# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 14-С20

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 9.

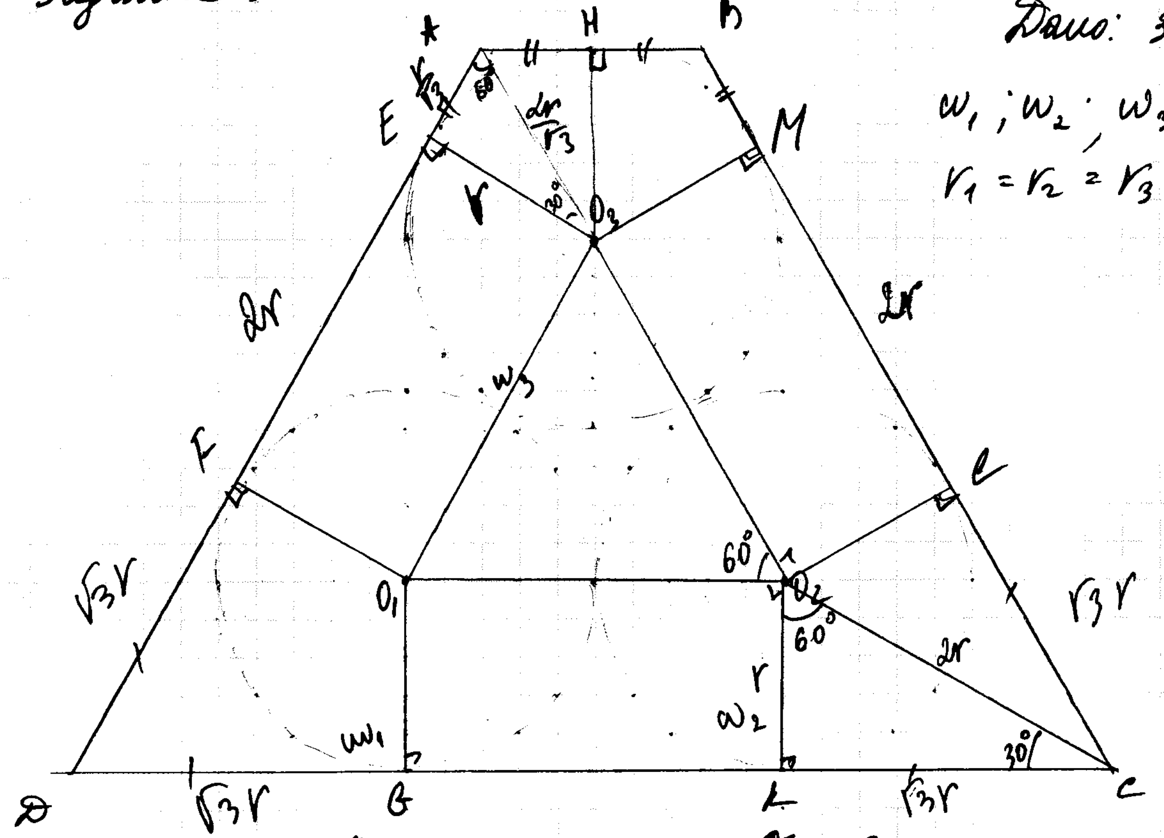
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка [1; 35], [36; 70], [71; 105], [106; 140], [141; 175]. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 4

Дано: 3 окружности $\omega_1; \omega_2; \omega_3$.

$r_1 = r_2 = r_3$




a) $AD + BC - AB - CD = 10$ ; $R$ - ?

Решение: 1) т.к. радиусы равны, то $O_1O_3 = O_3O_2 = O_2O_1 = 2r$

Известно, что $r$ в точке касания $\perp$ касательной $\Rightarrow$

$O_3 \perp AD$; $O_1F \perp AD$; $O_1G$ и $O_2K \perp DC$; $O_2l$ и $O_3M \perp BC$

$O_3H \perp AB$.

$O_2O_1 = GK = 2r$; $O_3O_1 = FE = 2R$; $O_3O_2 = Ml = 2R$.

2) $\triangle O_1O_2O_3$ — равносторонний. все углы по $60°$.

Рассмотрим $\triangle KO_2C$; $O_2K = R$; $\angle lO_2C = \frac{360° - 90° - 90°}{2} = 60°$

координаты $\angle KCO_2 = 30°$ и $KC = \sqrt{3}R$.

По теореме о касательных к окружности:

$KC = Cl = DG = GF = \sqrt{3}r$.

3) $\triangle EO_3A$; $\angle EO_3A = 30°$; $\angle EAO_3 = 60°$; $O_3E = r$

тогда $EA = AH = HB = BM = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

Подставляя полученные значения в данное уравнение получаем:

$\cancel{\sqrt{3}r} + \cancel{2r} + \cancel{\frac{r}{\sqrt{3}}} + \cancel{\sqrt{3}r} + 2r + \cancel{\frac{r}{\sqrt{3}}} + \cancel{\frac{2r}{\sqrt{3}}} + \cancel{2\sqrt{3}r} - \cancel{2r} = 10$

$2r = 10$

$r = 5$

Ответ: $r = 5$

б) $\angle AOB = \frac{360° - 90° - 90° - 60°}{2} = 60°$

Ответ: $\angle AOB = 60°$

в) $AO \cdot BO = 42$ $\qquad AB - ?$

$\frac{2r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{3}} = 42$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-C20

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+x-2<0$

$+ \quad - \quad +$

$-2 \quad -1 \quad 1$

$x \in [-1; 1)$

II $x+1<0$

$x<-1$

$x \in$ ОДЗ

$x \geq -3$

$x \in [-3; -1)$

$x \in [-3; -1) \cup [-1; 1)$

$\underbrace{x \in [-3; 1)}$

(2) $2x+5>\sqrt{x+3}$

I $2x+5 \geq 0$

$x \geq -2,5$

$4x^2+20x+25>x+3$

$4x^2+19x+22>0$

$+ \quad - \quad +$

$-2 \quad -\frac{11}{4} \quad -2,5$

$\underbrace{x \in [-2,5; +\infty)}.$

II $2x+5<0$

$x<-2,5$

$x \in \varnothing$

$x \in [-2,5; 1)$

$x^2+x-2>0$

$+ \quad - \quad +$

$-2 \quad -1 \quad 1$

$\underbrace{x \in (1; +\infty)}.$

II $x+1<0$

$x<-1$

$x \in \varnothing$

(4) $2x+5<\sqrt{x+3}$

I $2x+5 \geq 0$

$x \geq -2,5$

$4x^2+19x+22<0$

$+ \quad - \quad +$

$-2 \quad -\frac{11}{4} \quad -2,5$

нет решений.

II $2x+5<0$

$x \in$ ОДЗ

$x+3 \geq 0$

$\underbrace{x \geq -3}$

$x \in (1; +\infty)$

решением этих 2х систем имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-2,5;\ 1) \\ x \in [1;\ +\infty) \end{array}\right.$$

$x \in [-2,5;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Также нам подходят те случаи:

$\sqrt{x+3} - x - 1 = 0$

$\sqrt{x+3} = x+1$

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$x+3 = x^2+2x+1$

$$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$x = 1$.

$2x+5 - \sqrt{x+3} = 0$

$2x+5 = \sqrt{x+3}$

$2x+5 \geq 0$

$x \geq -2,5$

$4x^2+20x+25 = x+3$

$$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -\frac{11}{4} \end{array}\right.$$

$x = -2$.

ОДЗ: $\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$\sqrt{x+3} \neq 1+x$

$x \geq -1$.

$x+3 \neq x^2+2x+1$

$x^2+x-2 \neq 0$

$$\left[\begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{array}\right.$$

$x \neq 1$.

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$\sqrt{x+3} > x$

$x \in [-3;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in [-2,5;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

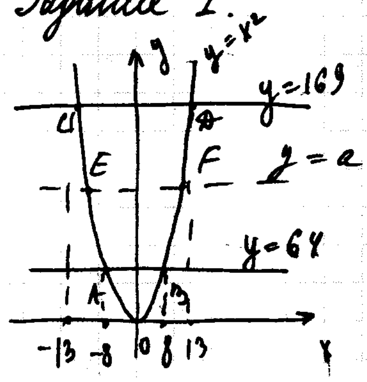
14-С20

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

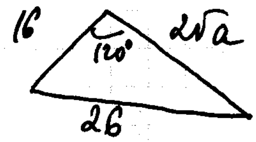
Задание 1.




Отрезок AB на прямой $y=64$ – равен 16.

Отрезок CD на прямой $y=169$ равен 26

Отрезок EF на прямой $y=a$ равен $2\sqrt{a}$, $a>0$

1) 


– в этом △ $2\sqrt{a} < 26$, тогда $a < 169$.

По теореме косинусов имеем:

$26^2 = 16^2 + 4a - 2\cdot 16\cdot 2\sqrt{a}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$4a + 32\sqrt{a} - 420 = 0$

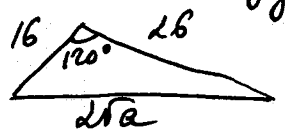
$\sqrt{a} = t,\ t \ge 0$

$t^2 + 8t - 105 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = -15 \text{ – не уд } t \ge 0 \end{array}\right.$

$\sqrt{a} = 7$

$a = 49$ – уд $a < 169$.

2) 


– в этом △ $2\sqrt{a} > 26$, тогда $a > 169$

По теореме косинусов имеем:

$4a = 26^2 + 16^2 - 2\cdot 16\cdot 26\left(-\frac{1}{2}\right)$

$a = 337$ – уд $a > 169$

Ответ: $a=49$; $a=337$.

Задание 2

$g(x) = \sin 5x\cdot\sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}(\cos(-4x) - \cos 14x) -$
$- \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 2x) - \frac{1}{2}(1 - \sin^2 7x) - \sin^2 7x -$

$-\cos^2 x - 3 = -\sin^2 2x - \cos^2 x - 3 = \cos^2 x(-4\sin^2 x - 1) - 3 =$

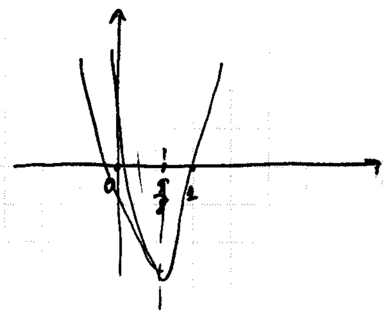
$= 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$

Пусть $\cos^2 x = t$, $t \in [0; 1]$

$f(t) = 4t^2 - 5t - 3$ – графиком функции является парабола, ее ветви направлены вверх. Минимальное значение функции достигается в вершине параболы. Максимальное значение не существует, а в моем случае либо в точке 0, либо в точке 1.

$t_0 = \frac{5}{8}$ что $\in [0; 1]$

$f(t_0) = -\frac{73}{16}$



$f(0) = -3$

$f(1) = -4$.

Ответ: $g(x)_{max} = -3$; $g(x)_{min} = -\frac{73}{16}$

Задание 5

$\log_{\sqrt{x+3} - x}(x+5) \geq 1$.

По методу рационализации:

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x + 5 - \sqrt{x+3} + x) \geq 0$

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(2x + 5 - \sqrt{x+3}) \geq 0$

$\begin{cases} \sqrt{x+3} > x+1 & (1) \\ 2x+5 > \sqrt{x+3} & (2) \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x+3} < x+1 & (3) \\ 2x+5 < \sqrt{x+3} & (4) \end{cases}$

(1) $\sqrt{x+3} > x+1$

I $x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$x+3 > x^2+2x+1$

(3) $\sqrt{x+3} < x+1$

I $x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$x+3 < x^2 + 2x + 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14 020

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

По методу рационализации

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(2x+5-\sqrt{x+3}) \geq 0$

$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x-1 \geq 0 \; ① \\ 2x+5-\sqrt{x+3} \geq 0 \; ② \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x+3} < x+1 \; ③ \\ \sqrt{x+3} < 2x+5 \; ④ \end{cases}$

① $\sqrt{3x} \geq x+1$

I $x+1 \geq 0$ $(x \geq -1)$

$3+x \geq x^2+2x+1$

$x^2+x-2 \leq 0$

$D = 1-4(-2) = 9$

$x_1 = -\frac{1-3}{2} = -2$

$x_2 = 1$

$+ \quad - \quad +$

② ①

$x \in [-1; 1]$. $(x \in [-3; 1])$.

II $x+1<0$

$x<-1$

$x+3 \geq 0$

$3+x \geq 0$

$x \geq -3$

$x \in [-3; -1)$

② $2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

I $2x+5 \geq 0$

$2x \geq -5$

$x \geq -2.5$

$4x^2+20x+25 \geq x+3$

$4x^2+19x+22 > 0$

$D = 19^2-4 \cdot 22 \cdot 4 = 9 = 5^2$

$x_1 = \frac{-19-3}{8} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$

$x_2 = \frac{-19+3}{8} = -\frac{16}{8} = -2$

$+ \quad - \quad +$

$-2 \quad -\frac{11}{4}(-2.75)$ $x \in [-2.5; +\infty)$

II $2x+5<0$

$x<-2.5$

$\varnothing$

③ I $x+1 \geq 0$

$x \geq -1$.

$x+3 < x^2+2x+1$

$x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

$x \in (1; +\infty)$

II $x+1<0$

$\varnothing$

$x<0$

$x \in \mathbb{R}$

④ $2x+5 \geq 0$

$x \geq -2.5$

$x+3 > 4x^2+20x+25$

$14x^2+19x+22<0$

$x \in (-2; -\frac{11}{4})$.

нет реш

$2x+5 \neq 0$

$\varnothing$.

$x+x^2$

$x+2 \neq x^2+2x+1$

$\sqrt{x+3}-x \neq 1$

$\sqrt{x+3} \neq 1+x$

$+\frac{22}{16}$

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$.

$\frac{19}{\times 19}$ $361-4 \cdot 22 \cdot 4 =$

$361-352$

~~$\cdots$~~

$-3 \quad 1$

$x \in (1; +\infty)$.

$\sqrt{x+3}-x>0$

$\sqrt{x+3}>x$, $x>0$

$x+3>x^2$

$x^2-x-3<0$

$D = 1+4 \cdot 3 = 13$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad 0 \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\sqrt{x+3}$

$\sqrt{x+3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$\sqrt{x+3} \neq 1+x$

$1+x \geq 0$

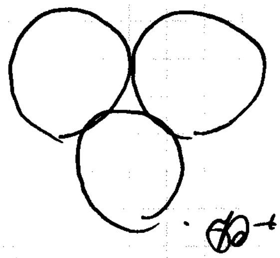
$x \geq -1.$

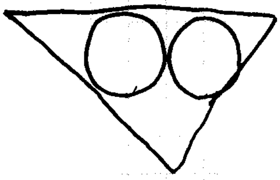
$x+3 \neq x^2+2x+1$

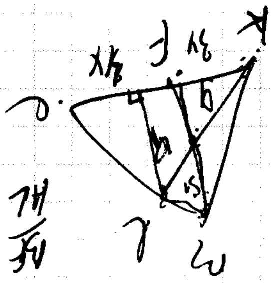
$x^2+x-2 \neq 0$

$x \neq -2$

$x \neq 1.$

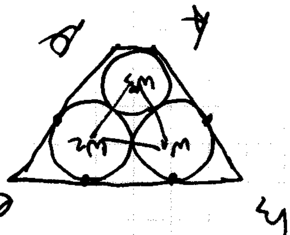


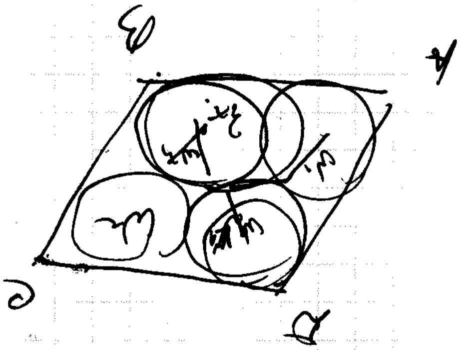


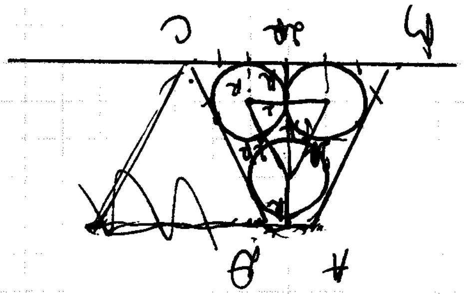


$\frac{BF}{AL} =$

$AD+BC = 10+AB+CD.$







$h = 2R+\sqrt{3}R = (2+\sqrt{3})R.$

$AD+BC = 10+2AB.$

$AD+BC-2AB=10.$

$AD+BC-AB-CD=10$

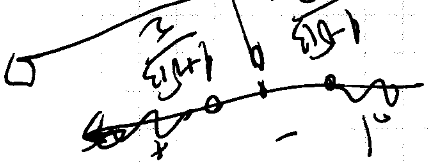
$2\ x \geq 0$

$x+3 > x^2$

$x^2-x-3>0$

$D = 1-4\cdot(-3) = 1+12 = 13$

$x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$



$x \in \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

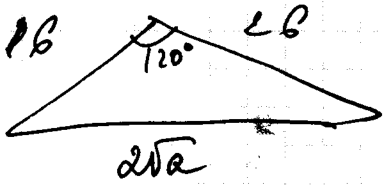
$x < 0$

$x \in R.$

$x+3 \geq 0$

$x \geq -3.$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

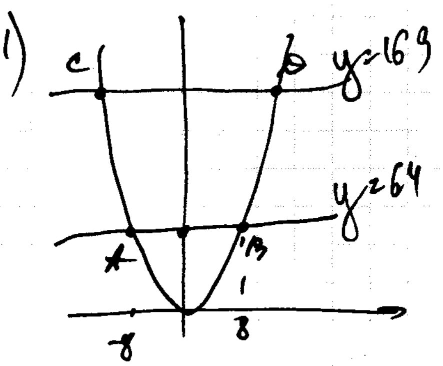



$4a = 16^2 + 26^2 + 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \frac{1}{2}$

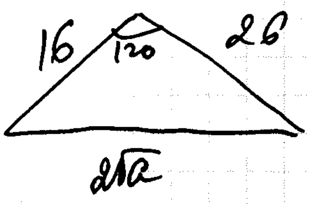
$4a = 256 + 676 + 416$

$4a = 1348$

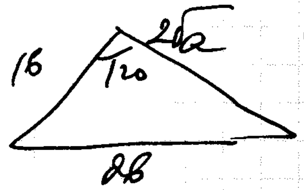
$a =$




1) $y = x^2$ Отрезок AB на прямой $y = 64$ равен 16.
CD на прямой $y = 169$ равен 26.
Угол в ~~...~~ должен быть равен 120°. ~~...~~ есть 2 варианта расположения $y = a$




тогда $2\sqrt{a} > 26$
$\sqrt{a} > 13$
$a > 169$




тогда $2\sqrt{a} < 26$
$\sqrt{a} < 13$
$a < 169$.

$4a = 676 + 256 + 416$

$4a = 1348$

$a = 337$

$1348 : 4 = 337$

$16 \cdot 13 = 48 + 64 \cdot ... = 112$

$f'(t) = 4t^2 - 8t - 3$

$f'(t) = 8t - 8$

$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 64 + 16 \cdot 3 =$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g'(x) = \sin 5x' \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot \sin 9x' - (\sin^2 7x)' - (\cos^2 x)' - 3' =$

$= 5\cos 5x \cdot \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x - 2 \cdot \cos 7x \cdot 7 + 2\sin x =$

$= 5\cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x - 14\cos 7x + 2\sin x.$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \overset{(1-\sin^2 x)}{\cos^2 x} - 3 =$

$= \sin^2 x - 4 - \sin^2 7x + \sin 5x \cdot \sin 9x =$

$= \sin^2 x - 4 - \sin^2 7x + \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x =$

$\cancel{\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2}(\cos(-4x) - \cos(14x))}$

$\cos 4x =$

$\frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 2x) = \frac{1}{2} - \sin^2 2x \quad \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 7x) =$

$= \frac{1}{2} - \sin^2 7x$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 14x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$= \cancel{\frac{1}{2}} - \sin^2 2x - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\sin^2 7x} - \cancel{\sin^2 7x} - \cos^2 x - 3 =$

$= \underbrace{-\sin^2 2x - \cos^2 x - 3}\ = -(2\sin x \cos x)^2 - 4\cos^2 x - 3 =$

$= -4\sin^2 x \cos^2 x - 4\cos^2 x - 3 = -4\cos^2 x(\sin^2 x + 1) - 3 =$

$= -4\cos^2 x(1 - \cos^2 x + 1) - 3 = -4\cos^2 x(2 - \cos^2 x) - 3 =$

$g(x) = -8\cos^2 x + 4\cos^4 x - 3 \qquad \cos^2 x = t,\ t \in [0;1].$

$g(x) = 4\cos^4 x - 8\cos^2 x - 3$

$f(t) = 4t^2 - 8t - 3.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f'(t)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-C2C

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}(\cos(-4x) - \cos 14x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 2x) - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 7x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \cancel{\frac{1}{2}} - \sin^2 2x - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\sin^2 7x} \cancel{-\sin^2 7x} - \cos^2 x - 3 =$

$-\sin^2 2x - \cos^2 x - 3 = -4\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x - 3 =$

$= \cos^2 x(-4\sin^2 x - 1) - 3 = \cos^2 x(-4(1 - \cos^2 x) - 1) - 3 =$

$= \cos^2 x(-4 + 4\cos^2 x - 1) - 3 = \cos^2 x(4\cos^2 x - 5) - 3 =$

$= 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$

$\cos^2 x = t, \ t \in [0; 1]$

$y(t) = 4t^2 - 5t - 3$ — парабола

$D = 25 - 4 \cdot 4(-3) = 25 + 16 \cdot 3 = 25 + 48 = 73$

$t_1 = \underline{5 - \sqrt{73}}$ ветви ↑ min значение в точке $y_0$.

max знач $+\infty$.

$x_0 = \frac{5}{8}$

$y_0 = 4 \cdot \frac{25}{64} - 5 \cdot \frac{5}{8} - 3 = \frac{25}{16} - \frac{25}{8} - 3 = \frac{25}{16} - \frac{50}{16} - 3 =$

$= -\frac{25}{16} - 3 = -\frac{25}{16} -$

$\frac{91}{16}$

$= \frac{91}{...} = 3 - \frac{91}{56} = 3 - \frac{91}{56} - \frac{91}{56}$

$= 3 - \frac{8}{56} - \frac{91}{56}$

$x^2 + 2x + 1 - x - 3 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

5) $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1.$

ОДЗ:

$x+3 \geq 0$

$x \geq -3$

$\sqrt{x+3}-x > 0$

$\sqrt{x+3} > x$

$x \geq 0$ $x<0$

$x+3 > x^2$ $x \in$ ОДЗ;

$x^2-x-3 > 0$

$D = 1-4\cdot(-3) = 13$

$x_{1} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right] \cup$

$x \geq -3.$

$\sqrt{x+3}-x \neq 1$

$\sqrt{x+3} \neq 1+x$

$(x+5) > 0$

$x > -5$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$x+5 \geq 0$ $x \geq -3.$

$x \geq -5$

По методу. рац.

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(2x-\sqrt{x+3}+5) \geq 0$

$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x-1 \geq 0 & ① \\ 2x-\sqrt{x+3}+5 \geq 0 & ② \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x-2 < 0 & ③ \\ 2x-\sqrt{x+3}+5 < 0 & ④ \end{cases}$

ВКЛ ТОЧКУ

$1=0.$

① $\sqrt{x+3} \geq x+1$

I $x+1 \geq 0$ II $x+1<0$

$x+3 \geq (x+1)^2$ $x \in$ ОДЗ.

③ $\sqrt{x+3} < x+1$

I $x+1 \geq 0$ II $x+1<0$

$x+3 < (x+1)^2$ $\varnothing$

② $\sqrt{x+3} \leq 2x+5$

I $2x+5 \geq 0$ II $2x+5<0$

$x+3 \leq (2x+5)^2$ $\varnothing$

④ $\sqrt{x+3} > 2x+5$

I $2x+5 \geq 0$ II $2x+5<0$

$x+3 > (2x+5)^2$ $x \in$ ~~ОДЗ~~ $\varnothing$:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

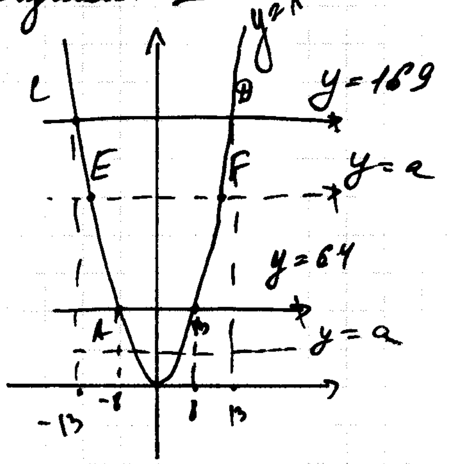
14-020

ШИФР

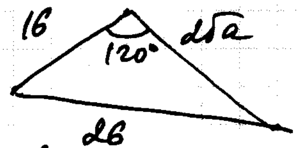
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1




Отрезок AB на прямой $y=64$ равен 16, отрезок CD на прямой равен 26. Тогда отрезок EF на прямой $y=a$ равен $2\sqrt{a}$. Есть 2 случая расположения угла $\varphi=120^\circ$ в треугольнике:

1) 


— в этом △ $2\sqrt{a} < 26$, тогда $a < 169$. По теореме косинусов имеем:

$26^2 = 16^2 + 4a - 2\cdot 16\cdot 2\sqrt{a}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$(26-16)(26+16) = 4a + 32\sqrt{a}$

$4a + 32\sqrt{a} - 420 = 0$

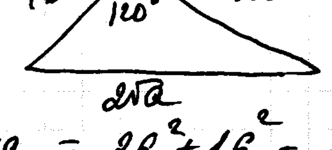
$\sqrt{a} = t,\ t \geq 0$

$t^2 + 8t - 105 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-8-22}{2} \text{ — не уд } t \geq 0 \\ t_2 = \frac{-8+22}{2} = 7. \end{array}\right.$

$\sqrt{a} = 7$

$a = 49$ — уд $a < 169$.

2) 


— в этом △ $2\sqrt{a} > 26$, тогда $a > 169$. По теореме косинусов имеем:

$4a = 26^2 + 16^2 - 2\cdot 16\cdot 26\left(-\frac{1}{2}\right)$

$4a = 1348$

$a = 337$ — уд $a > 169$. Ответ: $a=49$; $a=337$.

Задание 2.

$f(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}(\cos(-4x) - \cos 14x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x -$

$- \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 2x) - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 7x) - \sin^2 7x -$

$- \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} - \sin^2 2x - \frac{1}{2} + \sin^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= -\sin^2 2x - \cos^2 x - 3 = -(4\sin^2 x \cos^2 x) - \cos^2 x - 3 =$

$= \cos^2 x(-4\sin^2 x - 1) - 3 = \cos^2 x(-4(1 - \cos^2 x) - 1) - 3 =$

$= \cos^2 x(4\cos^2 x - 5) - 3 = 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3.$

Пусть $\cos^2 x = t$, $t \in [0;1]$

$\varphi(t) = 4t^2 - 5t - 3$ – график функции – парабола ветви параболы направлены вверх.

Наименьшее значение функции достигается в точке $y_0$. Наибольшего нет $(+\infty)$.

Рассмотрим $y = 4x^2 - 5x - 3$.

$x_0 = \frac{5}{8}$ тогда $y_0 = 4 \cdot \frac{25}{64} - 5 \cdot \frac{25}{8} - 3$

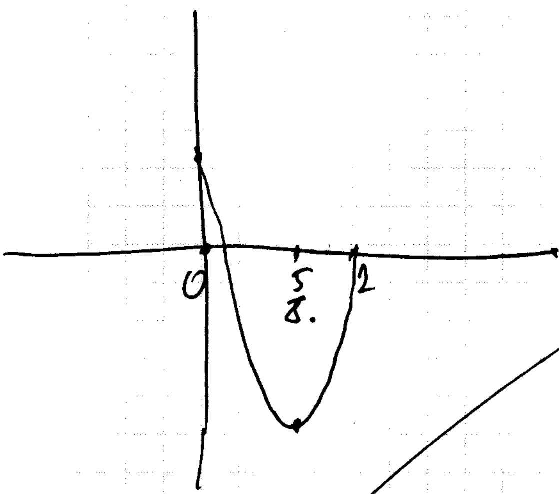
$y_0 = -\frac{73}{16}$

Ответ: $f(x)_{min} = -\frac{73}{16}$ ~~$f(x)_{max} = +\infty$~~.

$\varphi'(t) = 8t - 5$.

$-$ $\varphi(t)$

$0 \downarrow \frac{5}{8} \quad 1 \quad \varphi'(t)$.




наиб знач-во $= \varphi(0) = -3$

$f(1) = -4$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

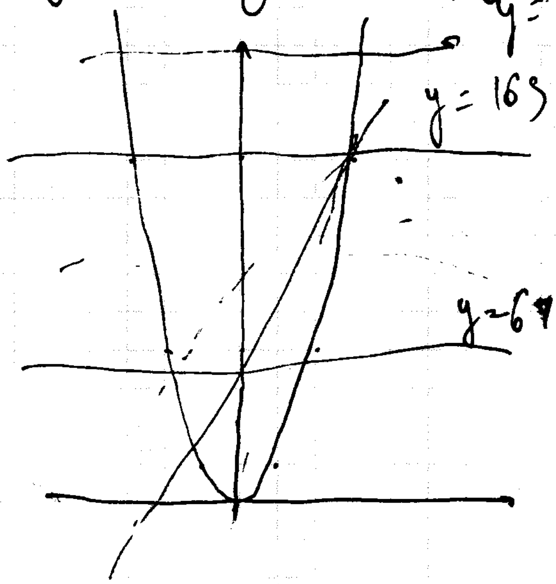
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

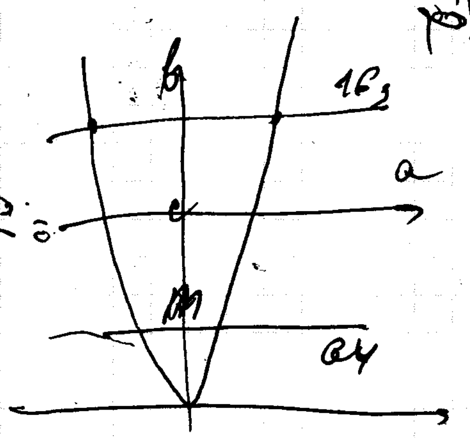
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

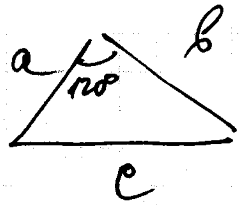
1) $y = x^2$

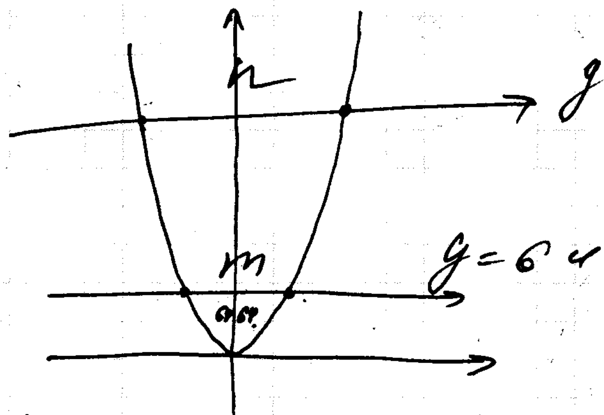
$y = 169$ $y = 64$ $y = a$ ?

a-? из отрезков можно сделать $\Delta$ с углом $120°$!




$y = 64$

$x = \pm 8$.

$y = 169$

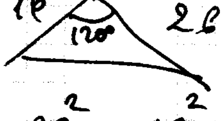
$x = \pm 13$

$d\,m$ - ?  $d\,n$ - ?

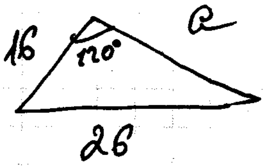
$d\,m = 16$  $d\,n = 26$

2 стороны 16, 26 и угол $120°$.

если $a \in [\cancel{1}, 26]$. то

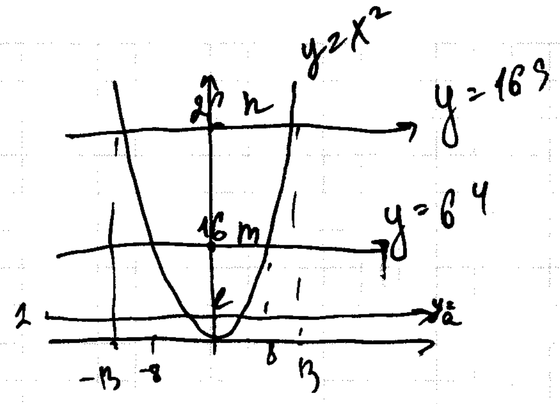



$26^2 = 16^2 + a^2$




$220 + 226 =$

$220 + 20 \cdot 6 \cdot 16 = 340 + \ldots = 352$

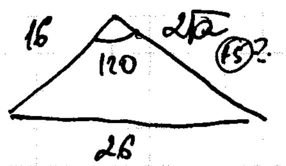


$\triangle$ со сторонами $m = 16$

$n = 26$

$\angle \varphi = 120°$.

1) $2\sqrt{a} \le 16$ $a \le 64$?



$= -\frac{1}{2}$

$2\sqrt{a} \le 26$

$\sqrt{a} \le 13$

$a \le 169$

$y = a$ $y = a$

$(d = |2\sqrt{a}|)$ $d = 2\sqrt{a}$

$26^2 = 16^2 + (2\sqrt{a})^2 - 2 \cdot 16 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \cos 120°$

$26^2 = 16^2 + 4a + 32 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2}$

$26^2 = 16^2 + 4a + 32\sqrt{a}$

$\overset{10}{(26-16)}\overset{42}{(26+16)} = 4a + 32\sqrt{a}$

$420 = 4a + 32\sqrt{a}$

$\sqrt{a} = t$, $t \ge 0$

$4t^2 + 32t - 420 = 0$ $\quad | : 4$

$t^2 + 8t - 105 = 0$

$D = 64 + 4 \cdot 105 = 64 + 420 = 484 = 22^2$

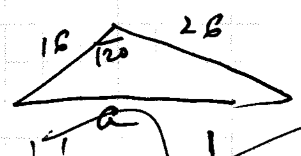
$t_1 = \frac{-8-22}{2}$ ; — не уд

$t_2 = \frac{-8+22}{2} = 7$

$\sqrt{a} = 7$

$a = 49$ ~~не уд. 26~~

$2\sqrt{a}$

2) 

$a^2 = 16^2 + 26^2 + 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \frac{1}{2}$

$a^2 = 256 + 676 + 416$

$a^2 = 1348$

$a = \pm\sqrt{1348}$

$\sqrt{a} \le 13$

$2\sqrt{a} \le 16$

$\sqrt{a} \le 8$

$a \le 64$

$-4 + 11 = 7$

$22 - 8$

$20 - 6 = 14$

$420 : 4 = 105$

$1348 : 4 = 1337$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

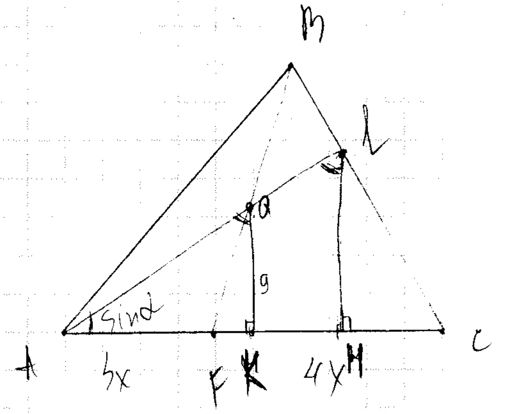
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-020

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$  $QK = 9$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAL}} = \frac{1}{16}$

$LH - ?$

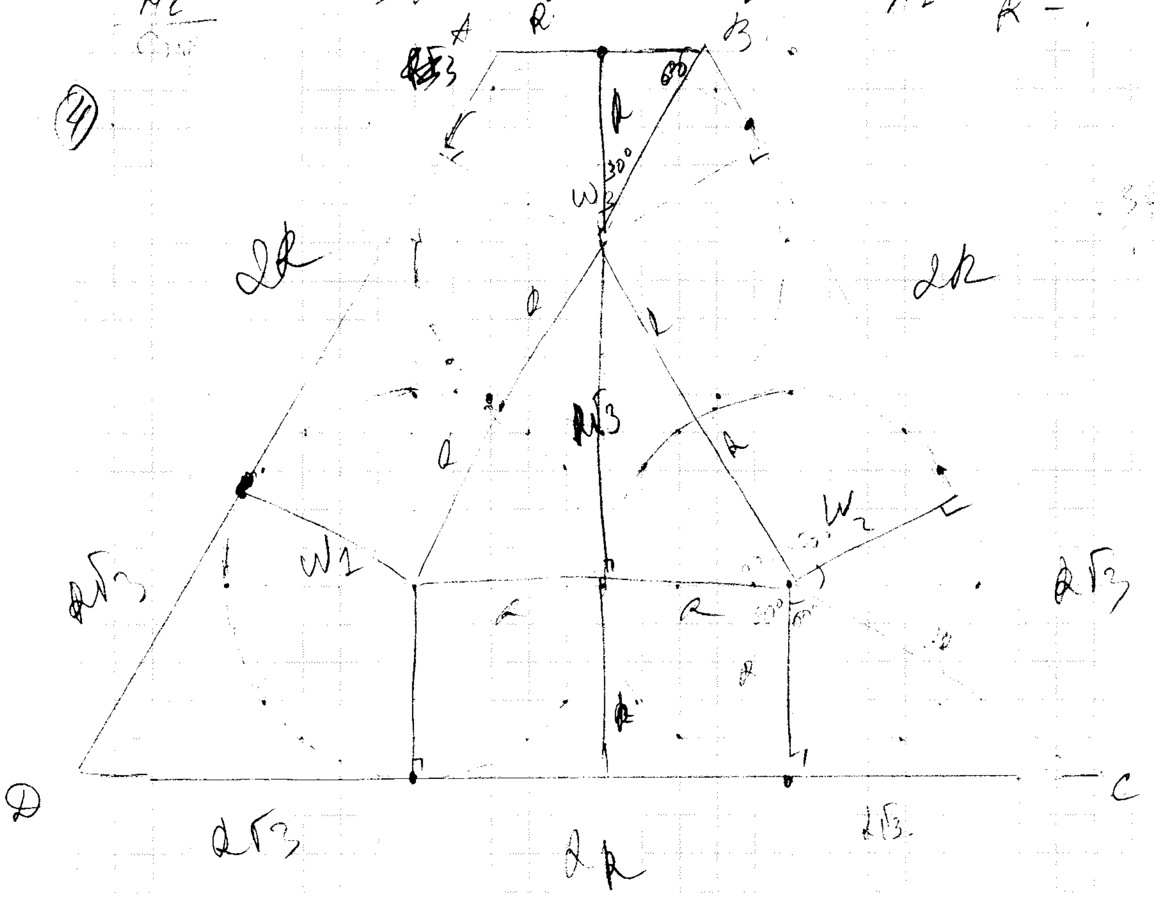
$\frac{AQ}{AL} = \frac{AK}{AH} = \frac{QK}{LH}$

$\sin\alpha = \frac{9}{AQ}$  $AQ = \frac{9}{\sin\alpha}$ ; $\sin\alpha = \frac{HL}{AL}$ ; $AL = \frac{HL}{\sin\alpha}$

$\frac{\frac{9}{\sin\alpha}}{\frac{HL}{\sin\alpha}}$  $\frac{9}{\sin\alpha}$  $= \frac{9}{HL} = \frac{AQ}{AL}$

$R - ?$  $AD + BC - AB - 20 = 10$

(4)




$\frac{2r}{\sqrt3} = 42.$

$\frac{2r}{\sqrt3} = 21$

$r = \frac{21\sqrt3}{2}$

180
30
40

$90° + 60° = 60$

$150° - 60°$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

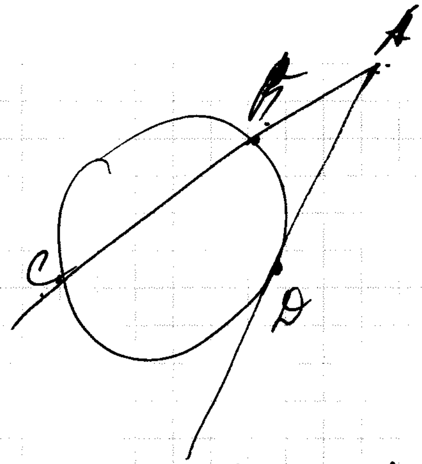
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$Aj \cdot AO = AB^2.$

A

$Aj \cdot \cancel{2}AO = AH^2$

$\frac{2r}{\sqrt{3}}$




$AB \cdot AC = AD^2.$

$\cancel{2\sqrt{3}}$ $\frac{2r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{3}} = 42.$

$\frac{4r^2}{3} = 42$

$\times \frac{42}{3}$
$126 \,|\, 4$
$-12 \quad 31,5$
$\;\; 6$
$-4$
$\;\; 2$

$4r^2 = 126$

$r^2 = 31,5$

$r = \sqrt{31,5}$

$\frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{42\sqrt{3}}{2r}$

42.

$\frac{2r}{\sqrt{3}} = 21$

10

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)