МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 5-019

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

S-019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1. Заметим, что $y=a$ отсекает отрезок $2\sqrt{a}$. Соответственно, $y=169$ отсекает отрезок длиной 26, а $y=64$ — 16

1) $a>169$, тогда отрезок, отсекаемый $y=a$ — наибольшая сторона треугольника и угол $120°$ лежит против неё

$$(2\sqrt{a})^2 = 26^2+16^2-2\cdot 26\cdot 16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$4a = 4(169+64+104)$$

$$a = 337$$

2) $0<a<169$, тогда наибольшую сторону составляет отрезок длины 26

$$26^2 = 4a+16^2-2\cdot 2\sqrt{a}\cdot 16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a+8\sqrt{a}-105=0$$

$$\sqrt{a}=7,\ a=49$$

Ответ: 337; 49

N2 $g(x) = \sin 5x\cdot\sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

~~$g'(x) = 5\cos 5x$~~

$g(x) = \sin(7x-2x)\sin(7x+2x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = (\sin 7x\cos 2x - \cos 7x\sin 2x)(\sin 7x\cos 2x + \cos 7x\sin 2x) -$
$- \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

N3 „Свернём" "555555" в "5". Условие сводится к нахождению количества 13-значных чисел, содержащих 1 цифру "5", а остальные — "0" и "9", каждая минимум 1 раз

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

1) Все последовательности из "0", "5", "9", содержащие одну "5": $13 \cdot 2^{12}$

2) Последовательности из 1 "5", а все остальное — "0"/"9"
13

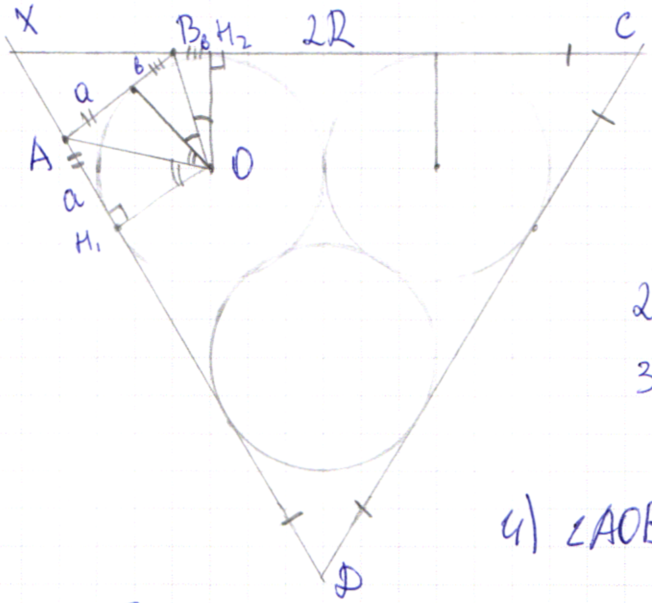
3) Последовательности, содержащие одну "5" и начинающиеся с "0": $12 \cdot 2^{11}$

4) Пересечение 2) и 3): 12

$$13\cdot 2^{12} - 2\cdot 13 - 12\cdot 2^{11} + 12 = 2^{11}(13\cdot 2 - 12) - 26 + 12 =$$
$$= 2048\cdot 14 - 14 = 14\cdot 2047 = 22658$$

Ответ: 22658

№4.



1) $AD + BC - AB - CD = 10$
$2R = 10$
$R = 5$

2) $AD \cap BC = X$, $\triangle DXC$ — равносторонний)

3) $\angle H_1OH_2 = 360^\circ - 2\cdot 90^\circ - \angle X =$
$= 180^\circ - 60^\circ\ (\angle X) = 120^\circ$

4) $\angle AOB = \frac{1}{2}\angle H_1OH_2 = 60^\circ$

5) $\sqrt{a^2+25}\cdot\sqrt{b^2+25} = 42$
$\sqrt{(ab)^2 + 25(a^2+b^2) + 625} = 42$
$a + b = x$
$\sqrt{(ab)^2 + 25(x^2 - 2ab) + 625} = 42$

6) $\triangle AOB$: $AB^2 = AO^2 + OB^2 - AO\cdot OB$
$x^2 = a^2 + 25 + b^2 + 25 - 42$
$x^2 = x^2 - 2ab + 50 - 42$
$ab = 4$

7) $16 + 25(x^2 - 8) + 625 = 42^2$
$16 + 25x^2 - 200 + 625 = 1764$
$25x^2 = 1323$
$x = \sqrt{\frac{1323}{25}} = \frac{3\sqrt{147}}{5}$

Ответ: а) 5;
б) 60°;
в) $\frac{3\sqrt{147}}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5 $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

$t=\sqrt{x+3},\ t\geq 0$

$\log_{t-t^2+3}(t^2+2)\geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} t-t^2+3>0 \\ t-t^2+3\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} t^2-t-3<0 \\ t\neq -1;2 \end{cases}$ $\begin{cases} t\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ t\neq -1;2 \end{cases}$ $t>0$

1) $\begin{cases} t-t^2+3<1 \\ t^2+2\leq t-t^2+3 \end{cases}$ $\begin{cases} t\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty) \\ t\in[-\frac{1}{2};1] \end{cases}$ – нет решений

2) $\begin{cases} t-t^2+3>1 \\ t^2+2\geq t-t^2+3 \end{cases}$ $\begin{cases} t\in(-1;2) \\ t\in(-\infty;-\frac{1}{2}]\cup[1;+\infty) \end{cases}$ $t>0$!!!

Ответ: $t\in[1;2)$

N7 Если разность $\vdots$ 35, то все остатки должны быть различны. Чтобы сумма была минимальна, меньшие остатки должны быть у больших чисел, при этом берём остатки 1–25.

$\frac{5}{2}(21+25+51+55+81+85+111+115+141+145)=$

$=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}(21+141+25+145)=1450$

Ответ: 1450

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

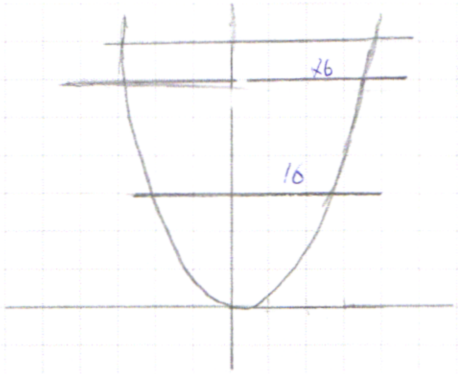
5 - 019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.



1) $a > 169$ $A_a B_a = 2\sqrt{a}$

$4a = 26^2 + 16^2 + 2\cdot 26\cdot 16 \left(+\frac{1}{2}\right)$

$4a = 4(169 + 64 + 26\cdot 8)$

$a =$

$26 \times 8 = 208$ $169 + 64 = 233$ $233 + 208 = \cancel{441}$

443 441

2) ~~$2a<169$~~

$a = x^2$, $x = \pm\sqrt{a}$

$+\sqrt{a} - (-\sqrt{a}) = 2\sqrt{a}$

$4a = 26^2 + 16^2 + 2\cdot 26\cdot 16\cdot \frac{1}{2}$

$4a = 4(169 + 64 + 13\cdot 8)$

$a = 169 + 64 + 104 = 233 + 104 = 337$

$169 + 64 + 104 = 337$

2) $0 < a < 169$

$26^2 = 4a + 16^2 + 2\sqrt{a}\cdot 16$

$4a + 32\sqrt{a} + 16^2 - 26^2 = 0$

$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$

$\sqrt{a} = 7$

$a = 49$

$169 - 64 = 105$

$21\cdot 5$

$7\cdot 15$

$49 + 56 - 105$

N2 $g(x) = \sin 5x\cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$(g^{f}(x))' = \cos 5x \sin 9x + \sin 5x \cos 9x - 2\sin 7x \cos 7x + 2\cos x \sin x$

$g'(x) = \sin(14x) - \sin 14x + \sin 2x$

$g'(x) = 0$, $\sin 2x = 0$, $2x = \pi k$

$x = \frac{\pi k}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

2. $x = \frac{\pi k}{2}$

$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

1) $k = 2m+1$

$\sin 5x$ и $\sin 9x$ — одного знака, $\sin 7x$ — другого

$1 - 1 - 1 - 3 = -6$

2) $k = 2m$, $x = \pi n$

$0 - 0 - 0 - 3 = -3$

3. "5" – 6, идут подряд

ещё есть "0" и "9" минимум 1 раз каждая

Условно, "555555" – 1 цифра, а число 13-значное

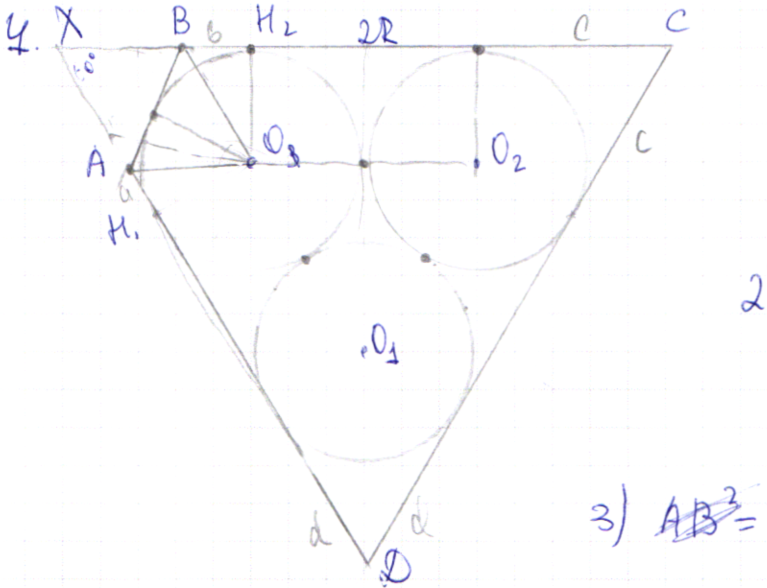
$13 \cdot 2^{12} - 2 \cdot 13 - (12 \cdot 2^{11} - 12) = \cancel{2^{11}(13 \cdot 2 - 12) - 2 \cdot 13 + 12}$

$= \cancel{2^{11}} \cdot 15 - \cancel{26}\ 14$

все числа (в т.ч. начинающиеся с 0) — числа без 9 + без 0 — числа нач с 0, ~~12~~ из них посчитано

$\times 2047$, 14, $+ 2188$, 2047, 22658

4.



1) R, если $AD + BC - AB - CD = 10$

$\cancel{a} + d + 2R + \cancel{b} + c + 2R - \cancel{a} - \cancel{b} - c - d - 2R = 10$, $R = 5$

2) Д-ть, что $\triangle$ равносторонний

Из $H_1XH_2O_3$ $\angle H_1O_3H_2 = 120°$

$\angle AOB = \frac{\angle H_1O_3H_2}{2} = 60°$

3) $\cancel{AB^2} =$ $AB = a+b$

$\sqrt{(a^2+R^2)(b^2+R^2)} = 42$

$AO_3 = \sqrt{a^2+R^2}$

$OB = \sqrt{b^2+R^2}$

$2 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OB\ 14$

$\cancel{42 \cdot 42 = 1680 + 84} = 252$

$(a+b)^2 = a^2 + R^2 + b^2 + R^2 - 42$

$\times 42$, 42, 84, 168, 1764

$2ab = 50 - 42 = 8$

$ab = 4$

$16 + 25(3^2 - 8) + 625 = 42^2$

$\sqrt{(a^2+25)(b^2+25)} = 42$

$a^2b^2 + 25(a^2+b^2) + 625 = 42^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16+25S^2-200+625=1764$

$25S^2=1764-425-16=1764-441=1323$

$S=\sqrt{\frac{1323}{25}}=\frac{3\sqrt{147}}{5}$

пересчитать

$42 \cdot 42$: 84, 168, 1764

$1764-425-16=1323$

$1764-441=1323$

$1323 : 3 = 441$, $441 : 3 = 147$

б.

2. $g'(x)=\cos 5x\cdot 5+\sin 9x$

~~sin(5x)~~ $\sin(7x-2x)=\sin 7x\cos 2x-\cos 7x\sin 2x$

$\sin^2 7x\cos^2 2x-\cos^2 7x\sin^2 2x$ $\sin^2 7x-\cos^2 2x$

$5\cos 5x\sin 9x+9\cos 9x\sin 5x$

$-\cos^2 x-\cos^2 2x-3$

$-\sin^2 x-2\sin^2 x-\cancel{3}=0$

$\sin$

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: $x \geq -3$

$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases}$

ввести замену сразу

$\sqrt{x+3}=t$

$\cancel{\sqrt{x+3}}$ $x=t^2-3$

$\begin{cases} t-t^2+3>0 \\ t-t^2+3 \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} t^2-t-3 \cancel{\neq} < 0 \\ t^2-t-2 \neq 0 \end{cases}$

$t \neq 2,\ t \neq -1$

$\sqrt{x+3}>x$ $[-3;0]$

$x+3>x^2$

$x^2-x-3<0$

$D: 1+12=13$

$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

1) $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x<1 \\ x+5<\sqrt{x+3}-x \end{cases}$

1) $t^2-t-2>0$ $(-\infty;-1] \cup (2;+\infty)$

$\frac{1+\sqrt{13}}{2} > 1$

$1+\sqrt{13} >^{?} 2$

$\sqrt{13} >^{?} 1$

2) $t^2-3+5<t-t^2+3$

$t^2+2<t-t^2+3$

$2t^2-t-1<0$

$t=1$ $t=-\frac{1}{2}$ $0 \leq t \leq 1$

— нет решений

2) $\begin{cases} t^2-t-2<0 & (-1;2) \\ 2t^2-t-1>0 & (1;+\infty) \end{cases}$

$(1;2)$

$\frac{1+\sqrt{13}}{2} > 2$

$1+\sqrt{13}>4$

$\sqrt{13}>3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

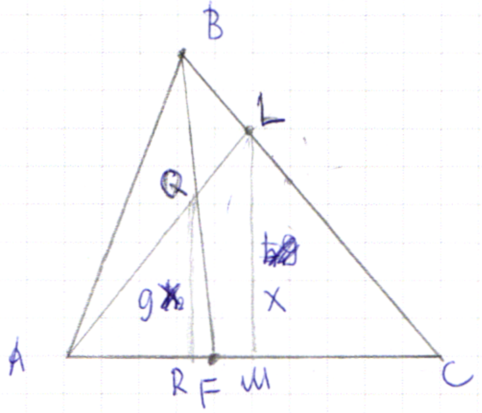
S-019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



$AF : FC = 3:4$

$AF = 3x,\ FC = 4x$

$\frac{S_{1QL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$QR = 9$, найти LM

$S_{BQL} = S_{ABC} - S_{ABF} - S_{ALC} + S_{AQF}$

$S_{BQL} = S_{ABC} - \frac{3}{7} S_{ABC} - 9 \cdot 7x$

$S = S_{ABC}$

9.

$S = \frac{1}{2} H \cdot 7x$

$\frac{1}{2} 9 \cdot 3x$

$S_{ABL} + S_{ALC} - S_{AQL} = \frac{15}{16} S$

$\frac{3}{7} S + \frac{9}{H} S - \frac{3h}{7H} S = \frac{15}{16} S$

$\frac{9}{H} S = \frac{1}{2} 9 \cdot 7x$

$\frac{3h}{7H} = \frac{3}{97}$

$\frac{h}{9} =$

$\frac{x}{H} = k$

$\frac{3h}{7H} = \frac{9 h \cdot 3}{4 \cdot 9 \cdot 7}$

$H \cdot 3x$

$\frac{3}{7} + \frac{9}{H} - \frac{3h}{7H} = 15/16$

$\frac{3}{7} + \frac{x}{H} - \frac{3 \cdot 9}{7H} \quad \frac{15}{16}$

$\frac{3H + 63 - 3h}{7H} = \frac{105}{16}$

$3H$

$\frac{BQ}{QR} = \frac{QF}{BQ} =$ —

$\frac{QF}{BF} = \frac{9}{H}$

$\frac{QF}{BQ} = \frac{9}{H-9}$

$\frac{3}{4} S + \frac{x}{H} S - \frac{3 \cdot 9}{4H} S = \frac{15}{16} S$

$\frac{AQ}{AL} = \frac{9}{x}, \quad \frac{AQ}{QL} = \frac{9}{x-9}$

$\frac{3}{4} + \frac{x}{H} - \frac{27}{4H} = \frac{15}{16} \quad / \cdot 16H$

$12H + 16x - 108 = 15H$

$\frac{BQ \cdot QL}{AQ \cdot QF} = \frac{(H-9)(x-9)}{81}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

7. [1; 35], [36; 70], [71; 105] [106; 140], [141; 175]

Числа имеют разные остатки при делении на 35

Чтобы сумма была минимальна, нужно брать числа с минимальными остатками на кажд. пром.: 1-5 на [141; 175], 6-10 на [106; 140], …,

1 6 11 16 21

21-25 на [1; 35]

$21+22+23+24+25+51+\ldots+$

$\frac{\cancel{21+25}}{\cancel{22}} = \frac{5}{2}(21+25+51+55+81+85+111+115+141+145) =$

$46+186=232$

$= \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}(21+141+25+145) = \frac{25}{4}\cdot 232 =$

$= 25\cdot 58 =$

$= 1450$

6. $\frac{3}{7}+\frac{x}{H}-\frac{9\cdot 3}{H\cdot 7}=\frac{15}{16} \quad |\cdot 7H$

$3H+7x-27=\frac{105H}{16} \quad |\cdot 16$

$48H+112x-27\cdot 16=105H$

$57H+432=112x$

$27\cdot 16$: $162 + 27 = 432$

$105-48=57$

$\frac{x}{H}=\frac{CL}{\cancel{A}BC}$ $\quad$ $\cancel{\frac{CL}{LB}=\frac{x}{H-x}}$ $\quad$ $\frac{LB}{BC}=\frac{H-x}{H}$

$\frac{AQ}{AL}=\frac{9}{x}$ $\quad$ $\frac{AQ}{LQ}=\frac{9}{x-9}$

$\frac{9}{x-9}\cdot\frac{\cancel{x}\,H-x}{H}\cdot\frac{4}{3}=1$

$\frac{9}{x-9}\cdot\frac{H-x}{H}=\frac{3}{4}$ $\quad$ $\cancel{9}\ 36(H-x)=3H(x-9)$

$36H-36x=3Hx-27H$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА