

с углом 120° ?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

6-008

Заполняется ответственным секретарем

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{aligned}
 & (\sin 2k \cos 2k - \sin 2k \cos 2k) / (\sin 2k + \cos 2k + \sin 2k \cos 2k) - \sin^2 2k \\
 & - \cos^2 k - 3 = \sin^2 2k \cos^2 k - \sin^2 2k \cos^2 k - \sin^2 2k - \cos^2 k - 3 = \\
 & = -\sin^2 2k - \cos^2 k - 3 = \\
 & = -4\sin^2 k \cos^2 k - \cos^2 k - 3 = \\
 & (-3\sin^2 k \cos^2 k - \cos^2 k(1 + \sin^2 k) - 3) \\
 & (-\cos^2 k(4\sin^2 k + 1) - 3) \\
 & (-4\sin^2 k \cos^2 k - \cos^2 k - 3\sin^2 k - 3\cos^2 k) \\
 & (-4\cos^2 k(1 + \sin^2 k) - 3\sin^2 k)
 \end{aligned}$$

№7

Нам надо выбрать такие числа, что бы
при разности было k

$$\begin{aligned}
 -1 + \cos 2k - \cos^2 k - 3 & = (\cos^2 k - \sin^2 k) - \cos^2 k - 4 = \\
 & = \cos^2 k - \frac{1 + \cos 2k}{2} - 4 = \frac{2\cos^2 k - 1 - \cos 2k - 8}{2} = \\
 & = \frac{2\cos^2 2k - \cos 2k - 9}{2} \Rightarrow \text{Максимальное}
 \end{aligned}$$

число может быть при $\cos 2k = \frac{1 + \sqrt{73}}{4}$

$$\text{Максимальное } \Rightarrow (\cos 2k - \frac{1 - \sqrt{73}}{4}) / (\cos 2k - \frac{1 + \sqrt{73}}{4})$$

=)

147

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№15

1) $\sqrt{x+3} - x > 1$

$\sqrt{x+3} > 1+x$

$x \geq -1$

$x < -1$

$x+3 > x^2+x+1$

$x \geq -3 \Rightarrow$

$x^2+x-2 < 0$

$\Rightarrow x \in [-3; -1)$

$x \in (-2; 1) \Rightarrow$

~~$x \in [-3; 1)$~~

$\Rightarrow x \in [-1; 1)$

$[-3; 1)$

$x \in [-3; -1) \cup (-1; 1)$

$I \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; -\frac{11}{4}] \cup [-2; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \setminus [-3; -1) \cup (-1; 1) \cup [-3; 1) \end{array} \right.$

$II \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \\ x \in [-3; -2] \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [-3; -\frac{11}{4}] \cup (-2; 1) \cup (1; +\infty) \Rightarrow x \in [-3; -2) \cup (-1; 1)$

~~$x \in [-3; -1) \cup (-1; 1)$~~ $x \in [-3; -2) \cup (-1; 1)$
 ~~$x \in [-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1)$~~

Ответ: $x \in [-3; -2) \cup (-1; 1)$

№2

$y(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

Есть ли?

$\sin 5x = \sin(7x - 2x)$

$\sin 9x = \sin(7x + 2x)$

$\sin(7x - 2x) \cdot \sin(7x + 2x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№13


Так цифра "5" ровно шесть и от цифр по порядку \Rightarrow можно записать как одну цифру ~~цифру~~ \Rightarrow

\Rightarrow что "0" и "9" могут стоять в 12 местах.

В общем можно сказать, что всего ~~на цифру~~

в 13, т.к. "55555" — одна цифра. \Rightarrow

\Rightarrow в 12 остальных цифр могут стоять только

"0" или "9"  \Rightarrow

"0" или "9"

\Rightarrow Всего вариантов $1 \cdot 2^{12}$; Еще её нужно умно-

жить на 13 т.к. цифра 5 может стоять в

13 местах $\Rightarrow 1 \cdot 2^{12} \cdot 13$ — варианты с "5".

По условию сказано, что ходячи одна цифра

выступает один раз. \Rightarrow Мы не считали количество

случаев когда нет числа цифр "0" или "9"

или в. Общее ~~2~~ $2 \cdot 13$ т.к. цифра 5

может быть в 13 местах, а цифр которые нет

их 2 $\Rightarrow 2 \cdot 13 = 26 \Rightarrow$ окончательный ответ —

$$13 \cdot 2^{12} - 26 = 53248 - 26 = 53222$$

$$\begin{array}{r} 2^{10} - 1024 \\ 2^{12} - 4096 \\ \hline 4096 \\ \times 13 \\ \hline 12288 \\ + 4096 \\ \hline 53248 \end{array}$$

Ответ: Всего вариантов

53222.

N5.

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\begin{aligned} x+5 > 0 & \quad \sqrt{x+3}-x > 0 \\ x > -5 & \quad (x+3 > x^2) \\ \sqrt{x+3} > 0 & \quad \sqrt{x+3} > x \\ x > -3 & \quad x < 0 \\ x > 0 & \quad \sqrt{x+3} \geq 0 \\ & \quad x \geq -3 \\ & \quad x^2 - x - 3 < 0 \\ D = 1 + 12 = 13 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in [0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{aligned}$$

O.D. 3.
$$\begin{cases} x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ \sqrt{x+3} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3}-x & \neq 1 \\ \sqrt{x+3} & \neq x+1 \\ x+3 & \neq x^2+2x+1 \\ x^2+x-2 & \neq 0 \\ (ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow x_1, x_2) \\ ax^2+bx+c=0 \wedge \\ a+b+c=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1=1 \quad x_2 = \frac{c}{a} = \\ \Rightarrow x_1 \neq 1; x_2 \neq -2; \end{aligned}$$

O.D. 3.
$$\begin{cases} x > -5 \\ x \geq -3 \\ x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2});$$

$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1 \Rightarrow$ Если оба прометрия.

1) $\sqrt{x+3}-x > 1$ 2) $\sqrt{x+3}-x < 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3}-x & < x+5 \\ \sqrt{x+3} & < 2x+5 \end{aligned}$$

$$x+3 \leq 4x^2 + 20x + 25$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

$$\begin{aligned} D &= 361 - 352 = 9 \\ x &= \frac{-19 \pm 3}{8} = \begin{cases} x = -\frac{11}{4} \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{11}{4}] \cup [-2; +\infty)$$

$$\sqrt{x+3}-x \geq x+5$$

$$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$$

$$\begin{aligned} 2x+5 & \geq 0 \\ x & \geq -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

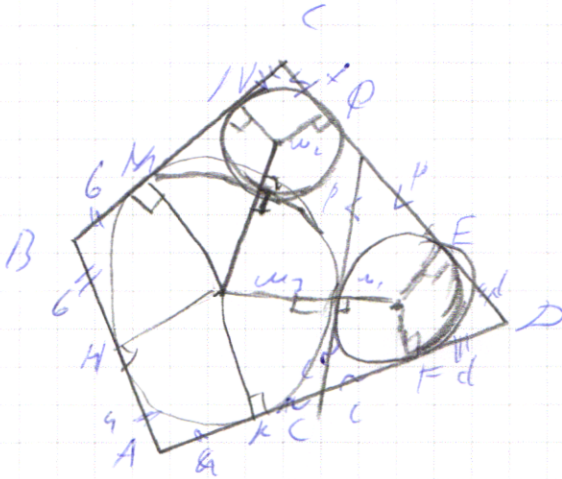
$$\begin{aligned} x+3 & \geq 4x^2 + 20x + 25 \\ x & \in [-\frac{11}{4}; -2] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+5 & < 0 \\ x & < -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} & \geq 0 \\ x & \geq -3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in [-\frac{5}{2}; -2] \Rightarrow x \in [-3; -2]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

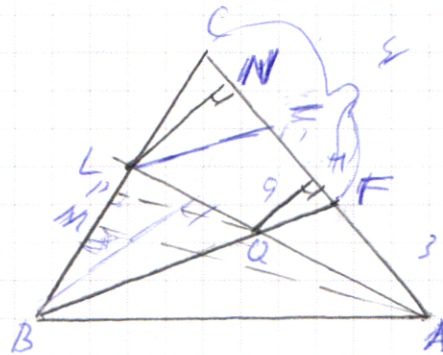
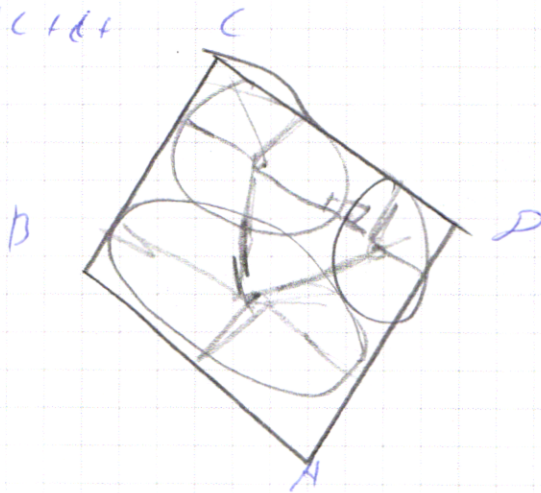


$$AB + BC + AD - CD = P$$

$$AB + BC = 10 + AB + CD$$

$$AB + CD + 10 = P$$

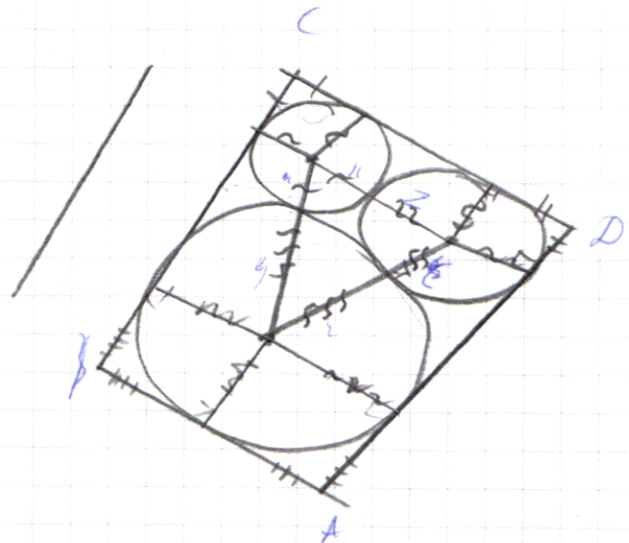
$$4 + 10 + 10 = P$$



$$\frac{AM}{AN} = \frac{QN}{ZN}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{Q.P. \cdot LB}{AM \cdot BC} = \frac{1}{16}$$



1 : 36 : 21 : 106 : 141
~~2~~ 2 : 34 : 22 : 107 : 142
3 : 35 : 7
5 : 40 : 45 : 110 : 145.
~~4 : 26~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$y = x^2$ $y = x$

$y = 169$

$y = 64$

$g(x) = \sin x \cdot \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x - 3$

$\sin(7x-2x) \sin(7x+2x) -$

$- \sin^2 7x - \cos^2 7x - 3$

$(\sin^2 7x \cos^2 2x - \cos^2 7x \sin^2 2x) = \frac{64 \cdot 8}{3} + \frac{64 \cdot 8}{3} = \frac{64 \cdot 16}{3}$

$(\sin^2 7x \cos^2 2x + \cos^2 7x \sin^2 2x) -$

$\sin^2 7x - \cos^2 7x - 3$

$S_2 = \frac{13^3}{3} + \frac{13^3}{3} = \frac{2 \cdot 13^3}{3}$

$(\sin^2 7x \cos^2 2x - \cos^2 7x \sin^2 2x) - \sin^2 7x - \cos^2 7x - 3$

$\sin^2 7x \cos^2 2x - 11$

$-\sin^2 7x \cos^2 2x - \cos^2 7x \sin^2 2x - \cos^2 7x - 3$

$-\sin^2 7x (\sin^2 2x + \cos^2 2x) - \cos^2 7x - 3$

$-\sin^2 7x - \cos^2 7x - 3$

$-4 \sin^2 7x \cos^2 2x - \cos^2 7x - 3$

$-4(1 - \cos^2 7x) \cos^2 2x - 3 - \cos^2 7x$

$-4 \cos^2 2x + 4 \cos^2 7x \cos^2 2x - 3 - \cos^2 7x$

$3 \sin^2 7x \cos^2 2x - \cos^2 7x - \sin^2 7x \cos^2 2x$

$4 \cos^2 7x \cos^2 2x - 5 \cos^2 7x - 3$

$3 \sin^2 7x \cos^2 2x - 3 \sin^2 7x - \cos^2 7x - \cos^2 7x - \sin^2 7x \cos^2 2x$

$4 \cos^2 7x \cos^2 2x - 5 \cos^2 7x - 3$

141	107
142	108
143	109
144	110
145	111
33	39
34	40
35	41
36	42
37	43

