МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-007

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

© МФТИ, 2017

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x - \frac{1-\cos 14x}{2} - \frac{\cos 2x + 1}{2} - 3$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x) - 4$

$g(x) = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - \cos 2x - 1) - 4$

$g(x) = \cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{9}{2}$

$\cos 2x = t$; $t \in [-1; 1]$

$g(x) = t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{9}{2}$ - парабола, ветви вверх

$t_0 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

$g_{min} = g(t_0) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{9}{2} = \frac{1-2-72}{16} = -\frac{73}{16}$

$g_{max} = g(-1)$ или $g(1)$

$g(-1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

$g(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$

$g_{max} = g(-1) = -3$

Ответ: $g_{min} = -\frac{73}{16}$; $g_{max} = -3$

№3

2^{12} - кол-во способов расставить „0" и „9" (12 цифр)

13 - кол-во мест для места „5"

$13 \cdot 2^{12}$ - кол-во необходимых чисел в сумме с числами, начинающимися с „0"

$12 \cdot 2^{11}$ - кол-во чисел, нач. с „0"

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$13 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11}$ - кол-во чисел, уд. условию

$13 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11} = 2^{11}(26-12) = 7 \cdot 2^{12} = 7 \cdot 4096 =$

$= 28672$

Ответ: $13 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11}$

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x+5 > 0 & x > -5 \\ x+3 > 0 & x > -3 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 & x \in \left(-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 & x \neq 1 \end{cases}$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{x+5}(x+5)$, т.к. $x > -3$

$\sqrt{x+3} - x \leq x+5$

$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$

$2x+5 \geq 0$

$x \geq -\frac{5}{2}$

$x+3 \leq 4x^2 + 25 + 20x$

$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{5}{4}; \infty\right) \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$

Ответ: $x \in \left(-3; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{5}{4}; 1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Обозначим выбранные числа a_i, где $1 \leq i \leq 25$.

Рассмотрим b, такие что $b_i = a_i - 1$; $1 \leq i \leq 25$

$a_i - a_j \not\vdots 35$ $(i \neq j$; $1 \leq i, j \leq 25)$

$(b_i + 1) - (b_j + 1) \not\vdots 35$

$b_i - b_j \not\vdots 35$

$b_i \not\equiv b_j \pmod{35}$ => все числа b_i имеют разный остаток при делении на 35

Заметим, что $b_i = (n_i - 1) \cdot 35 + r_i$, где n_i – порядковый номер промежутка из данных, к которому принадлежит b_i, а r_i – остаток деления числа b_i на 35. Тогда

$$\sum_{i=1}^{25} a_i = \sum_{i=1}^{25} (b_i + 1) = 25 + \sum_{i=1}^{25} b_i = 25 + 35 \sum_{i=1}^{25} (n_i - 1)$$

$$+ \sum_{i=1}^{25} r_i = 25 + 35(5(1-1) + 5(2-1) + 5(3-1) + 5(4-1) + 5(5-1)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{25} r_i = 25 + 1750 + \sum_{i=1}^{25} r_i$$

$$\sum_{i=1}^{25} a_i - \min \Rightarrow \sum_{i=1}^{25} r_i - \min \Rightarrow \sum_{i=1}^{25} r_i = \sum_{i=1}^{25} (i-1) =$$

$$= \frac{0 + 24}{2} \cdot 25 = 300$$

$$\sum_{i=1}^{25} a_i = 1775 + 300 = 2075$$

Ответ 2075

№1

$A(x;y)$

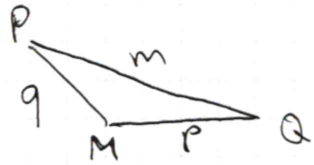
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 169 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 13$$

$A_1(-13;169)$ $A_2(13;169)$; $b = A_1A_2 = 26$

$C(x;y)$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 64 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 8$$

$C_1(-8;64)$; $C_2(8;64) \Rightarrow c = C_1C_2 = 16$



$\angle PMQ = 120°$

$$m^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos 120° = p^2 + q^2 + pq$$

(теорема cos)

$B(x;y)$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = a \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \quad (a \geq 0)$$

$B_1(-\sqrt{a};a)$ $B_2(\sqrt{a};a) \Rightarrow l = B_1B_2 = 2\sqrt{a}$

$m^2 = p^2 + q^2 + pq$ – симметрично для p и q => 3 случая!

1) $m = l$ $p = b$ $q = c$

$4a = (26)^2 + (16)^2 + 26 \cdot 16 \Rightarrow a = 337$

2) $m = b$ $p = l$ $q = c$

$26^2 = l^2 + 16^2 + 16l$

$l^2 + 16l - (26-16)(26+16) = 0$

$l^2 + 16l - 420 = 0$

$D = 256 + 4 \cdot 420 = 256 + 1680 = 1936 = (44)^2$

$l = \dfrac{-16+44}{2} = 14$ $(l > 0)$

$a = \dfrac{l^2}{4} = 49$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

3) $m=c \quad p=l \quad q=b$

$16^2 = l^2 + 26^2 + 26l$

$l^2 + 26l + 420 = 0$

$D = 26^2 - 4\cdot 420 = 4(169 - 420)$

$D<0 \Rightarrow$ нет решений

Ответ: $a = 337;\ 49$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-007

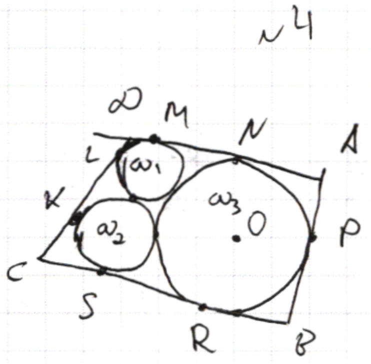
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано: $AD+BC-AB-CD=10$



$DM = DL$; $AN = AP$
$BR = BP$; $CS = CK$ (по св. кас.)
$AD+BC-AB-CD=10$

$\Rightarrow MN+RS-KL=10$

$KL = \sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$

$MN = 2\sqrt{r_1r_3}$; $RS = 2\sqrt{r_2r_3}$

$-\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_2r_3} = 5$ ~~$\Rightarrow r_3=2;\ r_1=1;\ r_2=1$~~

AO − бис. $\angle DAB$

BO − бис. $\angle ABC$

$\angle AOB = 180^\circ - \underset{-360^\circ-\angle ADR)}{\angle OAB} - \angle OBA = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC) =$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}(540^\circ - \angle ANO - \angle BRO) = 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - 360^\circ +$

$+ \angle NOR) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle NOR = 180^\circ - \frac{1}{2}\Big(\arccos\frac{r_3-r_1}{r_3+r_1} +$

$+ \arccos\frac{r_3-r_2}{r_3+r_2} + \arccos\frac{(r_1+r_3)^2+(r_3+r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{2(r_3+r_1)(r_3+r_2)}\Big)\cdot\frac{360^\circ}{2\pi} =$

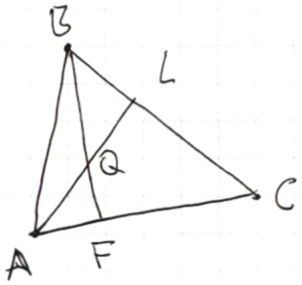
~~$= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(2\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{180^\circ}{\pi}$~~

$S_{AOB} = \frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\angle AOB = \frac{1}{2}OP\cdot AB$

$AB = \frac{AO\cdot BO\cdot\sin\angle AOB}{OP}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6



Дано: $AF : FC = 3:4$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$\rho(Q;AC) = 9$

$$\frac{1}{16} = \frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{S_{BQL}}{S_{BAL}} \cdot \frac{S_{BAL}}{S_{ABC}} = \frac{QL}{LA} \cdot \frac{BL}{BC}$$

$$\frac{LB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AQ}{QL} = 1 \text{ (по теореме Менелая)}$$

$$\frac{CF}{AL} = \frac{4}{3} \ ; \ \frac{BL}{BC} = \frac{1}{16} \cdot \frac{AL}{LQ} = \frac{1}{16} \cdot \frac{AQ+QL}{LQ} = \frac{1}{16}\left(\frac{AQ}{QL}+1\right)$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{16}\left(\frac{AQ}{QL}+1\right) \cdot \frac{AQ}{QL} = 1$$

$$\frac{AQ}{QL} = t \ ; \ t^2 + t - 12 = 0 \ ; D = 1 + 48 = 49 \ ; \ t = \frac{-1+7}{2} = 3 \ (t>0)$$

$$\frac{LC}{BL} = \frac{BC}{BL} - 1 = 16\frac{LQ}{AL} - 1 = \frac{16}{\frac{AQ}{QL}+1} - 1 = 3$$

$$\frac{S_{ALC}}{S_{AQF}} = \frac{AL \cdot AC}{AQ \cdot AF} = \left(1 + \frac{QL}{AQ}\right)\left(1 + \frac{FC}{AF}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{9}$$

$$\frac{28}{9} = \frac{S_{ALC}}{S_{AQF}} = \frac{\rho(L;AC) \cdot AC}{\rho(Q;AF) \cdot AF} = \frac{7}{3} \cdot \frac{\rho(L;AC)}{9}$$

$$\rho(L;AC) = \cancel{\frac{48}{7}} \ \cancel{16\frac{6}{7}} \ 12$$

Ответ: $\rho(L; AC) = 12$

1)

$y = x^2$; $y = 169$ $x = \pm 13$ $b = 26$

$y = 64$ $x = \pm 8$ $c = 16$

$m^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos 120 =$

$= p^2 + q^2 + pq$

$BC, AD \le 2r_3 + 2r_1$

$CD, AB \ge 2r_3; 2(r_1+r_2)$

$169 + 64 + 80 + 24 = 169 + 168 = 337$

1936	2
968	2
484	2
242	2
121	

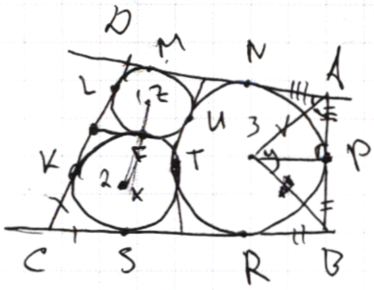
$2(r_3 + 2r_1 + 2r_2 - 2r_3 - 2(r_1+r_2)) = 10$

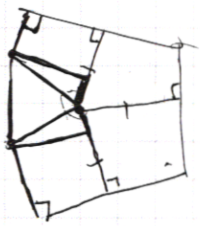
$AB \ge CD$

$CD, AB \le 2r_3 ; 2(r_1+r_2)$

$BC \ge AD$ $\quad$ $BC, DA \le 2r_3 + 2r_2 ; 2r_3 + 2r_1$

$AD + BC - AB - CD = 10$





$\cancel{AN} + MN + \cancel{DM} + \cancel{BR} + RS + \cancel{SC} - \cancel{AN} - \cancel{BR} - \cancel{CS} - KL - \cancel{DM} = 0$

$MN + RS - KL = 0$

$KL = \sqrt{-(r_2 - r_1)^2 + (r_2 + r_1)^2} = \sqrt{4 r_2 r_1}$

$\sqrt{x+3} - x \ge 0$

$\sqrt{x+3} \ge x$

1) $x \ge 0$

2) $x + 3 \ge x^2$

$x^2 - x - 3 \le 0$

$D = 1 + 12 = 13$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\sqrt{x+3} = x + 1$

$x + 3 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2; 1$

$D = 361 - 4 \cdot 88 = 361 - 320 - 32 = 9$

$x = \frac{-19 \pm 9}{8} = -\frac{10}{8}; -\frac{28}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+3) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x+5 \geq 0 & x \geq -5 \\ \cancel{x+3 \neq 1} & x \geq -3 \\ x+3 \geq 0 & \sqrt{x+3} \geq x \\ \sqrt{x+3}-x \geq 0 & \cancel{x+3 \geq x^2} \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 & \end{cases}$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \underbrace{\frac{1}{2}\cos 14x - \sin^2 7x}_{} - \cos^2 x - 3$

$\cos 14x = 1 - 2\sin^2 7x$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - 4$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \cos^2 x - \frac{7}{2}$

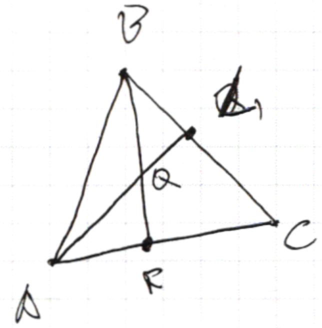
$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$\cos 4x - \cos 2x = 2\cos^2 x - \cos x - 1$

$35 \cdot 5 = 175$

$25 \cdot 12 = 3 \cdot 10$

$\frac{S_{ABC}}{S_{ABL}} = \frac{BC}{BL}$



$AF : FC = 3:4$

$\frac{S_{ABL}}{S_{QBL}} = \frac{AL}{QL}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$AF \cdot BQ = \frac{AC \cdot QF \cdot BL}{CL}$

$\frac{BC \cdot AL}{BL \cdot QL} = 16$

$h_a = 9$

$\frac{S_{ABC}}{S_{FBC}} = \frac{7}{4}$

$\frac{FA}{AC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} = 1$

$\frac{BQ \cdot BL}{BF \cdot BC} = \frac{S_{BQL}}{S_{FBC}} = \frac{7}{64}$

$\frac{3}{7}$

$\frac{BC}{BL} = \frac{64}{7} \cdot \frac{BQ}{BF}$

$\frac{AL}{QL} = \frac{3}{4} \cdot \frac{QL}{AQ}$

$\cancel{\frac{QB}{BF}} \cdot \frac{LB}{BC} \cdot \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AQ}{QL} = 1$

$\frac{AL \cdot AQ}{QL^2} = \frac{3}{4}$

$\frac{AQ}{QL} = \frac{3}{4}\frac{QL}{AQ} - 1$

$\frac{AQ}{QL} = \frac{BC \cdot AF}{BL \cdot CF} = \frac{64}{7} \cdot \frac{BQ}{BF} \cdot \frac{AF}{CF} =$

$= \frac{64}{7} \cdot \frac{AC \cdot QF \cdot BL}{CL \cdot BF \cdot CF}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)