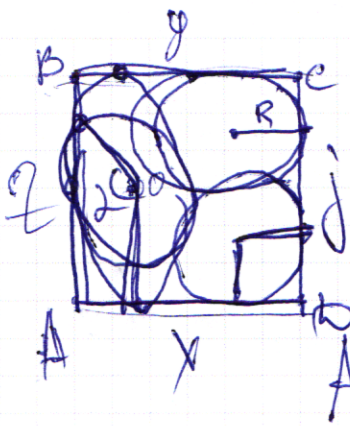
$AD + BC - AB - CD = 22$

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$
 $x <$

$x \geq -4$ $9 \geq x$

$\log_{\sqrt{x}} (4) \geq 1$





$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$$

$$AB + BC - AD - CD = 12$$

$$x + y - e - j = 12$$

$$AO \cdot BO = 58$$

"0" "7" "8"

17-829

$$g(x) = (\sin 3x \sin 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4)^{1/2}$$

$$= (\sin 3x \sin 4x)' - (\sin^2 x)' + (\cos^2 5x)' + (4)'$$

- [1; 45], [46, 90], [91; 135], [136; 180], [181; 225]

8 8 8 8 8 8 0 0 7 7 7 7 7 7 7

$$\log \sqrt{x+7} - x \quad (x+4) \geq 1$$

$$\frac{\log_2 (x+4)}{\log_2 \sqrt{x+7} - x} - 1 \geq 0$$

$$\frac{\log_2 (x+4) - \log_2 \sqrt{x+7} - x}{\log_2 (\sqrt{x+7} - x)} \geq 0$$

$$\left(\log_2 \frac{x+4}{\sqrt{x+7} - x} \right) \left(\log_2 \sqrt{x+7} - x \right) \geq 0$$

42
x16
192
42
612

$$\log_2 \frac{x+4}{\sqrt{x+7} - x} \geq 0$$

$$\log_2 \frac{x+4}{\sqrt{x+7} - x} \geq \log_2 2^0$$

27
x27
189
54
729
-612
107

$$\frac{x+4}{\sqrt{x+7} - x} - 1 \geq 0$$

$$\frac{x+4 - \sqrt{x+7} + x}{\sqrt{x+7} - x} \geq 0$$

$$(2x+7 - \sqrt{x+7}) (\sqrt{x+7} - x) \geq 0$$

$$2x+7 \geq \sqrt{x+7}$$

$$4x^2 + 27x + 42 \geq 0$$

$$4x^2 + 27x + 42 - x - 7 \geq 0$$

$$\text{D} = 27^2 - 4 \cdot 42 = 307$$