

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

3-006

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

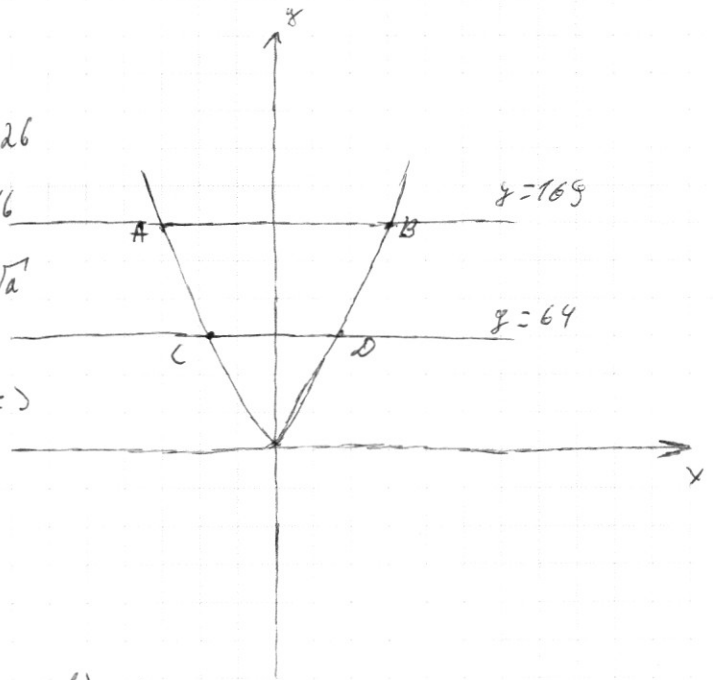


$$1) y = x^2, y = 169, y = 64, y = a$$

$$x^2 = 169 \quad x = \pm 13 \quad AB = 2|x| = 26$$

$$x^2 = 64 \quad x = \pm 8 \quad CD = 2|x| = 16$$

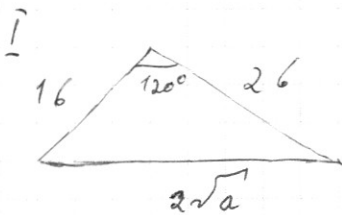
$$x^2 = a \quad x = \pm \sqrt{a} \quad KL = 2|x| = 2\sqrt{a}$$



Если  $y = x^2$  и  $y = a$  касаются  $\Rightarrow$

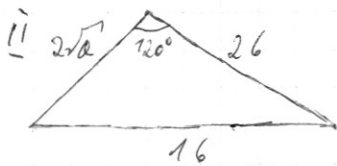
$$\Rightarrow a > 0$$

по теореме косинусов



$$26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4a$$

$$a = \frac{1348}{4} = 337$$



$$26^2 + 4a - 2 \cdot 26 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 16^2$$

$$676 + 4a + 52\sqrt{a} = 256$$

$$169 + a + 13\sqrt{a} - 64 = 0$$

$$a + 13\sqrt{a} - 105 = 0 \quad a = t^2$$

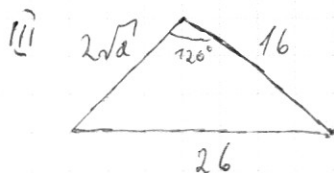
$$t^2 + 13t - 105 = 0$$

$$t_1 = \frac{169 + 420}{2} \quad t_1 = \frac{-13 + \sqrt{589}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-13 - \sqrt{589}}{2}$$

$$a_1 = \left(\frac{-13 + \sqrt{589}}{2}\right)^2$$

$$a_2 = \left(\frac{-13 - \sqrt{589}}{2}\right)^2$$



$$16^2 + 4a - 2 \cdot 16 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 26^2$$

$$256 + 4a - 32\sqrt{a} = 676$$

$$4a - 32\sqrt{a} - 420 = 0$$

$$a - 8\sqrt{a} - 105 = 0 \quad a = t^2$$

$$t_1 = \frac{8 + 22}{2} = 15$$

$$t_2 = \frac{8 - 22}{2} = -7$$

$$a_1 = 225$$

$$a_2 = 49$$

Ответ: i) 337, ii)  $\frac{(-13 + \sqrt{589})^2}{4}$ ; iii) 225, 49

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) 1 2 3 4 10      сумма 20  
40 41 42 43 44      сумма 210  
81 82 83 84 85      сумма 405  
116 117 118 119 120      сумма 590  
156 157 158 159 160      сумма 1000

общая сумма 2235:

ответ 2235:

5)  $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$

~~$x+3 \geq 0$   
 $\sqrt{x+3}-x > 0$   
 $x+5 > 0$   
 $\sqrt{x+3}-x \neq 1$~~

$$(\sqrt{x+3}-x)^1 \geq x+5$$

$$\sqrt{x+3}-x \geq x+5$$

$$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$$

$$x+3 \geq 4x^2+20x+25$$

$$4x^2+19x+22 \geq 0$$

$$x_1 = \frac{-19+3}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{8} = -\frac{11}{4}$$

$$4(x+2)(x+\frac{11}{4}) \geq 0$$

$$(x+2)(x+\frac{11}{4}) \geq 0$$

$$\sqrt{x+3} \geq 0 \quad x \geq -3$$

$$x+5 \neq 0 \quad x \neq -5$$



ответ  $x \in [-3; -\frac{11}{4}]$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \sin(7x-2x) \cdot \sin(7x+2x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= (\sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x)(\sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \sin^2 7x \cos^2 2x - \sin^2 2x \cos^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \sin^2 7x (1 - \sin^2 2x) - \sin^2 2x (1 - \sin^2 7x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \sin^2 7x - \sin^2 7x \sin^2 2x - \sin^2 2x + \sin^2 2x \sin^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \sin^2 7x - \sin^2 2x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = -\sin^2 2x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= -4\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x - 3 = -4\sin^2 x (1 - \sin^2 x) - (1 - \sin^2 x) - 3 =$$

$$= -4\sin^2 x + 4\sin^4 x - 1 + \sin^2 x - 3 = -3\sin^2 x + 4\sin^4 x - 4 =$$

$$4\sin^4 x - 3\sin^2 x - 4 = 0 \quad \sin^2 x = z$$

$$4z^2 - 3z - 4 = 0 \quad \sin^2 x = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{8}$$

$$D = 9 + 64 = 73$$

$$z_1 = \frac{3 + \sqrt{73}}{8}$$

$$z_2 = \frac{3 - \sqrt{73}}{8}$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+3-x > 0 \\ x+5 > 0 \\ x+3-x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x+3 > x^2 \\ x > -5 \\ x+3 < (1-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3 \\ x^2 - x - 3 < 0 \\ x > -5 \\ x+3 < 1 - 2x + x^2 \end{cases}$$

$$y = x^2$$

$$x^2 = 169$$

$$x = \pm 13$$

$$AB = 2|x| = 26$$

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm 8$$

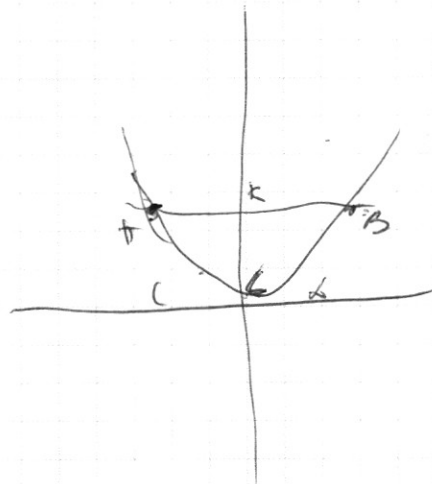
$$CD = 2|x| = 16$$

$$x^2 = a$$

$$x = \pm \sqrt{a}$$

64  
169

$$64 + 420$$



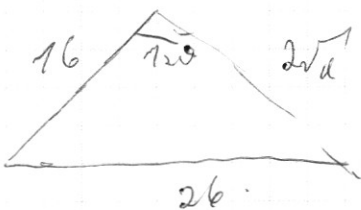
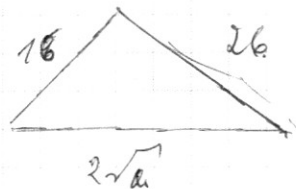
$$KL = 2\sqrt{a}$$

$$AB = 26$$

$$CD = 16$$

$$KL = 2\sqrt{a}$$

$$2 = 2a$$



$$y = x^2 \text{ и } y = a \text{ пересекаются}$$

$$a > 0 \Rightarrow KL = 2\sqrt{a} \text{ по}$$

теореме Пифагора

$$26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \left(-\frac{1}{2}\right) = 4a$$

$$676 + 256 + 416 = 4a$$

$$\frac{1348}{4} = a \quad a = 337$$

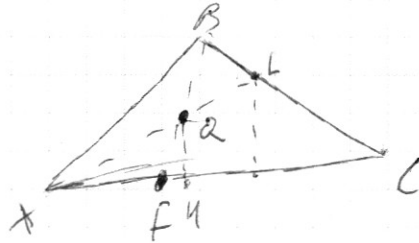
$$832$$

$$a = 337$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

21



$$\frac{AF}{AC} = \frac{1}{4}$$

$$AF = \frac{AC}{4}$$

$$\frac{AC}{4} = \frac{3FC}{4}$$

$$AC = 3FC$$

$$\frac{AL}{LC} = \frac{3}{4}$$

$$AL = 3$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = k^2$$

$$k^2 = \frac{1}{16} \quad k = \frac{1}{4}$$

$$AL = \frac{3FC}{4}$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{3FC}{4} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{3FC}{4}$$

1)  $y = x^2$      $y = 169$      $y = 64$      $y = a$

$$x^2 = 169$$

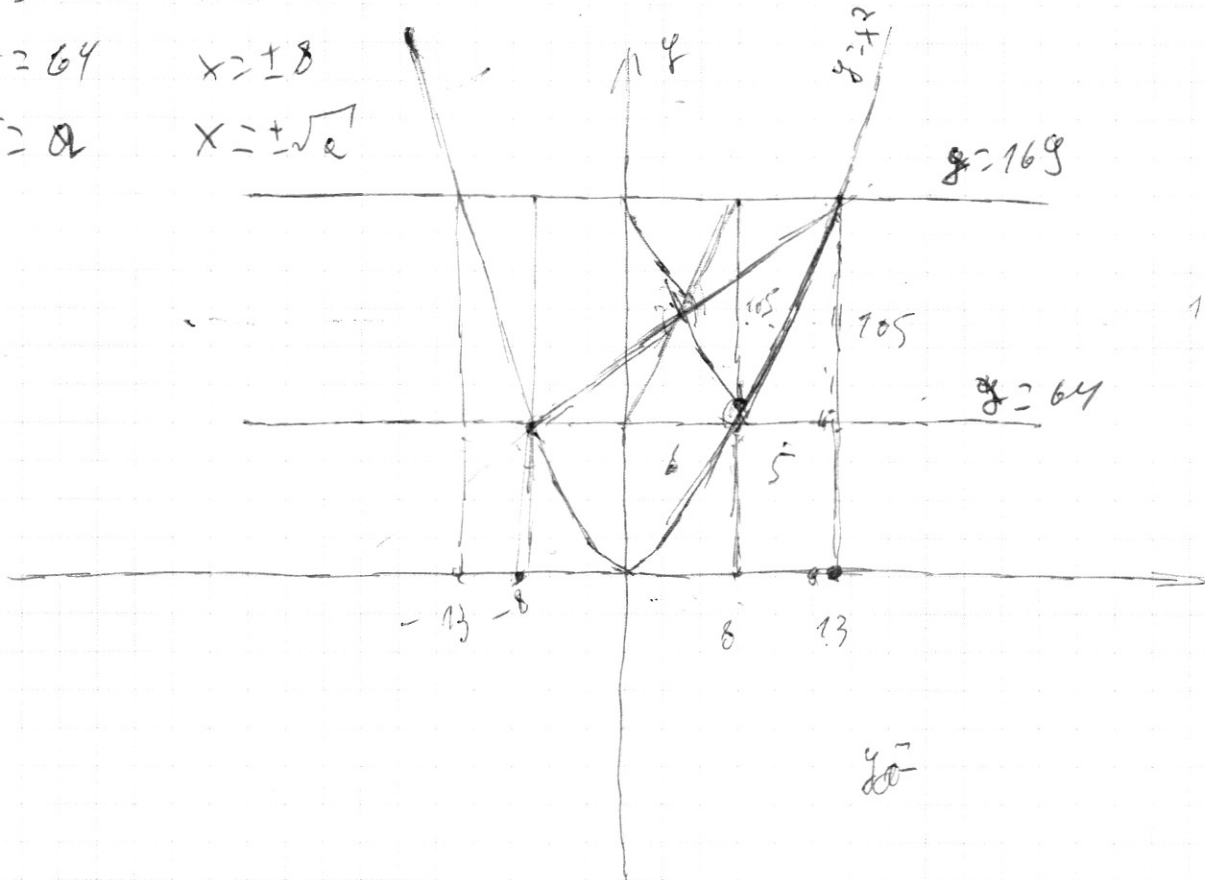
$$x = \pm 13$$

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm 8$$

$$x^2 = a$$

$$x = \pm \sqrt{a}$$



$$169 - 64 = 105$$



$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\sqrt{x+3}-x > 1$$

$$\sin 2x = 4 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$9 + 64 =$$

1 2 3 4 10

~~36 37 38 39 40 41~~

~~71 72 73 74 75~~

$$\sqrt{x+3} \geq 0$$

40 41 42 43 44

~~80 81 82 83 84 85~~

110 5 116 117 118 119

156 157 158 159 160

$$1 - \sin^2 x$$

$$-4 \sin^2 x + 4 \sin^4 x - 1 + \sin^2 x - 3 =$$

$$= -3 \sin^2 x + 4 \sin^4 x - 4 =$$

$$= 4 \sin^4 x - 3 \sin^2 x - 4 = 0 \quad \sin^2 x = t$$

$$4t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t_1 = \frac{3 + \sqrt{23}}{8}$$

$$t_2 = \frac{3 - \sqrt{23}}{8}$$

1 2 3 4 10

20

40 41 42 43 44

~~110 210~~

81 82 83 84 85

415

~~15 116 117 118 119 595~~

156 157 158 159 160 ~~1000 2000~~

~~2200~~

2235

~~320~~  
~~1000~~  
~~2000~~  
~~1000~~  
~~2000~~

$$\sin(7x-2x) \cdot \sin 5x$$

$$\sin(7x-2x) \cdot \sin(2x+2x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$(\sin 7x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 7x) \cdot (\sin 2x \cdot \cos 2x + \cos 2x \cdot \sin 2x) -$$

$$- \sin^2 2x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \sin^2 7x \cdot \cos^2 2x - \sin^2 2x \cdot \cos^2 7x - \sin^2 2x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \sin^2 2x \cdot (1 - \sin^2 2x) - \sin^2 2x \cdot (1 - \sin^2 7x) - \sin^2 2x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \sin^2 2x - \sin^2 2x \sin^2 7x - \sin^2 2x + \sin^2 2x \sin^2 7x - \sin^2 2x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \sin^2 7x - \sin^2 2x - \sin^2 2x - \cos^2 x - 3 = -\sin^2 2x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= -4 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x - 3 = -(\cos^2 x (4 \sin^2 x + 1) - 3)$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{x+3} - x(x+5) \geq 1$$

$$\sqrt{x+3} - x \geq x+5$$

$$\sqrt{x+3} - x \geq x+5$$

$$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$$

$$x+3 \geq 4x^2 + 20x + 25$$

$$4x^2 + 15x + 22 \geq 0$$

$$D = 961 - 352 = 9$$

$$x_1 = \frac{-15+3}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{-15-3}{8} = -2\frac{3}{4}$$

$$4(x+2)(x+\frac{11}{4}) \geq 0$$

$$(x+2)(x+\frac{11}{4}) \geq 0$$



$$x \in [-3; -\frac{11}{4}]$$

~~x=16~~

~~$$\sin^2 5x - \sin^2 3x - \sin^2 7x - \cos^2 x = 32$$~~

$$y = x^2 \dots y = 169 \quad y \geq 64$$

$$y = a$$

$$x^2 = 169 \quad x = \pm 13$$

$$x^2 = 64 \quad x = \pm 8$$

