МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 6-010

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-010
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Для решения задачи нам следует взять производную из уровнения и после получения значений из уровнения мы сможем вставить их в начальное уровнение для определения минимальных и максимальных значений.

$$(g(x))' = (\sin 5x \cdot \sin 9x)' - (\sin^2 7x)' - (\cos^2 x)' (3)' =$$

$$= 5\sin 9x \cos 5x - 9\sin 5x \cos 9x - \frac{1}{ctg\, 7x} + \frac{1}{tg\, x} = 0$$

Приведём уровнение к ~~оба~~ общему знаменателю.

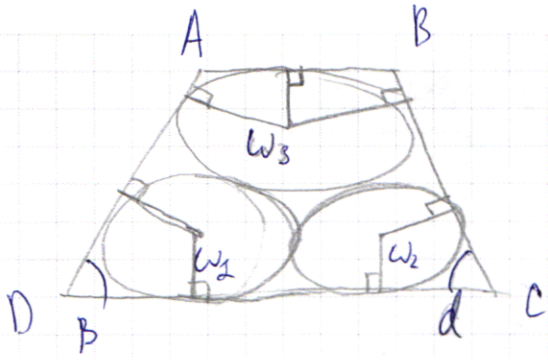
$$\frac{5\sin 9x \cos 5x \cos 7 \sin x - 9\sin 5x \cos 9x \cos 7x \sin x - \sin 7x \sin x + \cos x \cos 7x}{\cos 7x \sin x}$$

$\cos 7x \sin x \neq 0 \Rightarrow \cos 7x \neq 0 \quad 7x \neq 90°, 270° \qquad x \neq \frac{\pi}{14}; \frac{3\pi}{14}$

$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; 180° \qquad x \neq 0; \pi;$

Теперь нам нужно решить верхнюю часть уровнения.

4) Сразу же понятно что точки соприкосновения сторон прямоугольника с окружностями имеёт прямой угол

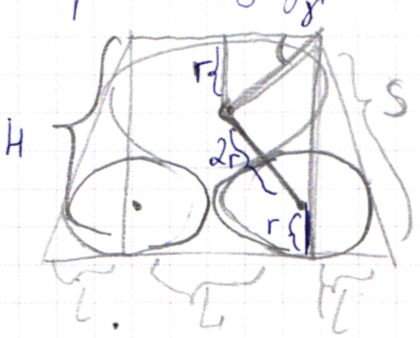


$AD+BC-AB-CD=10$

сразу же становиться ясно что $\beta=\alpha$ и трапеция ABCD является равнобедренной.

можно так же записать уровнение для решения задачи.

$AD=BC=S \quad AB+DC=2L+2l$



$2S-2L-2l=10$

$S-L-l=5$

$L=\dfrac{2r}{\tan\gamma} \quad S=\dfrac{H}{\sin\alpha} \quad l=\dfrac{H}{\tan\alpha}$

а) $H=r+r+\sqrt{4r^2-r^2}-r$ - в уровнении написанно потомучто от одного центра окружности до плоскости трапеции равняется r

$=2r+\sqrt{3}r = r(2+\sqrt{3})$

А $\sqrt{4r^2-r^2}$ - это росстояние между центрами ω_3 и ω_2 (по теореме пирогора), $2r$ - гипатенуза а r - это расстояние от центра ω_2 до ω_3 по горизонтале.

$\dfrac{r(2+\sqrt{3})}{\sin\alpha}-\dfrac{r(2+\sqrt{3})}{\tan\alpha}-\dfrac{2r}{\tan\gamma}=5;$

б) угол $AOB=2(90^\circ-\gamma)$; $\gamma=\operatorname{arctan}\dfrac{2r}{L}$

Я записал это уровнение потому что трапеция сеиетрична.

в) $\cancel{\frac{AB}{2}=2}$ $\quad AO\times BO=AO^2=BO^2$, $\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=AO^2-r^2$

$AB=2\sqrt{42-r^2}$; $\longleftarrow$ $AB=2\sqrt{AO^2-r^2}$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Мы можем использовать цифры 0, 5, 9 т.е. 3 различные цифры. 18 раз. Мы можем использовать цифру 5 только 6 раз (подряд) и другие цифры как минимум по одному разу. Предположим последовательность из цифр пять попорядку. Если мы поставим цифру 0 первой то ~~последовательность~~ ~~не буд~~ цифра уже не будет 18-значным. т.е. мы можем поставить вперёд либо 5 либо 9. при подставлении цифры пять в перёд у нас останутся только оставшиеся 12 цифр и уже будет 2^{12} способов в первом случае.

При подставлении цифры 5 уже во вторую позицию т.е. 9555555.... то у нас будет 2^{11} комбинаций. и т.д.

получается кол-во комбинаций $2^{12}+2^{11}+2^{10}+\ldots+2$. Это геометрическая прогрессия.

$S=\frac{n\times(1-q^{12})}{1-q}$ $n=2$ $q=2$; тогда $S=\frac{2(1-2^{12})}{1-2}=\frac{2^{13}-2}{}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

7) Давайте начнём брать по 5 чисел из каждой последовательности, но нам нужно чтобы сумма чисел последовательности была минимальной т.е. сами числа должны быть ~~так~~ же минимальны.
У нас есть ограниченная последовательность т.е. она не бесконечна и мы можем решать её подбором.
Минимальные цифры в последовательности [1; 35] будут 1, 2, 3, 4, 5. Во второй последовательность [36; 70] будут 36 37 38 39 40, но они не подходят под описания тогда нам нужно взять цифры следующей последовательности которые больше прежней на 40 (35 + 5) ~~от~~ 35 - потому что ~~растет~~ разница между минимальными цифрами прежней и новой последовательности, а цифра 5 ~~та~~ потому что продолжительность последовательности состоит из 5 цифр., тогда в последовательностях

[1; 35] 1, 2, 3, 4, 5 ⟶ $(1+2+3+4+5)=15$

[36; 70] 41, 42, 43, 44, 45 ⟶ $(40+1)+(40+2)+(40+3)+(40+4)+(40+5) = 40\cdot 5+15$

[71; 105] 81, 82, 83, 84, 85 ⟶ $(40\times 2+1)\ldots+(40\times 2+5) = 40\times 10+15;$

[106; 140] 121, 122, 123, 124, 125

[141; 175] 161, 162, 163, 164, 165.

В следующих последовательностях всё похоже.

т.е. $S[1;35] = 15$

$S[36;70] = 40\cdot 5+15$

$S[71;105] = 40\times 10+15$

$S[106;140] = 40\times 15+15$

$S[141;175] = 40\times 20+15$

$15\times 5 = 75$

$40\times 5+40\times 10+40\times 15+40\times 20 = 40(5+10+15+20) = 40\times 50 = 2000$

$S = 2000+75 = \underline{2075}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) По свойствам логорифмов $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ мы можем превратить уровнение

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ в $(x+5) \geq (\sqrt{x+3}-x)^1$

$(\sqrt{x+3}-x)^1 = \sqrt{x+3}-x$ тогда

$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$ Для извлечения корня мы возведём его в квадрат, но перед этим избавимся от $-x$ в правой части уровнения.

$2x+5 \geq \sqrt{x+3} \Longrightarrow \boxed{x \geq -3}$

$(2x+5)^2 \geq (\sqrt{x+3})^2$

$4x^2+20x+25 \geq x+3$

$\Downarrow$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$D = 19^2 - 4 \times 4 \cdot 22 =$

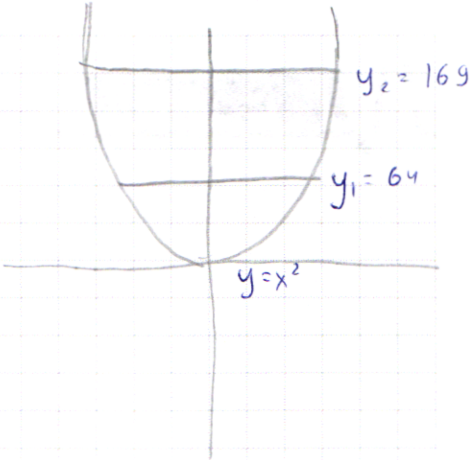
$= 361 - 352 = 9 = 3^2$

в этом уровнении всё хорошо и мы можем так сделать т.е мы можем возвести уровнение с корнем в квадрат так как она является позитивная т.е. квартаный корень можно вытащить только позитивные цифры или 0.

$x_{1,2} = \dfrac{-19 \pm 3}{8} = -2; -2\frac{3}{4};$

$x_1 = -2;\ x_2 = -2\frac{3}{4};$

1) Для начала составим рисунок



Мы получаем параболу на которой находятся 2 прямые $y_1 = 64 = 8^2$ $y_2 = 169 = 13^2$

сразу понятно что точки соприкосновения с параболой у ~~графиков~~ прямых будут в координатах $(\pm 8; 64)$; $(\pm 13; 169)$; но

так же у нас есть третья прямая $y_3 = a$. которая образует треугольник с другими двумя отрезками.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-010

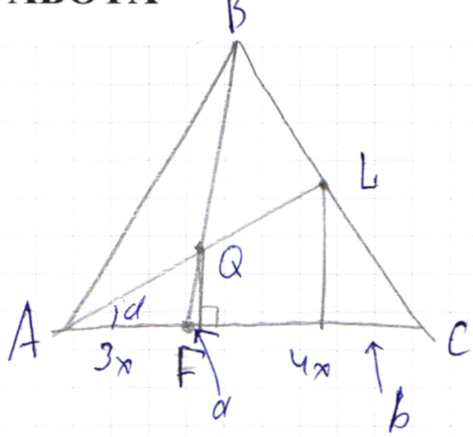
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $AF=3x$ $\quad Q\perp AC=9;$

$FC=4x$ $\quad L\perp AC=?$



$S_{\triangle BQL}=\sin B\; QB\cdot LB;$

$S_{\triangle ABC}=(B\perp AC)\times 3{,}5x;$

~~sin~~ $\tan\alpha=\dfrac{Q\perp AC}{3x+d}=\dfrac{L\perp AC}{7x-b};$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. 0,5,9 18 1

7. 123450 1

41 42 43 44 45 2

81 82 83 84 85 3

~~86 87 88 89 90~~

121 122 123 124 125

161 162 163 164 165

20

70+50

15

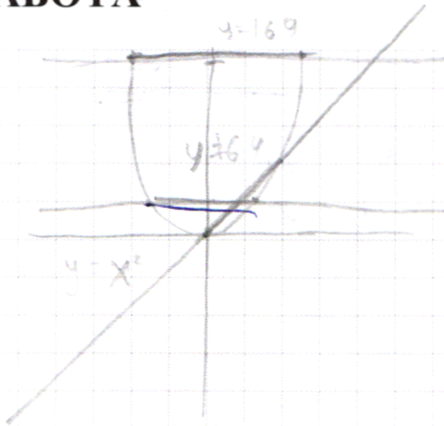
15 40

15 80 240

15 120

15 160 175.

75 400



19^2

19
19

81
190
190
280+81
361

22
16
12
120
220
340
352

361-352 = 9.

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$x+5 \geq (\sqrt{x+3}-x)^1 = \sqrt{x+3}-x$

$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$(2x+5)^2 \geq x+3$

$4x^2+20x+25 \geq x+3$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$22 \cdot 4 \cdot 4 =$

$D = 19^2 + (2 \times 16) = 3^2$

$x_{1,2} = \frac{-19 \pm 3}{16} = -1; -1\frac{3}{8};$

2^2

$\frac{6}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик

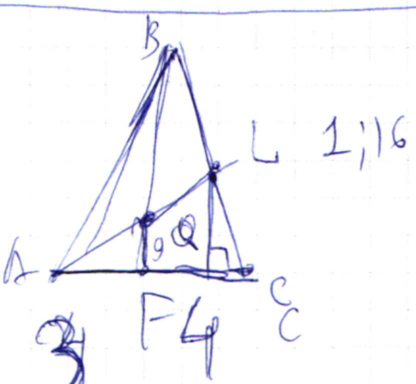
(Поставьте галочку в нужном поле)

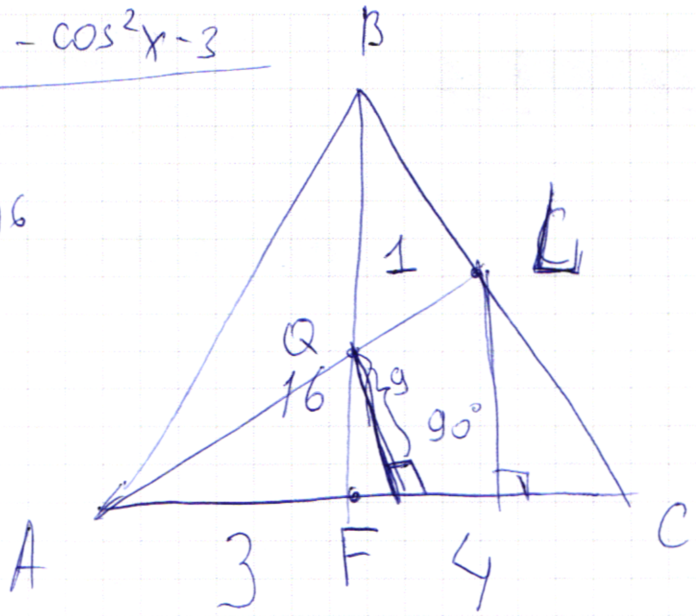
Страница №__

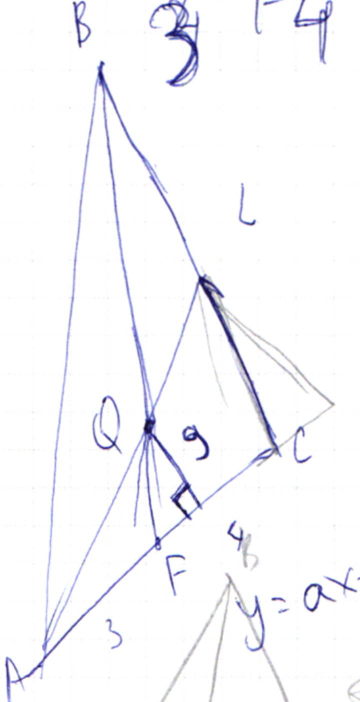
(Нумеровать только чистовики)

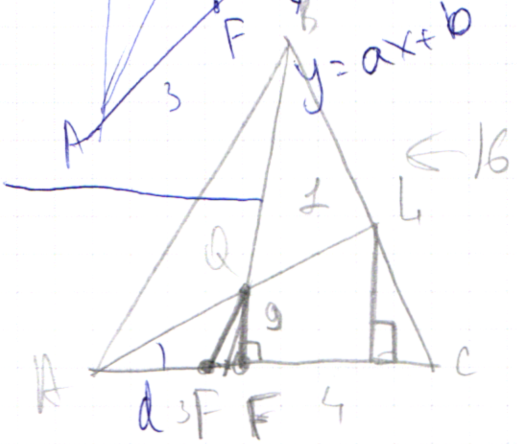
$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

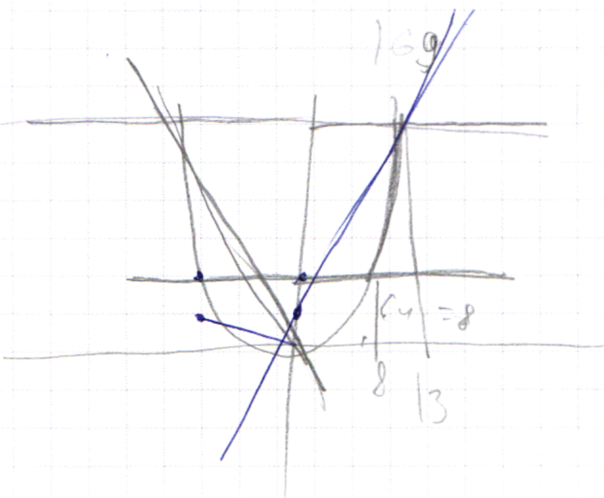
4

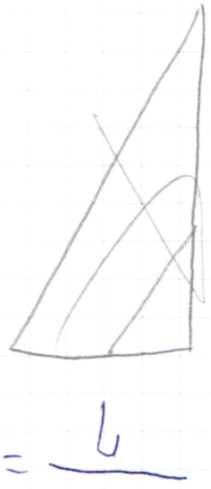












$AF = 3x$

$FC = 4x$

$Q \perp AC = 9$

$tg\alpha = \dfrac{Q(L)}{\perp AC} = \dfrac{9}{3x + ax} = \dfrac{L}{?}$

$S_{ABC} = B\perp \times 3{,}5x \quad S_{QBL} = \dfrac{S_{ABC}}{16} =$

$S_{QBL} = BQ \times BL \times \sin QBL$

$\dfrac{B(\perp AC) \times 3{,}5x}{BQ}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

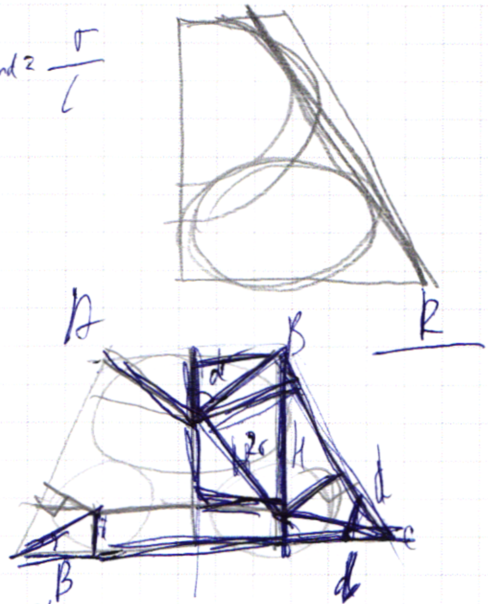
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5\sin 9x \cos 5x = 9\sin 5x \cos 9x$

~~$5xy = 9$~~

$\frac{2r}{\tan\alpha} + 2r + \frac{2r}{\tan\beta}$

$\tan\alpha = \frac{r}{l}$



$2r\sin\alpha + \cancel{2r\sin\alpha} + 2$

~~$2r\sin\alpha + 2r\sin\alpha +$~~

$\tan\alpha = \frac{R}{l}$

$S - \frac{2r}{\tan\alpha}$

$2S - 2L + L \pm \omega$

$\frac{R}{C} = \sin\beta$ $\frac{H}{S} = \sin\alpha$

$\frac{H}{\sin\alpha} - \frac{2r}{\tan\beta} - \frac{H}{\tan\alpha}$

$S - l - l = 5$

$r(2+\sqrt{3}) - 2r\cos\alpha$

$2r\sin\alpha + 2r\sin\alpha + \frac{H}{2\tan\alpha} + \frac{2H}{2\sin\alpha} = -10$

$\frac{H}{\sin\alpha} + \frac{2r}{\tan\alpha} + \frac{H}{\tan\alpha}$

$H = 2r + \sqrt{4r^2 - r^2\cancel{\sin^2\alpha}} = 2r + \sqrt{3}r =$

$H = r(2+\sqrt{3})$

$\frac{r(2+\sqrt{3})}{\sin\alpha} + 2r\sin\alpha + \frac{H\cos\alpha}{\sin\alpha} = 5$

$\frac{r(2+\sqrt{3} + 2\sin^2\alpha + (2+\sqrt{3})\cos\alpha)}{\sin\alpha} = 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-010

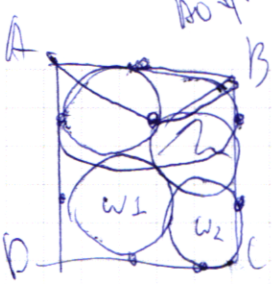
ШИФР

(заполняется секретарём)

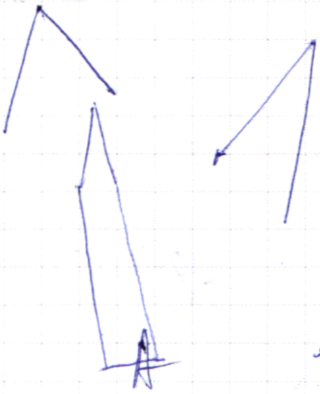
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

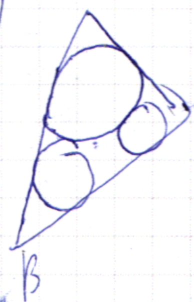
$AO \perp BO = \omega_2$

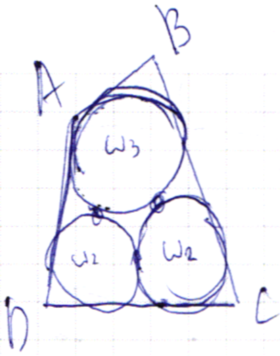
$AB - ?$



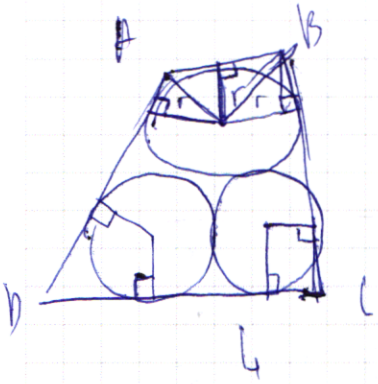
$AD + BC - AB - CD = 10$

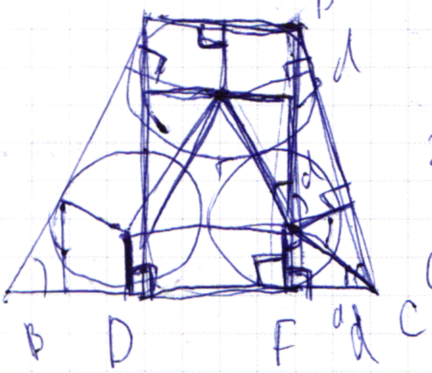






$AD + BC - AB - CD = 10$

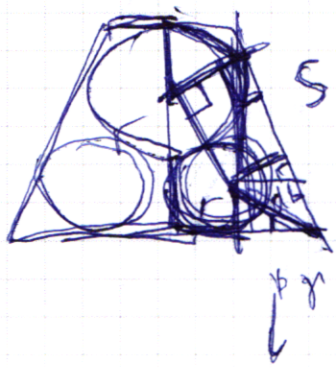


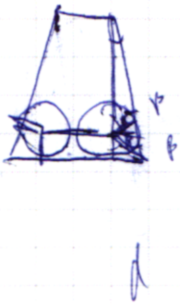


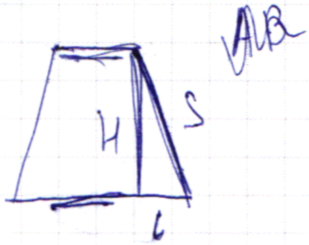
$2r + \sin\alpha\, 2r = BF$

$2r + \sin\beta\, 2r = AD$

$\alpha = \beta.$







$H = \tan\alpha\, L$

$S = \frac{H}{\sin\alpha}$

$\cancel{\tan\alpha L = S \sin\alpha}$

$\cancel{L = S\cos\alpha}$

$\sin\gamma$

$2S - L - C = 5$

$2S + 2H + 2L = 10$

$S - H - L = 5$

$90^\circ - \alpha$

$L = R$

$H = S\sin\alpha$

$\frac{H}{\sin\alpha} = S$

$\frac{H}{\tan\alpha} = L$

$\frac{H}{L} = \tan\alpha$

$\boxed{S - R - L = 5}$

$H\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{1} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$\frac{H}{\tan\alpha} = L$

$H\left(\frac{1 - \sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = 5$

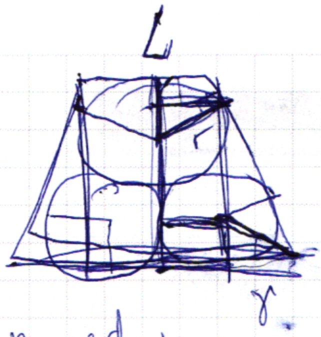
$\frac{H}{\sin\alpha} - H - \frac{H}{\tan\alpha} = 5.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{H}{\tan\alpha} + \frac{H}{\sin\alpha} + R = 5$$

1 2 4 6



$$\frac{H\cos\alpha + H}{\sin\alpha} + R = 5$$

$$\frac{H(\cos\alpha + 1) + R}{\sin\alpha} = 5$$

$R + R\cos\alpha +$

4.8

$(\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3)' = 0$

$H = 2r$

$45^2 \cos 5x \cos 9x -$

$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = 0$

$\Rightarrow 0$

M_{min} $\sin 5x / 9x = 0$

$-\sin^2 7x = \frac{1}{\operatorname{ctg} 7x}$

$2\cos 5x \sin 7x -$

$5x / 9x = 180^\circ$

$32x^2 \cos 5x \cos 9x - \frac{1}{\operatorname{ctg} 7x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0$

$36x7$

180°

$0 \quad \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

$32x^2 \cos 5x \cos 9x - \frac{\sin 7x}{\cos 7x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 0$

$5 \sin 9x \cos 5x \cos 7x \sin x$

$x = 0 \,/\, 5x = 90^\circ \quad 9x = 90^\circ$

$180^\circ \quad 180^\circ$

$-9 \sin 5x \cos 9x \cos 7x \sin x$

$x = 18^\circ \quad x = 10^\circ$

$36^\circ \quad 20^\circ$

$\frac{-\sin 7x \cos x + \cancel{\sin x \sin 7x}}{\sin 7x}$

$$\frac{-\sin 7x \sin x + \cos x \cos 7x = 0}{\cos 7x \sin x}$$

$(\sin 5x \sin 9x)' + (\sin^2 7x - \cos^2 x - 3)' = 0$

$(\sin 5x)'(\sin 9x) - (\sin 9x)'(\sin 5x) - (\sin^2 7x)' - (\cos^2 x)' = 0$

$\cos 7x \neq 0 \quad x \neq 90^\circ, 270^\circ$

$-5 \sin 9x \cos 5x$

$\sin x \neq 0 \quad x \neq 0, 180^\circ$

$-5 \sin 9x \cos 5x - 9 \sin 5x \cos 9x - \frac{1}{\operatorname{ctg} 7x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$

$x \neq \frac{90^\circ}{7}; \frac{270^\circ}{7}$

$$-5 \sin 9x \cos 5x - 9 \sin 5x \cos 9x \frac{-\sin 7x + \cos x}{\cos 7x \sin x}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)