МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 11-ССС

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7 1. У нас есть 4е промежутка, если начинать отбирать числа из 1го, где находятся наименьшие числа, то из последнего нам, учитывая условие, придется выбрать самые большие числа, а нам нужно получить наименьшую сумму. Тогда начнем отбор из последнего множества и возьмем числа 106, 107, 108, 109, 110; Из третьего множества мы не можем взять числа [71; 75] (из наименьших), а числа [76; 80] удовлетворяют условию (разность никакие двух чисел не делится на 35). Рассмотрим второе множество. Мы не можем взять числа [36; 45], но можем взять следующую четверку чисел: [46; 50], аналогично из первого нельзя брать [1; 15], но можно [16; 20].

~~Итого~~ Получаем: [16; 20]; [46; 50]; [76; 80]; [106; 110].

Просуммируем: $106 \times 5 + 10 + 46 \times 5 + 10 + 76 \times 5 + 10 + 16 \times 5 + 10 =$

$= 5(106 + 46 + 76 + 16) + 40 = 5 \times 244 + 40 =$

$= 1220 + 40 = 1260. = \Sigma_{наим.}$

Ответ: 1260

№ 5 $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1.$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x \neq 1, & (1) \\ \sqrt{x+3} - x > 0, & (2) \\ x + 5 > 0, & (3) \\ \log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1. & (4) \end{cases}$$

(1) $\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} \neq 1 + x, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

т.к. $x \geq -1$, то возв. в квадрат:

$x + 3 \neq (x+1)^2$

$x^2 + 2x + 1 - x - 3 \neq 0$

$x^2 + x - 2 \neq 0$

$x \neq 1$ или $x \neq -2$ неуд. усл. $x \geq -1$

$\boxed{\text{Отв}(1):\ x \neq 1.}$

(2) $\sqrt{x+3} - x > 0$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} > x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

т.к. $x \geq 0$, то возв. в квадрат:

$x + 3 > x^2$

$x^2 - x - 3 < 0$

$f(x) = x^2 - x - 3$

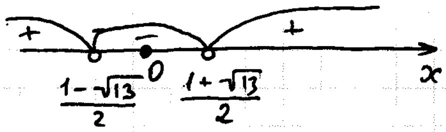
$f(x) = 0$, тогда:

$x^2 - x - 3 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13.$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

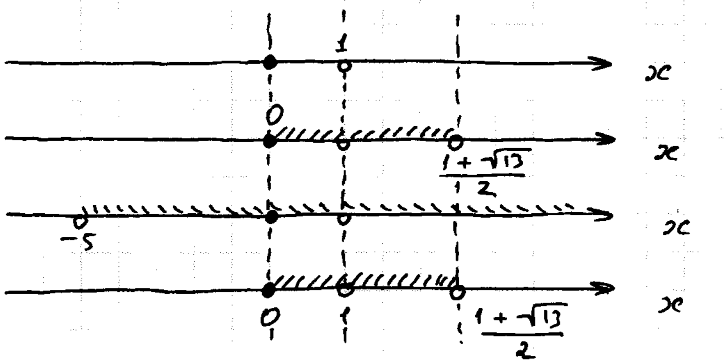
$\left(\sqrt{13} > 1, \text{ тогда } x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$



$\boxed{x \in \left[0; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right).}$

(3) $\boxed{x > -5}$

• Тогда:



Получим: $x \in [0; 1) \cup \left(1; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right).$ – ОДЗ.

~~Рассмотрим участок на [0;1), получим:~~

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-116

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

• Если $x \in [0;1)$, то $\sqrt{x+3}-x > 1$, тогда:

$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

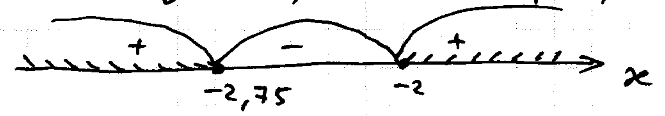
$(2x+5)^2 \geq x+3$

$4x^2+20x+25-x-3 \geq 0$

$4x^2+19x+22 \geq 0$; $f_1(x) = 4x^2+19x+22$, $f_1(x)=0$.

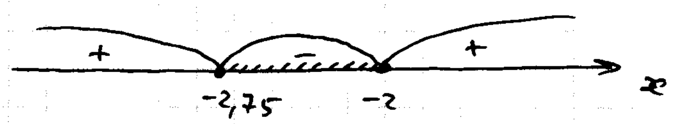
$D = 19^2 - 4\cdot4\cdot22 = 361-352 = 9$

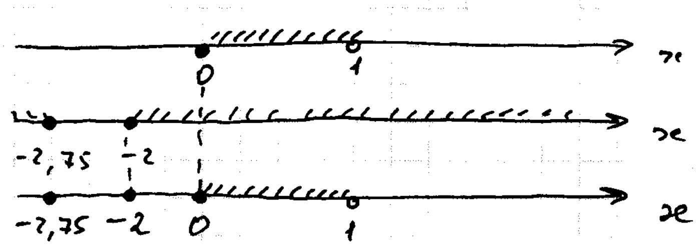
$x = \frac{-19\pm3}{8}$, $x_1 = -\frac{11}{4}$, $x_2 = -2$.

① 

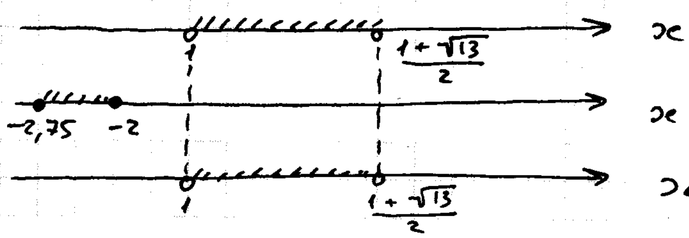
• Если $x \in (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$, то $\sqrt{x+3}-x < 1$, тогда:

$x+5 \leq \sqrt{x+3}-x$

② 

Дне ① 

$x \in [0;1) \cup \{-2,75\} \cup \{-2\}$.

Дне ② 

Но $-2,75$ не уд. нач. ур.

Тогда $\Rightarrow$

Получим: $x \in \{-2\} \cup [0;1) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

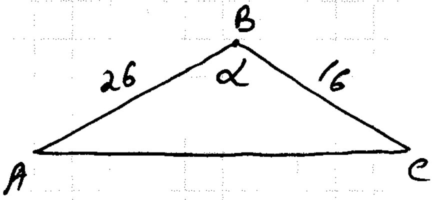
Ответ $x \in \{-2\} \cup [0;1) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

№ 1 1. Найдем длины отрезков отсекаемые параболой $y = x^2$.

$x^2 = 169$, $x_1 = -13$, $x_2 = 13$; Длина 26

$x^2 = 64$, $x_1 = -8$, $x_2 = 8$, Длина 16

а) Пусть $\alpha = 120°$ между $AB\ (26)$ и $BC\ (16)$, тогда:



$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120° =$

$= 26^2 + 16^2 + \cancel{2} \cdot 26 \cdot 16 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \cancel{676 + 256} =$

$= 2^2 \cdot 13^2 + 2^2 \cdot 8^2 + 2^2 \cdot 8 \cdot 13 =$

$= 2^2(13^2 + 8^2 + 8 \cdot 13) = 2^2(169 + 64 + 104) = 2^2 \cdot 337$

$AC = 2\sqrt{337}$, тогда $x_1 = -\sqrt{337}$, $x_2 = \sqrt{337}$.

$y = 337$, при $a = 337$.

б) Пусть $\alpha = 120°$ между AB и AC, тогда:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = AB^2 + AC^2 + AB \cdot AC$.

$AC^2 = BC^2 - AB^2 - AB \cdot BC$, но $BC < AB$,

значит такого Δ не существует.

в) Пусть $\alpha = 120°$ между BC и AC, тогда:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 + BC \cdot AC \rightarrow$

$\rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 - BC \cdot AC =$

$= 26^2 - 16^2 - 26 \cdot 16 = (26 - 16)(26 + 16) - 26 \cdot 16 =$

$= 420 - 476 < 0$, значит Δ не существует.

Ответ: при $a = 337$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

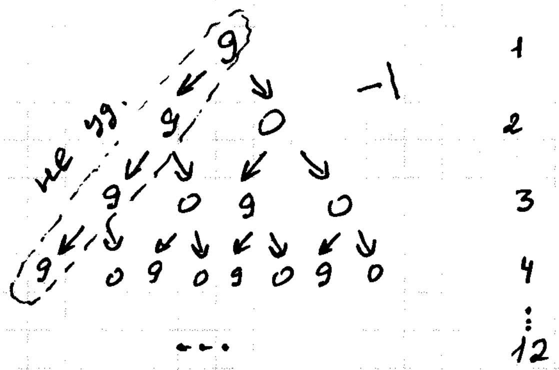
№3 Число 555555 может стоять на любом из 13 мест, в свою очередь, свободных мест для цифр остается 12.

На каждом из этих свободных мест может стоять цифры 0 и 9, тогда

1. Когда 555555 — стоит в начале

~~0~~

т.к число получается 17-значное.

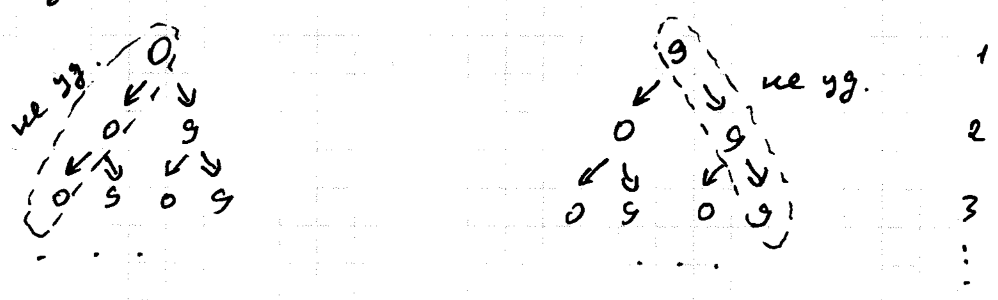


① ② ③ ④

$1 \to 2 \to 4 \to 8 \ldots$ — геом. прогрессия, $b_1 = 1$, $q=2$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = 2^{11}$ = количество вариантов для 1го случая.

2. Когда 555555 — не стоит в начале



Тогда количество вариантов $2^{11} \cdot 2 = 2^{12}$.

3. Всего 13 мест, если число стоит на 1м, то 2^{11}, если нет, то 2^{12}. Мест где это число стоит не на 1: $13 - 1 = 12$, тогда:

Всего вариантов: $2^{11} + 12 \cdot 2^{12} = 2^{11}(1 + 24) = 2^{11} \cdot 25 =$

$= 1024 \cdot 50 = 51200$.

~~[illegible]~~

Но по условию: каждая цифра встречается хотя бы один раз, тогда

Тогда нужное количество:

$51200 - 1 - 2 \cdot 12 = 51200 - 25 = 51175$ тк

в 1м случае 0 не может стоять на 1м месте, то -1.

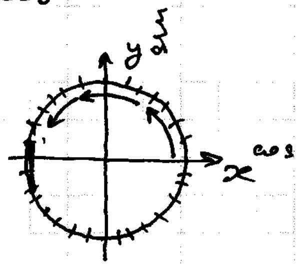
Ответ 51175 чисел.

№ 2 $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x \underbrace{- \sin^2 7x - \cos^2 x - 3}_{\text{всегда отрицательные}}$.

Тк $(-\sin^2 7x - \cos^2 x - 3)$ - всегда отрицательна, то нужно рассмотреть точки, где значение этого выражение максимально и минимально.

- если $\cos x = 1$ $(x = 2\pi n, n \in Z)$, то $\sin 7x = 0$.
- если $\sin 7x = 1$ $(x = \frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\pi k, k \in Z)$, то $\cos x =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\pi k, k \in Z\right)$.



Пусть $k = 0$, $x = \frac{\pi}{14}$ - косинус максимален

$k = 1$, $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7} = \frac{5\pi}{14}$

$k = 2$, $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi \cdot 2}{7} = \frac{9\pi}{14}$

$k = 3$, $x = \frac{13\pi}{14}$. - косинус минимален

$y(\frac{\pi}{14}) \approx 1 - 1 - 0 - 3 \approx -3$

$y(\frac{13\pi}{14}) \approx 0 - 0 - 1 - 3 \approx -4$ (больше -4) либо при $(x = \frac{\pi}{2})$

$y(0) = 0 - 0 - 1 - 3 = -4$

Ответ $y_{наиб} = -3$; $y_{наим} = -4$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3.$

$g'(x) = (\sin 5x \cdot \sin 9x)' - (\sin^2 7x)' - (\cos^2 x)' =$

$= (\sin 5x)' \sin 9x + (\sin 9x)' \sin 5x - 2\cancel{(\sin 7x)'} \sin 7x \cdot 7 - 2\cancel{(\cos x)'} \cos x \cdot$

$\cdot \sin x. =$

$= 5\cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x - 2\cos 7x \cdot 7 + 2 \cancel{\cos x} \cdot \sin x.$

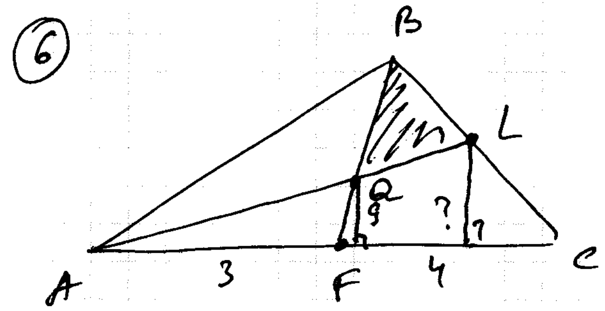
$g'(x) = 5\cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x - 2\cos 7x \cdot 7 + 2\sin x.$

$g'(x) = 5\cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x - 14\cos 7x + 2\sin x. = 0$

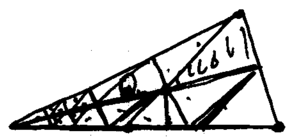
$5\cos 5x \sin(5x + 4x) + 9\cos(5x+4x)\sin 5x - 14\cos(5x+2x) + 2\sin x = 0$

$5\cos 5x ($

⑥



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$



$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3.$

$\sin 5x \sin 9x - \frac{1 - \cos 14x}{2} - \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3.$

$9x \quad - 4x$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2 \cancel{\cos} \frac{\alpha - \beta}{2} \cancel{\cos} \frac{\alpha+\beta}{2}. ?$

~~sin α − sin β~~

~~cos~~

☑ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

18 зн. числа: 0, 5, 9.

75 − 6.

18 зн.

18 − 6 = 12.

555555

1 место

1) 555555 . . . .

2) · 555555 . . . .

3) ·· 555555 . . . .

· · · · · · · · · · · · 555555

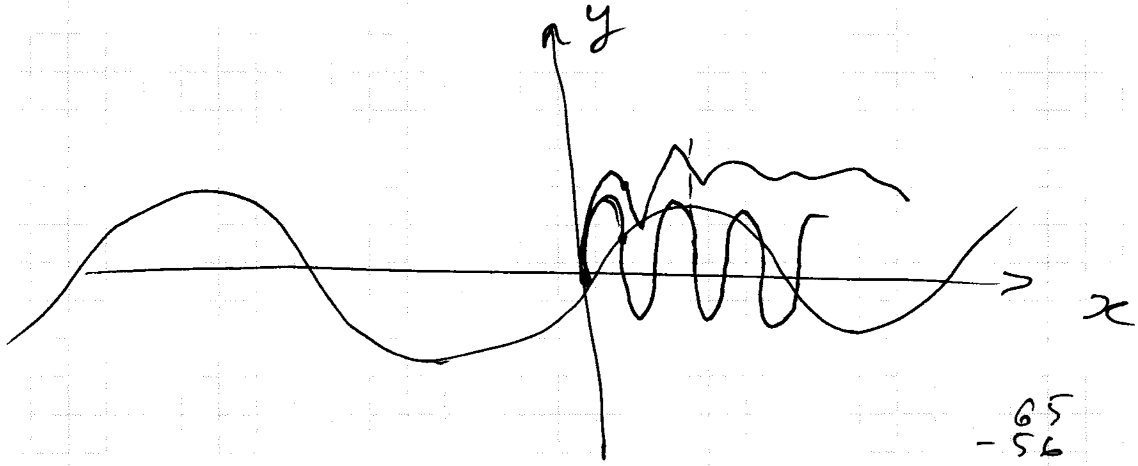
13 место.

18 − 6 = ~~13~~ 12.

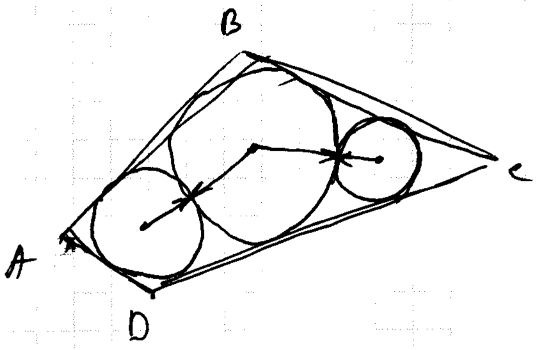
$$\begin{array}{r} 51200 \\ -\ \ \ 25 \\ \hline 51175 \end{array}$$

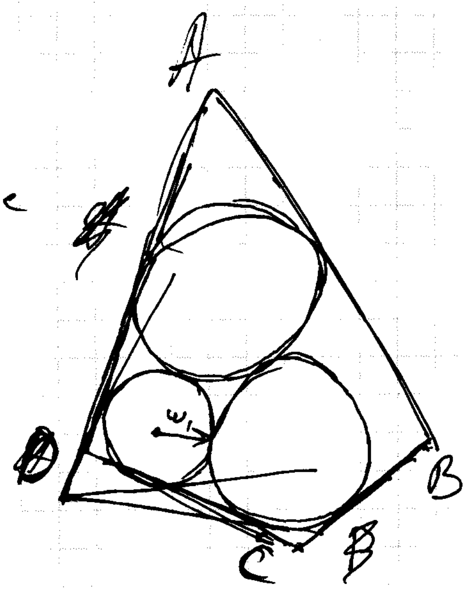
~~×1024 5~~

$$\begin{array}{r} \times 1024 \\ 5 \\ \hline 5120 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 65 \\ -56 \\ \hline 9 \end{array}$$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

МФТИ

14-066

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~5 чисел.~~ по 5 из каждого.

~~1, 37~~

~~71 - 1 = 70 : 35 = 2~~

~~71 не подходит.~~

35, 70, 105, 140

Разности любых двух не равны

35, 70, 105, 140, тогда:

~~1, 2, 3~~ деление на 5.

$5 \cdot 7 \quad 5 \cdot 7 \cdot 2 \quad 5 \cdot 7 \cdot 3 \quad 5 \cdot 7 \cdot 4.$

$\cancel{106}$ − $\cancel{71}$ = $\cancel{35}$ $\qquad 106 - 76 = 30 \qquad 106 - 77 = 29$

$107 - 76 = 31$

~~...~~ 106, 107, 108, 109, 110

106: ~~71~~; ~~72~~; ~~73~~, ~~74~~, ~~75~~, 76, 77, 78, 79, 80 (30, 29, 28, 27, 26)

107: 76, 77, 78, 79, 80 (31, 30, ..., 25)

108: 32

109: 33

110: 34 ✓

~~36~~, ~~37~~, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~, ~~41~~, ~~42~~, ~~43~~, ~~44~~, ~~45~~, 46, 47, 48, 49, 50

~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6, 7, 8, 9, 10~~, ~~11, 12, 13, 14, 15~~, 16, 17, 18, 19, 20. ✓

~~Возьмем~~

$$\left.\begin{array}{l} 106 \times 5 + 10 \\ 76 \times 5 + 10 \\ 46 \times 5 + 10 \\ 16 \times 5 + 10 \end{array}\right\}$$

$106 \times 5 + 1 + 2 + 3 + 4 = (106 \times 5 + 10)$

$= 10 \cdot 4 + 5(106 + 76 + 46 + 16) =$

$= 40 + 5 \cdot 244 = 1220 + 40 = \underline{1260}$ ✓

$106 + 76 + 46 + 16 = 244$

$244 \times 5 = 1220$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1.

(Нумеровать только чистовики)

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1.$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x \neq 1, & (1) \\ \sqrt{x+3} - x > 0, & (2) \\ x + 5 > 0, & (3) \\ \log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1 & (4) \end{cases}$$

(1) $\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} \neq 1 + x, \\ \cancel{x \geq -3}, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

$x+3 \neq (1+x)^2$

$(x+1)^2 - x - 3 \neq 0$

$x^2 + 2x + 1 - x - 3 \neq 0$

$x^2 + x - 2 \neq 0$

$x \neq 1 \qquad x \neq -2.$ неуд усл.

$x \neq 1.$

(2) $\sqrt{x+3} - x > 0$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} > x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$x + 3 > x^2$

$x^2 - x - 3 < 0.$

$f(x) = x^2$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1.$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$26 \times 26 = 156 + 520 = 676$

$16 \times 16 = 96 + 160 = 256$

$26 : 2 = 13$

$16 : 2 = 8$

$13 \times 8 = 104$

Дри

$104 + 64 = 168$

$168 + 169 = 337$

$26 + 16 = 42$

$-\frac{22}{8} = -\frac{11}{4} = -2,75$

$19 \times 19 = 171 + 190 = 361$

$22 \times 16 = 132 + 220 = 352$

$361 - 352 = 9$

$26 \times 16 = 216 + 260 = 476$

$0,25 + 0,75$

$0,5 + 0,75 = 1,25$

$5 - 2,75.$

$5,00 - 2,75 = 2,25$

$0,5 + 2,75 = 3,25 \quad > \quad 5 - 2,75 = 2,25$

$11 : 4 = 2,75$

8, 30, 28, 20, 20, $0.$

$3,00 - 2,75 = 0,25$

$5 - 2,75 = 2,25$

$0,5 + 2,75 = 3,75.$

$0,5 + 2,75 = 3,25$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2

(Нумеровать только чистовики)