МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 15-019

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-019
ШИФР
(заполняется секретарём)

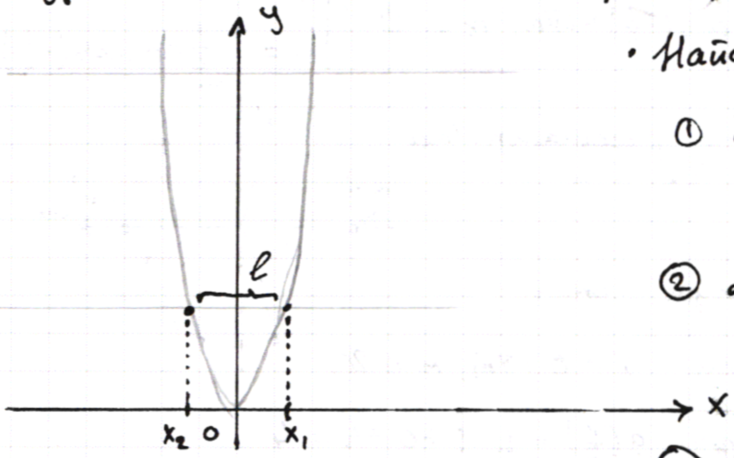
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

Парабола $y=2x^2$ пересекает прямые $y=98$, $y=18$ и $y=a$;

Отрезок будет заключен между ветвями параболы:

• причем, составляя треугольник, напротив угла в $\alpha=120°$ будет лежать большая сторона;



• Найдём точки пересечения:

① $2x^2=18$, $x_{1;2}=\pm 3$

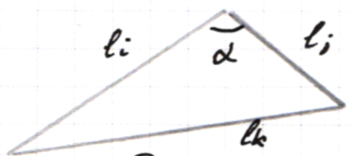
$\rightarrow$ $l_1=|x_1-x_2|=6$;

② $2x^2=98$, $x_{3;4}=\pm 7$

$l_2=|x_3-x_4|=14$;

③ $2x^2=a$, $x_{5;6}=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

$l_3=|x_5-x_6|=\sqrt{2a}$;



◦ Существует два случая:

$l_2=14$ – большая сторона и $l_3=\sqrt{2a}$ – большая сторона;

• Если $l_3>l_2$, то тогда по теореме косинусов:

$$2a=(14)^2+(6)^2-2\cdot 6\cdot 14\cdot\cos(120°)=196+36+84=316$$

$$\rightarrow a=158.$$

• Если $l_2>l_3$, то тогда по теореме косинусов:

$196=2a+36+\sqrt{2a}\cdot 6$, пусть $\sqrt{2a}=t$, $t>0$, тогда:

$t^2+6t-160=0$, $D_1=169=13^2$, $t_1=\frac{-3+13}{1}=10$, $t_2=-16$ (не удовл. усл $t>0$)

$\sqrt{2a}=10 \rightarrow a=50$

Ответ: $a=50$, $a=158$

Задача №2.

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2(5x) + 4$

Для того, чтобы найти минимум и максимум, найдём промежутки монотонности функции и экстремумы:

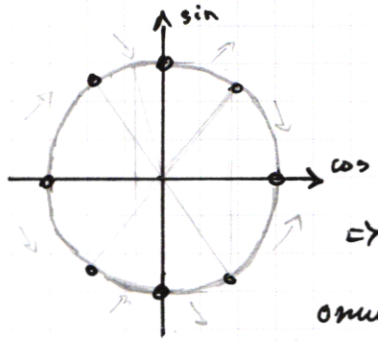
1. $g'(x) = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\sin x \cos x - 2\cos(5x)\sin(5x)\cdot 5 =$

$= \frac{3}{2}(\sin 10x + \sin 4x) + \frac{7}{2}(\sin 10x - \sin 4x) - \sin(2x) - 5\sin(10x) =$

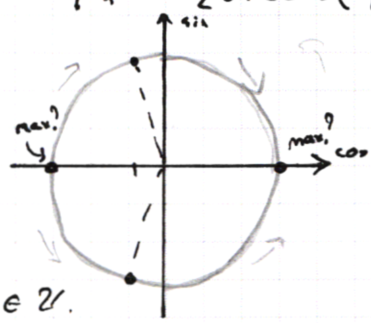
$= 5\sin 10x - 5\sin 10x + \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right)\sin 4x - \sin 2x =$

$= -2\sin 4x - \sin 2x = -4\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = -\sin 2x(4\cos 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -1/4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm\arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4}) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$



Если не рассматривать углы 2x →



$\Rightarrow$ максимум стоит ожидать при $x = 0 + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

$g(0) = 0 - 0 + 1 + 4 = 5$ *при $g(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 + 0 + 4 = 4$.

2.

Ответ: $g_{max} = 5$; $g_{min} =$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1.$ ОДЗ: $\begin{cases} x>-4, \ x>-7 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1, \ x \neq 2 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \end{cases}$

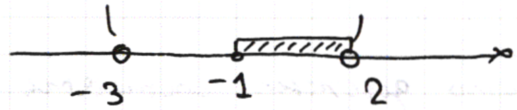
1. Рассмотрим два случая;

когда $\sqrt{x+7}-x>1$ и $0<\sqrt{x+7}-x<1$;

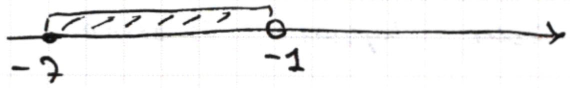
• Если $\sqrt{x+7}-x>1$, то тогда $x+4 \geqslant \sqrt{x+7}-x$

$\sqrt{x+7}>x+1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7>x^2+2x+1, \ x^2+x-6<0, \text{ по теореме Виетта: } x_1=2, \ x_2=-3 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7 \geqslant 0 \\ x+1<0 \end{cases} \end{array}\right.$

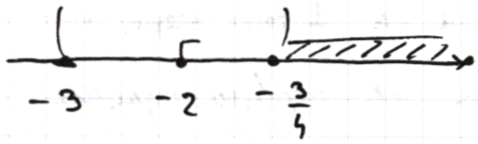


$x \in [-7;2)$



$\rightarrow \sqrt{x+7} \leq 2x+4 \iff \begin{cases} x+7 \leq 4x^2+16x+16, \ 4x^2+15x+9 \geqslant 0 \\ 2(x+2) \geqslant 0 \quad x \geqslant -2 \end{cases}$

$\rightarrow D = 225-144 = 81 = 9^2, \ x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}, \ x_2 = -3$



$\Rightarrow x \in [-\frac{3}{4}; 2).$

• Если $0<\sqrt{x+7}-x<1$, то тогда: $\sqrt{x+7}>x$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7>x^2, \ x^2-x-7<0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x+7 \geqslant 0 \end{cases} x \in [-7;0) \end{array}\right.$

$D = 29, \ x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2} \quad x \in [0; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$\Rightarrow x \in [-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}).$

и $\sqrt{x+7}<x+1$, $\begin{cases} x+7<x^2+2x+1 \\ x+1>0 \end{cases}$, $x^2+x-6>0$, $x>-1 \rightarrow$ ~~...~~ $x \in (2;+\infty)$

$\Rightarrow x \in (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}).$

Задача №5.

... тогда при $x \in (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$ $x+4 \le \sqrt{x+7} - x$

$\sqrt{x+7} \geq 2x+4 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 \geq 4x^2+16x+16 \\ x+2 \geq 0, \; x \geq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 \leq 0, \text{ однако } x \in (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

$\begin{cases} 4x^2+15x+9 \leq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \to x \in [-2; \frac{-3}{4}]$

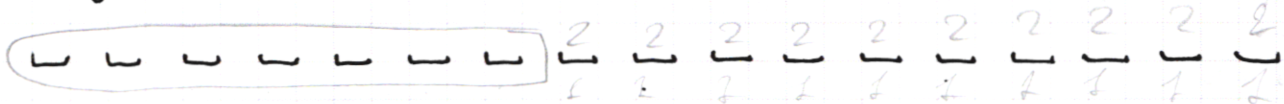
$D = 9^2$, $x_{1;2} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ -3/4 \end{array} \right.$

Однако $x \in (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \Rightarrow$ пересечений нет

и $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

Ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$.

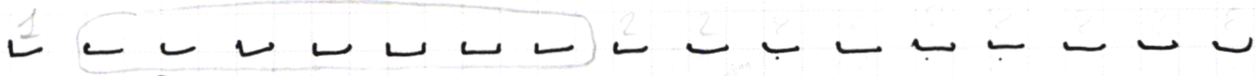
Задача № 3.



Наше 17-ти значное число должно состоять из "0", "7" и "8", причем цифр "8" ровно семь, идущих вместе;

Так как на первом месте не может стоять 0, то рассмотрим, сколько способов, если число начинается с 8: $N_1 = 1 \cdot 2^{10} - 1$, ведь на 9 оставшихся позиций мы можем выбрать любое из двух чисел, а на 1 тогда метод дополн.

• Если же 8 – не первая цифра, то тогда на первую позицию один способ поставить цифру: 7, тогда



$N_2 = C_{16}^{7} \cdot (\cdot 2^9 - 1)$

тогда всего способов: $N = 2^{10} - 1 + C_{16}^{7}(2^9 - 1) = 5\,846\,863$ (посчитал в столбик на черновике)

Ответ: $N = C_{16}^{7}(2^9 - 1) + 2^{10} - 1 = 5\,846\,863$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 7.

по 6 целых чисел $\mathbb{Z}$ из $[1;45]$, $[46;90]$, $[91,135]$, $[136,180]$, $[181;225]$. нам нужно выбрать такие числа, что никакая разность $a_n - a_k \vdots 45$, $45 = 3^2 \cdot 5 \Rightarrow$ она одновременно не заканчивается на 5 и 0, когда $a_n - a_k \geq 45$ и сумма цифр результата разности не делится на 9;

• Из каждого множества стоит выбирать наименьшие числа, причем каждое последующее множество "сильнее" влияет на результирующую сумму;

Если $\forall_i : \begin{cases} n \in i \\ k \in i \end{cases} \Rightarrow a_n - a_k \vdots 2$, то такая сумма точно подойдет. Если из 1-го множества брать 1, 3, 5, 7, 9, 11, а из второго также 46, 48 ..., то такой набор не подойдет

$\Rightarrow$ Желательно следить за четностью/нечетностью;

Среди такого множества нечетных чисел всегда найдётся такое, что оно $\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 9)$ и $\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$

тогда, выбирая из каждого множества минимальные четные 6 цифр: $S_{an} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$, $S_1 = \frac{4+2\cdot5}{2} \cdot 6$, $S_2 = \frac{46\cdot2+2\cdot5}{2}\cdot 6$

$$\sum_{min} = \frac{4+5\cdot2}{2}\cdot6 + \frac{92+10}{2}\cdot6 + \frac{184+10}{2}\cdot6 + \frac{136\cdot2+10}{2}\cdot6 + \frac{182\cdot2+10}{2}\cdot6 =$$

$$= 6(2+5\cdot5+46+92+136+182) = 6(25+48+\underbrace{136+274}_{410}) = 6(25+458) =$$

$$= 6\cdot484 = 2904.$$

Ответ: $\sum_{min} = 2904$.

Задача №4.

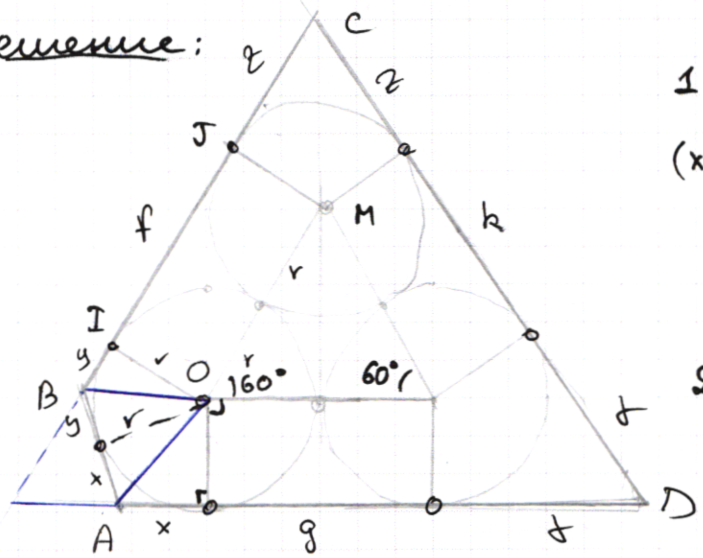
Дано: $ABCD$; Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$: $R_1 = R_2 = R_3 = r$;

Найти: а) r, если $AD+BC-AB-CD=12$

б) $\angle AOB$

в) $AB = ?$, если $AO \cdot BO = 58$.

Решение:



1. Из первого условия:

$(x+g+t)+(y+z+f)-(x+y)-$

$-(z+t+k)=12$

$\Rightarrow f+g-k=12$;

2. Т.к. $OI \perp BC$ и $MJ \perp BC$, $OM \perp OI$, то $f = 2r$, аналогично $k = g = 2r \Rightarrow r = 6$.

3. Так как окружности попарно касаются, то, соединяя центры, мы получим равносторонний Δ со стороной $2r$;

$\angle AOB = 60°$ из симметрии фигуры (достроив до пересеч)

4. AB из Th. косинусов при $\angle AOB = 60°$ xy

$AB^2 = \underline{BO^2 + AO^2} - 2 \cdot 58 \cdot \frac{1}{2}$ ($AO^2 + BO^2$ ч/з x и y)

Ответ: 1) $r = 6$, $\angle AOB = 60°$ (равносторонний усечено),

Задача №6.

$S_{FQLC} = \frac{25}{84} S_0$, где $S_0 = S_{ABC}$ (черновик)

Решается 2/3 ~~Ответ: ...~~ подобие

Задача №7.

$$[1;45],\ [46;90],\ [91;135],[136,180]\ [181;225]$$

$\vdots 45$ Найти: $\min\{\Sigma\}$

$45=3^2\cdot 5$ → разности может быть точно четна и … так как сумма должна быть минимальна, то стоит брать наименьшие значения из каждого промежутка

2, 4, 6, 8, 10, ~~12~~ ①

46, 48, 50, 52, 54 ②

92, 94, 96, 98, 100 ③

136, 138, 140, 142, 144 ④

182, 184, 186, 188, 190 ⑤

$$a_n-a_k\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,45)$$

разность не делится на (5 и 9) → Σ цифр разн $\neq 9$; число $N\geq 5$ не оканчивается на 5 и 0.

$$S_{Ан.}=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$$

$$\Sigma=\frac{\boxed{4}+5\cdot 2}{2}\boxed{6}+\frac{46+5\cdot 2}{2}6+\frac{92+5\cdot 2}{2}\cdot 6+\frac{136+2\cdot 5}{2}6+\frac{\boxed{182}+2\cdot 5}{2}\cdot 6=$$

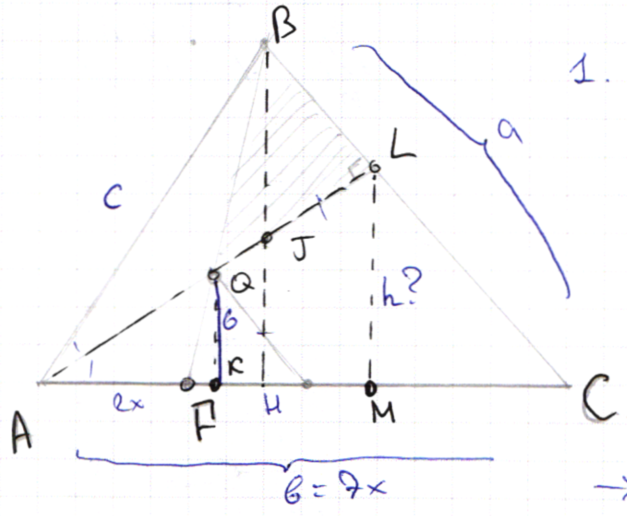
$$=3(50+50+\underbrace{92+182}_{274}+136)=3(100+410)=\underline{1530}-A_0(\Sigma)$$

1, 3, 5, 7, 9   2, 4, 6, 8, 10, 12 ← если начать с нечетных, то

46, 48   46, 48, 50, 52, 54, 56. не выйдет / придется

92, 93   следующие повышать.

Задача №6.



Решение:

1. ~~Найдём~~:
$$\begin{cases} S_{ABC}=\frac{1}{2}BH\cdot AC=S_0 \\ S_{ABC}=S_{ABF}+S_{FBC} \\ S_{ABF}=\frac{2}{7}AC\cdot\frac{1}{2}BH=\boxed{\frac{2}{7}S_{ABC}} \\ S_{FBC}=\frac{5}{7}AC\cdot\frac{1}{2}BH=\boxed{\frac{5}{7}S_{ABC}} \end{cases}$$

2. $S_{BFC}=\underbrace{S_{BQL}}_{\frac{5}{12}S_{ABC}}+S_{FQLC}$

$$\rightarrow \boxed{S_{FQLC}=\left(\frac{5}{7}-\frac{5}{12}\right)S_0=\frac{25}{84}S_0}$$

3. $S_{FQLC}=\frac{1}{2}FR\cdot \overset{6}{QR}+\frac{1}{2}h\cdot MC+\frac{1}{2}\frac{\sigma H+h}{2}HM$

$$\begin{array}{r} \times 484 \\ 6 \\ \hline 2904 \end{array}$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.

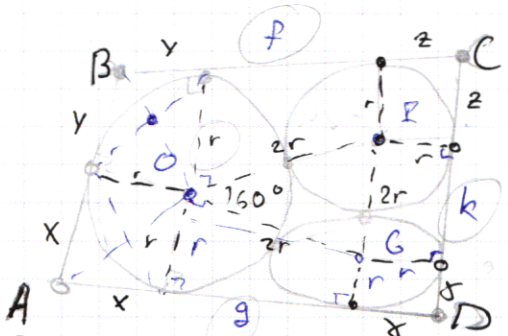
Дано: $ABCD$ и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, $R_i = r$. $\omega_1 \to AB$ и DC $\omega_3 \to CB, BA, AD$

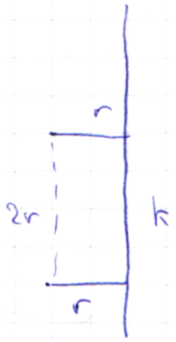
$\omega_2 \to DC$ и CB

1) $AD + BC - AB - CD = 12 \mid r?$

2) $\angle AOB$? : $O \in \omega_3$ 120°? :) 90°?

3) $AO \cdot BO = 58$, AB?





Решение:

1. Если $AB + CD \neq AD + BC$, то в 4-угольник нельзя вписать окружность, однако проведем для каждой окружность до точки касания радиус;

2. Введем обозначения: $x + y = AB$, $CD = \gamma + z + k$ и т.д., тогда:

$$(\cancel{x} + \cancel{\gamma} + g) + (\cancel{y} + \cancel{z} + f) - (\cancel{x} + \cancel{y}) - (\cancel{z} + \cancel{\gamma} + k)$$

$$\to \boxed{f + g - k = 12}, \; k = 2r? \text{ да! нет!} \to \boxed{\cancel{r = 6}} \; r = 6.$$

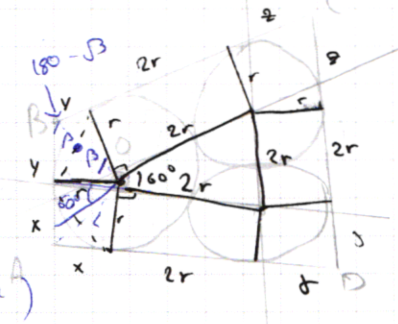
3. Мы имеем 3 прямые трапеции... или...

Все же $r = 6$, но что-то идет не так.

$$f = g = k = 12.$$

$$AO - \sqrt{r^2 + x^2}, \; BO = \sqrt{r^2 + y^2}$$

~~AO^2~~



$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2r^2 - 2\overbrace{\sqrt{(r^2+y^2)(r^2+x^2)}}^{58}\cos(\alpha)$$

$$xy = r^2 - \cos(\alpha) \cdot \sqrt{r^4 + r^2(x^2+y^2) + (xy)^2}$$

$$\begin{cases} P^2 = 2y^2 + 2y^2\cos\beta \\ P^2 = 2r^2 \pm 2r^2\cos\beta \end{cases} \qquad 2P^2 = 2y^2 + 2r^2 + 2\cos\beta(y^2 - r^2)$$

I. $\alpha = 90^\circ$, тогда: $\boxed{xy = 36}$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot 36$$

$$AB^2 = AB^2 - 2xy + 2 \cdot 36.$$

$$58 = \sqrt{r^4 + r^2(x^2+y^2) + (xy)^2}$$

$$58 = \sqrt{2r^4 + r^2(x^2+y^2)} = r\sqrt{2r^2 + AB^2 - \underset{r^2}{2xy}} \to 58 = rAB \to \boxed{AB = \frac{58}{6}} = \frac{29}{3} \; (I)$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Задача №3 (комбинаторика)

$\overset{1}{\sqcup} | \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \overset{2}{\sqcup} \overset{2}{\sqcup} \overset{2}{\sqcup} \overset{2}{\sqcup} \overset{2}{\sqcup} \overset{2}{\sqcup} \overset{2}{\sqcup} \overset{2}{\sqcup} \overset{2}{\sqcup} \overset{1}{\sqcup}$

: Только "0", "7" и "8" (каждая хотя бы 1 раз)

причем "8" ровно 7 штук подряд.

Зафиксировать 7 позиций: $\cancel{C_{17}^{7} \cdot (2)^{9}}$

* ~~Если~~ на первую позицию мы не можем поставить 0!

Как решим вопрос? Зафиксировав 8-ки на первых 7:

$N = 1 \cdot (2)^9 + C_{16}^{7} \cdot (2)^8 = 2^8 (C_{16}^{7} + 2)$

$C_{16}^{7} = \frac{16!}{9! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 5 \cdot 16 \cdot 13 \cdot 11 = 80 \cdot 143$

$143 \times 8 = 11440$

$N = 11442 \cdot 256 = 2929152.$

11440×511: $11440 + 57200 = 5845840$

11442×256: $68652 + 57210 + 22884 = 2929152$

$1024 - 1 = 1023$

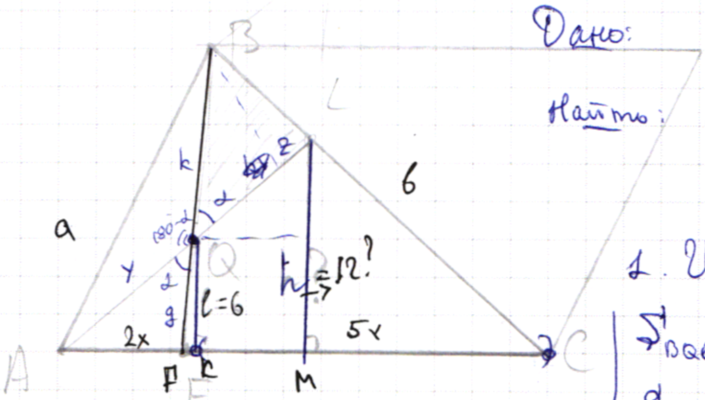
$5845840 + 1023 = 5846863$

$C_{16}^{7} = 11440 \cdot 511 = 5846863$

$N =$

Ответ: $N = 2^8 (C_{16}^{7} + 2) = 2\,929\,152$.

Задача №6 (Планиметрия)



Дано: $\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$; $\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$; $QR = 6$

Найти: $h = LM$? $[AR : AM?]$ $[AQ : AL]$

Решение:

1. Из подобия (отношение площадей)

$S_{BQL} = \frac{1}{2} kz \sin\alpha$ $\quad S_{LMC} = \frac{1}{2} hMC$

$S_{ABC} =$ $\quad S_{ABQ} = \frac{1}{2} yk \sin\alpha$

$S_{AQF} = \frac{1}{2} yg \sin\alpha$ $\quad S_{QRML} = \frac{l+h}{2} RM$

$S_* = \frac{1}{2} FRl$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sin(\alpha)(kz + yg + yk) + \frac{1}{2}(h\cancel{MC} + MR(l+h) + \cancel{FRl})$

$\frac{12}{5} = \frac{kz + yg + yk}{kz} + \frac{h \cdot MC + MRl + MRh + FR \cdot l}{kz}$

$\boxed{\frac{6}{5} = \frac{yg + yk}{kz} + \frac{h(MC + MR) + l(MR + FR)}{kz}}$

$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$

по подобию: $\frac{l}{h} = \frac{AR}{AM} = \frac{y}{y+z}$

$\frac{h}{l} = 1 + \frac{z}{y}, \quad \frac{z}{y} = \frac{h}{l} - 1$

$\frac{y}{kz} \frac{g+k}{kz} \Rightarrow \left[k\left(\frac{h}{l} - 1\right) \cdot \left(\frac{g}{kz} + \frac{1}{z}\right)^{-1}\right]^{-1}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 1.

$y = 2x^2$ пересекает $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$

Найти такую a: $\angle$: $\alpha = 120°$

→ длина ① отрезка: $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 98 \end{cases} \to x^2 = 49$, $x = \pm 7 \to a_1 = 14$

② отрезка: $x^2 = 9$, $x = \pm 3 \to a_2 = 6$.

③ отрезка: $x^2 = a/2 \to x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}} \to a_3 = \sqrt{2a}$

В треугольнике напротив угла $\alpha = 120°$ будет лежать большая сторона, причем $\cos(120°) = -1/2$

• по теореме косинусов: (3 раза) не 6!

$2a = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 = 196 + 36 + 84 = 120 + 196 = 316$

$\boxed{a = 158}$ I.

$196 = 2a + 36 + 6 \cdot \sqrt{2a}$, пусть $\sqrt{2a} = t$, $(\sqrt{2a})^2 = t^2$

~~$2t^2$~~ ~~t^2~~ $t^2 + 6t - 160 = 0$

$D_1 = 169 = 13^2$, $t_1 = \frac{-3+13}{\cancel{4}} = 5$, $t_2 = -8$ (нет)

$2a = 25 \to \boxed{a = 25/2}$ II.

Ответ: $a = \{\frac{25}{2}; 158\}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

Задача №5.

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \qquad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > -4 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \end{cases}$$

$x \neq 2$

1. Если $\sqrt{x+7}-x > 1$, то тогда

$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$

$\sqrt{x+7} \leq 2x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 \leq 4(x+2)^2 = 4(x^2+4x+4) \\ 2x+4 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+4 \leq 0 \\ \sqrt{x+7} = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

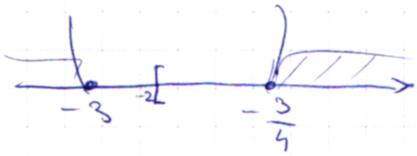
$x+7 \leq 4x^2+16x+16$

$x \geq -2$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$D = 225 - 16 \cdot 9 = 144 = 81 = 9^2$

$x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4} \qquad x_2 = -3$

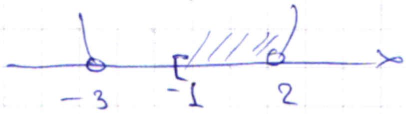


$\sqrt{x+7} > x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 > x^2+2x+1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\begin{cases} x^2+x-6 < 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$, $D = 1+24 = 5^2$

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad x_2 = -3$

$x < -1$

$x \geq -7$



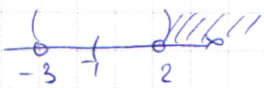
$x \in (-4; -1) \cup [-1; 2)$

$x \in (-4; 2]$

Ответ: $\rightarrow \boxed{x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right)}$ I

2. Иначе: $0 < \sqrt{x+7} - x < 1$

$\hookrightarrow \sqrt{x+7} < x+1$, $\begin{cases} x+7 < x^2+2x+1 \\ x+1 > 0 \end{cases}$, $x^2+x-6 > 0$, $x > -1$



$\sqrt{x+7} > x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} x^2-x-7 < 0 \\ x \geq 0 \\ \boxed{0 > x > -7} \end{array}$ $D = 1+28 = 29$

$x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x \in (-7; 0)$

$x \in (2; +\infty)$

$\boxed{x \in \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)}$

$4x^2+15x+9 \leq 0 \mid x \in \left[-3; -\frac{3}{4}\right]$

$x \geq -2$

$x+4 \leq \sqrt{x+7} - x$, $\sqrt{x+7} \geq 2x+4 = 2(x+2)$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 \geq 4x^2+16x+16 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\boxed{-2 \geq x \geq -7}$

$-$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2.

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = 3\cos 3x \cdot \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\sin x \cdot \cos x + 2\cos 5x \cdot (-\sin 5x) \cdot 5 =$

$= 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\sin x\cos x - 5 \cdot 2\sin 5x \cos 5x = 0$

$A_0 - \sin 2x - 5\sin 10x$

* $\sin 7 \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 10x + \sin 4x)$

** $\cos 7x \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 10x - \sin 4x)$

$\to \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right)\sin 10x + \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right)(\sin 4x) - \sin 2x - 5\sin 10x =$

$= \cancel{5\sin 10x} - \cancel{5\sin 10x} + (-2)\sin 4x - \sin 2x = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$, тогда

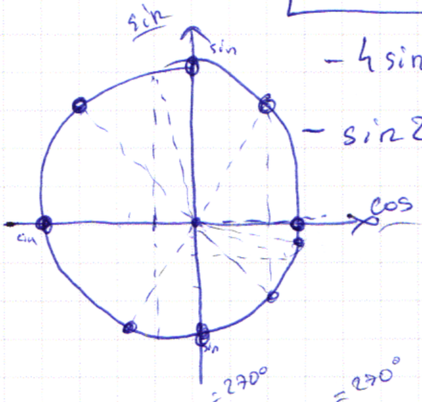
$\to \boxed{-2\sin 4x - \sin 2x = 0}$

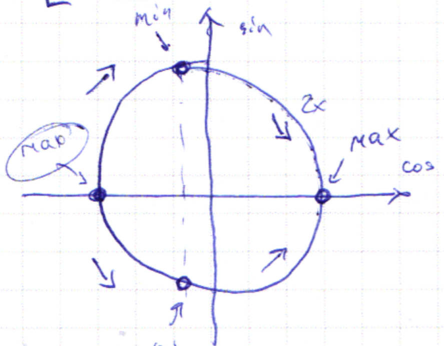
$-4\sin 2x\cos 2x - \sin 2x = 0$

$-\sin 2x\,(4\cos 2x + 1) = 0.$

$2x = \pi k,\ x = \frac{\pi k}{2}$

$\to \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \ (\cos 2x) = 1 \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$ позже;





$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 4 =$

$=270^\circ$, $=270^\circ$, $=90^\circ$, $=90^\circ$; $-1\cdot(-1) = 1$; 1

$= 4.$

$\cos(2x) = -\frac{1}{4}$

$\sin(2x) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}(\pm 1)$

$-\frac{1}{4} = 1 - 2\sin^2 x,\ +\frac{5}{8} = \sin^2 x$

$\sin x = \pm\sqrt{\frac{5}{8}}$

g(arc

$g(\pi) = 5$ (+)

$g(x) = \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos x + \sin x\cos 2x$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\cos^2 5x = (\cos 2x\cos 3x - \sin 2x \sin 3x)^2 = (\cos 2x(4\cos^3 x - 3\cos x) - \sin 2x(3\sin x - 4\sin^3 x)$

Ответ: $g_{max} = 5$, $g_{min} = ?$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)