

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

1.2 - 016

Заполняется ответственным секретарем

- (1.) Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ? $a = -104$ $a = 442$
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
- (3.) Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд. 13 числа
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
- а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
- б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
- в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
- (5.) Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$. $(-3; -\frac{11}{4}]$
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
- (7.) Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

1385



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

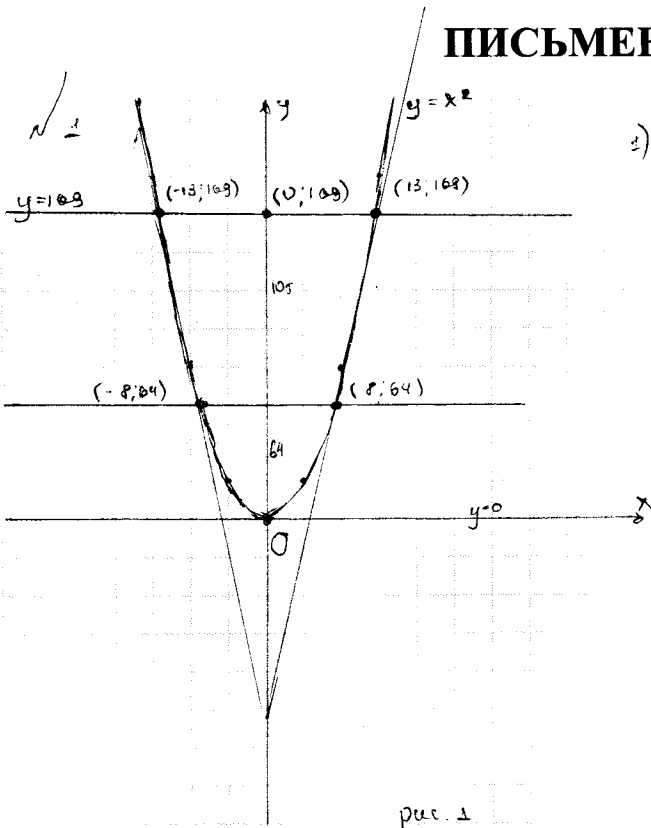


рис. 1

1) Нарисуйте эскиз графика параболы $y = x^2$ и пересекающиеся ею прямые $y = 105$, $y = 64$

Пусть координата $(-13; 169)$ точка А, координата $(13; 169)$ В, тогда $AB = 26$. Аналогично, координаты $(-8; 64)$ и $(8; 64)$ - точки С и D, где $CD = 16$

Нам необходимо треугольник с углом в 30° , т.к. он будет еще равнобедренным, то мы можем найти и остальные его углы (рис. 3)

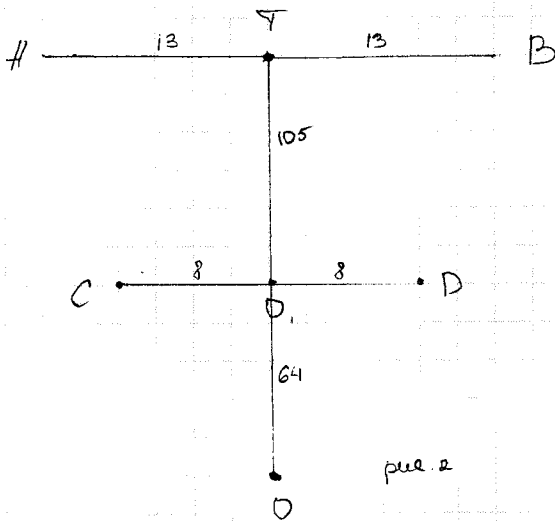


рис. 2

Проведем перпендикуляр AA₁ и рассмотрим треугольник AA₁F. AA₁ = 5; AA₁ = 105. По теореме Пифагора найдем AF

$$AF = \sqrt{305^2 + 5^2} = \sqrt{11050}$$

Треугольник ABC ~ FOC по трем углам:

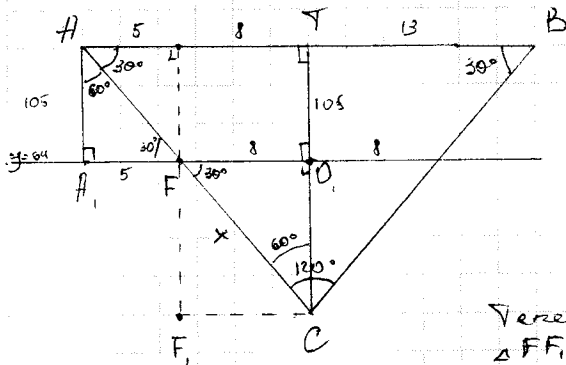
$$\frac{\Delta FOC}{\Delta ABC} = \frac{FO}{AT} = \frac{8}{13} \quad \text{Пусть } FC = x,$$

тогда:

$$\frac{x}{x + \sqrt{11050}} = \frac{8}{13}$$

$$13x = 8x + 8\sqrt{11050}$$

$$x = \frac{8\sqrt{11050}}{5} = 8\sqrt{442}$$

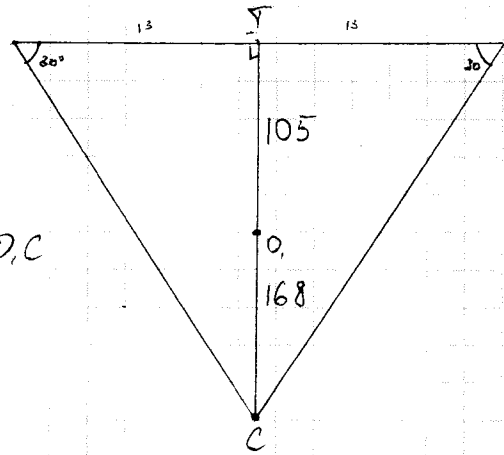


Теперь проведем перпендикуляр FF₁ и рассмотрим ΔFF_1C :

$$FC = FO = 8$$

$$FF_1 = \sqrt{64 \cdot 442 - 64} = 168$$

Точка C углена от точки T на расстоянии равное длине $\sqrt{0}$, и O, C
 $= 273$



• Первый случай:

$T(0; 168) \Rightarrow$ точка C имеет на координатах $x=0$; $y=168-273=-104$

$C(0; -104)$ - координаты точки C, удовлетворяющие условию.

$$\Rightarrow \underline{a = -104}$$

• Второй случай:

Точка C имеет выше точки T, в таком случае её координаты будут равны:

$$C(0; 168 + 273)$$

$$\underline{C(0; 442)}$$

$$\Rightarrow \underline{a = 442}$$

Ответ! При значениях параметра $a = -104$ и

$$a = 442$$

№3 Имеем ровно шесть цифр "5", и они идут подряд:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1-	•	•	•	•	•	•												
2-		•	•	•	•	•	•											
3-			•	•	•	•	•	•										
4-				•	•	•	•	•	•									
5-					•	•	•	•	•	•								
6-						•	•	•	•	•	•							
7-							•	•	•	•	•	•						
8-								•	•	•	•	•	•					
9-									•	•	•	•	•	•				
10-										•	•	•	•	•	•			
11-											•	•	•	•	•	•		
12-												•	•	•	•	•	•	
13-													•	•	•	•	•	•

- раз. диагональный номер цифры в строке
 Точки диагоналей цифры "5" и их возможные расположения

Всего имеем 13 различных вариантов расстановки шести "5" подряд

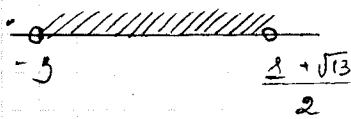
Ответ: 13 чисел

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

1) $\sqrt{x+3} > x$



$x+3 > x^2$ (при рассмотрении $x > 0$ можно возвести в квадрат)

$-x^2 + x + 3 > 0$

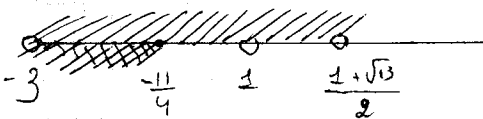
$x^2 - x - 3 < 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, учитывая условие подходит только $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

2) $\sqrt{x+3} = 1+x$

$x+3$

Ответ:



$x \in (-3; -\frac{11}{4}]$

OD3:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x = 1 \\ x+5 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3 \checkmark \\ \sqrt{x+3} > x \checkmark \\ \sqrt{x+3} \neq 1+x \checkmark \\ x+5 > 0 \checkmark \end{cases}$$

$\sqrt{x+3}-x \geq x+5$

$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$

Первый случай: $2x+5 \geq 0$

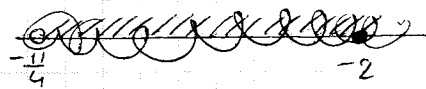
$x+3 \geq (2x+5)^2$ - возводим в квадрат при всех x

$4x^2 + 19x + 22 \leq 0$

$x_1 = -2$

$x_2 = -\frac{11}{4}$ (не подходит по условию)

~~...~~ Решение



Второй случай: $2x+5 < 0$ $x < -2.5$

$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$

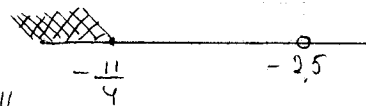
$x+3 \leq (2x+5)^2$

$x+3 \leq 4x^2 + 20x + 25$

$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

$x_1 = -2$

$x_2 = -\frac{11}{4}$



~~...~~ Решение

12

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x + \sin^2 x - 4$$

$$g'(x) = 5 \cos x \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot 9 \cos x - 7 \cos^2 x + \cos^2 x$$

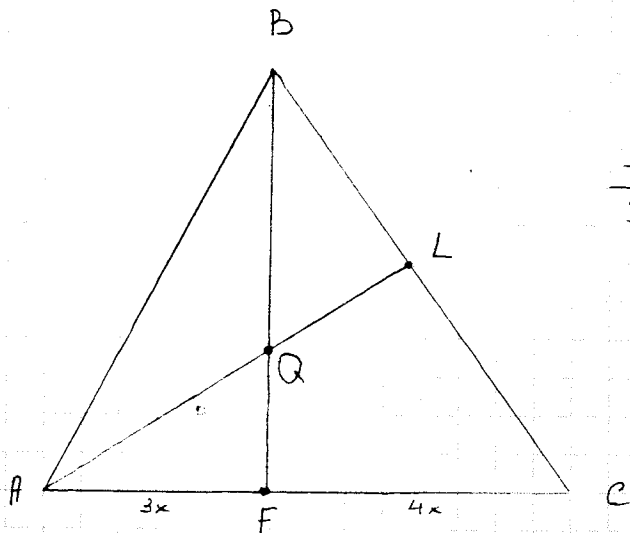
$$g'(x) =$$

$$5 \cos x \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot 9 \cos x - 7 \cos^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$5 \cos x \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot 9 \cos x - 6 \cos^2 x = 0$$

$$6 \cos^2 x = 5 \cos x \cdot \sin 9x + 9 \cos x \cdot \sin 5x$$

16



$$\frac{S_{BOL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$$

$$R = 4$$

$$p(L, AC) = ?$$

$$p(Q, AC) = 9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

1 2 3 4 5
36 37 38 39 40
71 72 73 74 75
106 107 108 109 110
141 142 143 144 145

Возьмем наименьшее возможное
из каждого промежутка, теперь
с помощью минимальной увели-
ченной массы получим минималь-
ную сумму:

Первый ряд масс я оставлю неизменным
Следующий ряд изменим таким образом, чтобы минимальное
масса из второго ряда при разности с максимальным
масса из первого ряда было больше 35

$x - 85 > 35$ - Второй ряд будет сформирован по данному
 $x = 41$ примеру. В ~~следующем~~ ^{исполн} промежутке:

41 42 43 44 45

Формирование третьего ряда проведем по такому же
принципу:

$x - 45 > 35$

81 82 83 84 85

Следующий ряд останется сформирован без изменений, так
как весь ряд при возникшем предельном равен меньше 35
за все того, что в предыдущих рядах изменили масса:

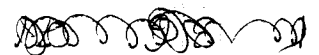
106 107 108 109 110

И последний ряд уже таким образом будет увеличиться:

$x - 110 > 35$

146 147 148 149 150

Сумма всех полученных масс
равна 1385



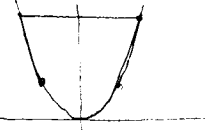
черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

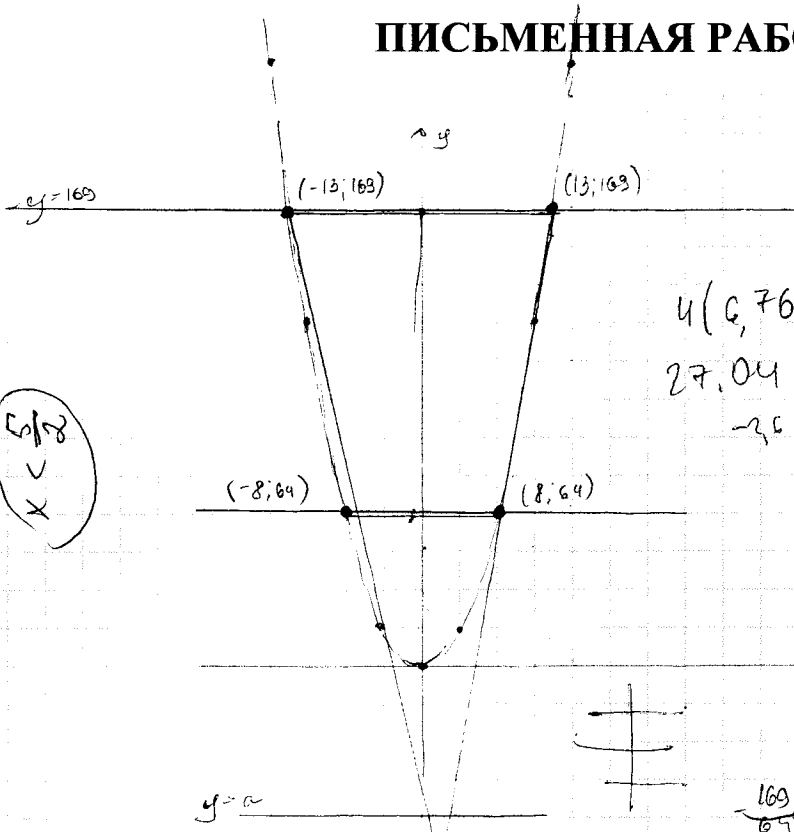
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x+3 \geq 4x^2 + 20x + 25$$

$$4x^2 + 19x + 22 \leq 0$$



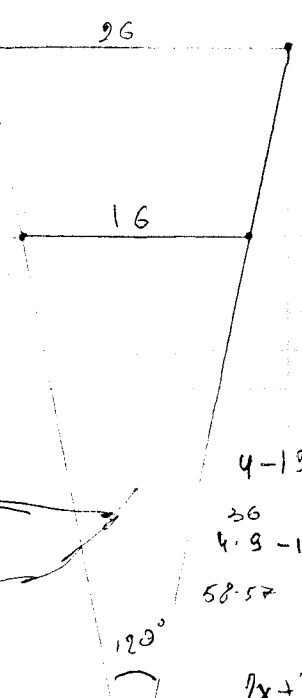
$2x+5 < 0$
 $2x < -5$
 $x < -\frac{5}{2}$



$$4(0,76) - 19(2,6) + 22$$

$$27,04 - 49,4 + 22$$

$$-3,5$$



$$4 - 19 + 22$$

$$= 6$$

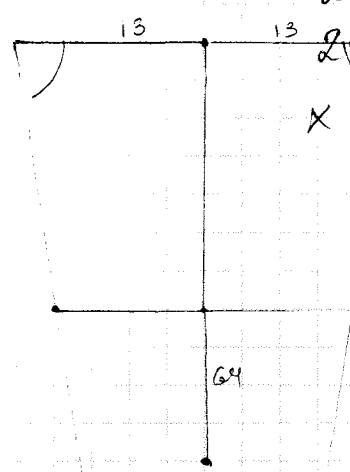
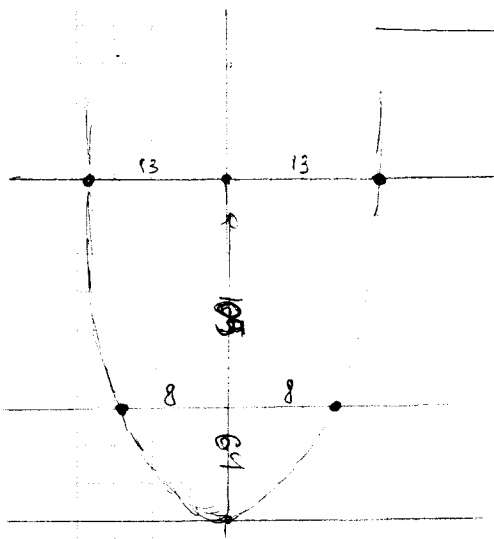
$$4 \cdot 9 - 19 \cdot 3 + 22$$

$$= 58 - 57 = 1$$

$$2x+5 \geq 0$$

$$x \geq -2,5$$

$$\sin x = -\cos x$$

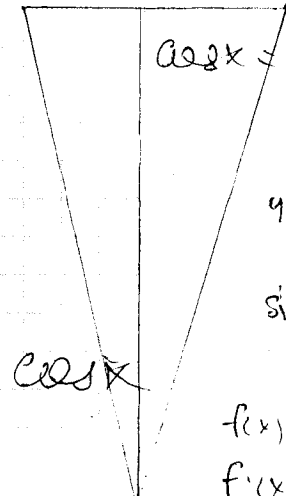


$$2x+5 \geq 0$$

$$2x \geq -5$$

$$x \geq -2,5$$

$$\sin x = -\cos x$$

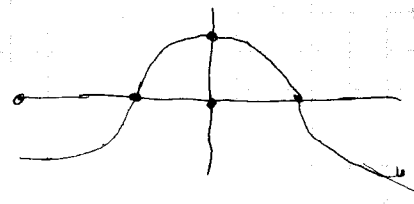


$$y = 4x^2 + 19x + 22$$

$$\sin^2 x = \cos^2 x$$

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$f'(x) = -\cos 2x \cdot 5$$



$$\sin 5x$$

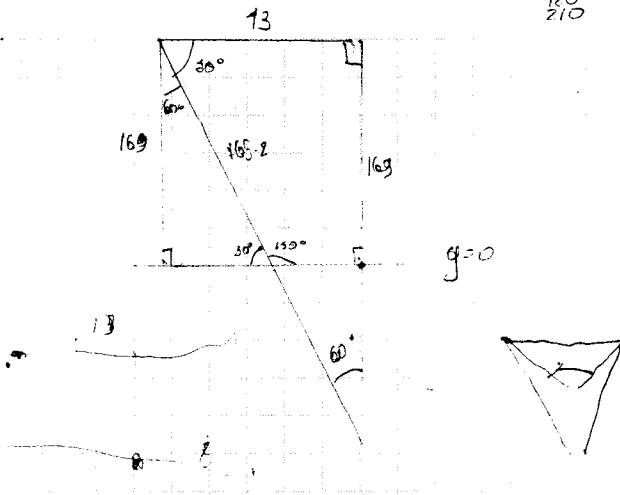
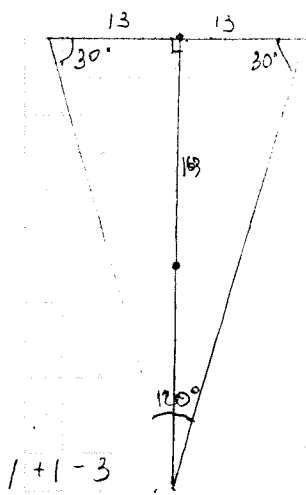
$$-\cos 2x \cdot 5 = -5 \cos 2x$$

$$25 \cdot 0,28 = 7,0$$

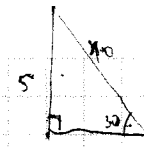
$$4 \cdot (-2,5)^2 + 19(-2,5) + 22 = 100 - 47,5 + 22 = 74,5$$

$$\sin x = \cos x$$

$$\cos x = \sin x$$

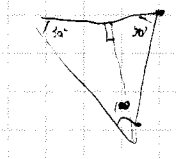


360
210



10.5
10.5

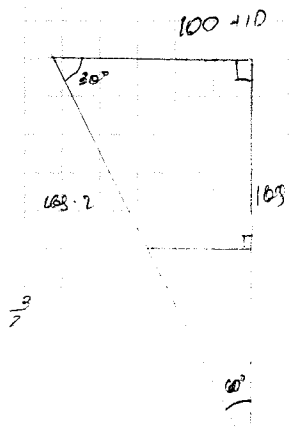
$$10.5^2 + 5^2 = 110.25 + 25 = 135.25$$



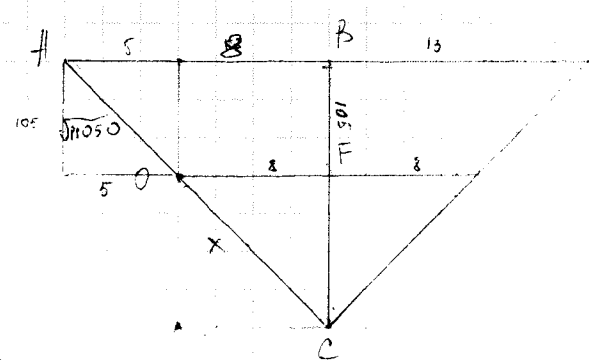
$\sin 2x$

$\frac{2 \cdot 11}{2}$

$\sqrt{10.5^2 + 25^2}$
 $2.5 + 2$



$$\sqrt{-1+3} > -1$$



$$\frac{OF}{BC} = \frac{OF}{AB} = \frac{8}{13}$$

4-2-3

$$\begin{array}{r|l} 442 & 2 \\ 221 & 13 \\ 17 & 17 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$\frac{x}{x + \sqrt{11050}} = \frac{8}{13}$$

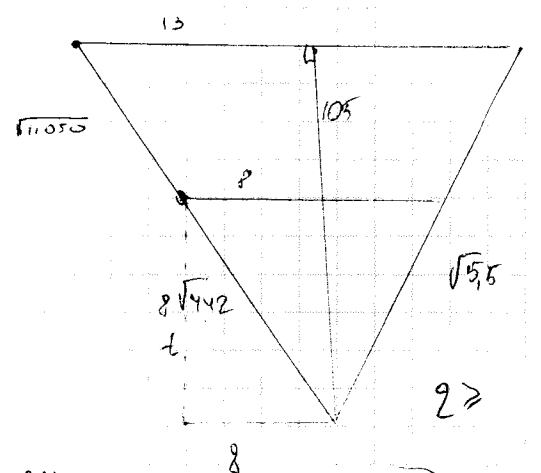
$$13x = 8x + 8\sqrt{11050}$$

$$5x = 8\sqrt{11050}$$

$$x = \frac{8\sqrt{11050}}{5} = 8\sqrt{442}$$

$$2\left(-\frac{11}{4}\right) + 5 \geq 0$$

$$-\frac{22}{4} + \frac{20}{4}$$



Воска с углами
25 воска на разделение

$$-l^2 = 64 \cdot 442 - 64$$

$$-l^2 = 64(442 - 1) = 28224$$

$$-l = 168$$

$(-2) \cdot 1.1$

273

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$x \geq 0 \quad x < 0$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$-x^2 + x + 3 > 0$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 - 4(-3)$$

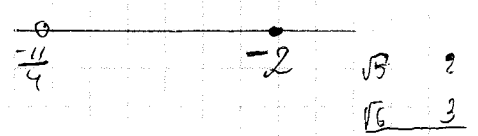
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x+3 > x^2$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 - 4(-3) = 13$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$



$$(x+3) > x^2$$

$$-3 \geq 2$$

$$\frac{4.6}{2} = 2.3$$

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - (1 - \sin^2 x) - 3$$

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x + \sin^2 x - 4$$

$$g'(x) = (\sin 5x)' \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot (\sin 9x)' - (\sin^2 7x)' + (\sin^2 x)'$$

$$g'(x) = 5 \sin x \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot 9 \sin x - 7 \cos^2 x + \cos^2 x$$

$$g'(x) = 5 \sin x \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot 9 \sin x - 6 \cos^2 x$$

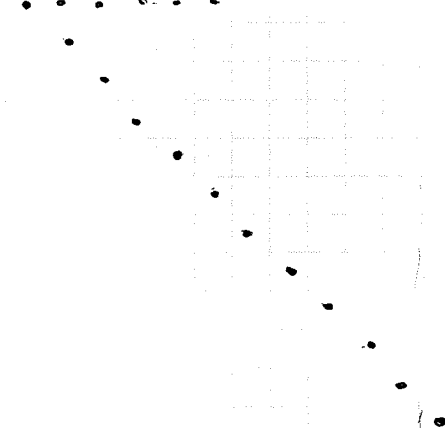
$$g'(x) = 5 \sin x \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot 9 \sin x - 6 \sin^2 x$$

18-значные числа, только "0", "5", "9" так как, это цифр
"5" равно 6, и они идут подряд.

555555.....

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

.....



$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$g'(x) = 5 \cos x \cdot 2 \sin 4,5x \cdot \cos 4,5x + 2 \sin 2,5x \cdot \cos 2,5x \cdot 9 \cos x - 6 \cos^2 x$$

$$g'(x) = 10 \cos x \cdot \cos 4,5x \cdot \sin 4,5x + 18 \sin 2,5x \cdot \cos 2,5x \cdot \cos x - 6 \cos^2 x$$

$$g'(x) = 5 \cos^2$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$[\sqrt{x+3} > x]$$

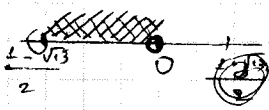
$$1) \quad -3 \leq x < 0$$

$$x+3 > x^2$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 - 4(-3) = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

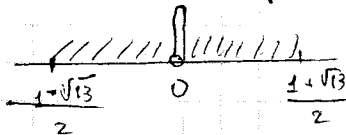
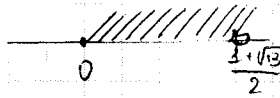


$$2) \quad x \geq 0$$

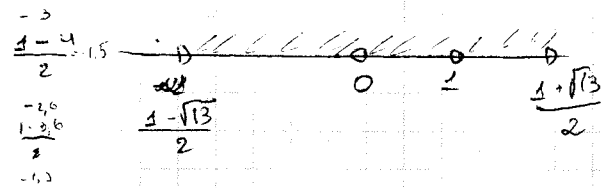
$$x+3 > x^2$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$\sqrt{13} \approx 4$$



$$\sqrt{x+3} - x \geq x+5$$

$$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$$

$2x+5$ - возрастает монотонно при всех допустимых x отсюда, значит.

$$x+3 \geq (2x+5)^2$$

$$x+3 \geq 4x^2 + 20x + 25$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

$$D = 19^2 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 361 - 352 = 9$$

$$x_1 = \frac{-19 + 3}{8}$$

$$x_2 = \frac{-19 - 3}{8} = \text{scribble}$$

$$x = \frac{-16}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-22}{8} = -\frac{11}{4}$$

OD3:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \\ x+5 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ \sqrt{x+3} > x \\ \sqrt{x+3} \neq 1+x \\ x > -5 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} = 1+x$$

$$x+3 = (1+x)^2$$

$$x \neq 1$$

$$x+3 = (1+x)^2$$

$$x+3 = 1+2x+x^2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 - 4(-2) = 13$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$



$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\log_3 3 \geq 3$$

$$\log_{\sqrt{-\frac{11}{4}-\frac{11}{4}} - (-\frac{11}{4} + \frac{20}{4})} \geq 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4} \right) \geq 1$$

$$\frac{1}{2} > \frac{3}{4}$$

$$2x+5 \geq 0$$

$$2x-5 < 0$$