МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 4-005

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

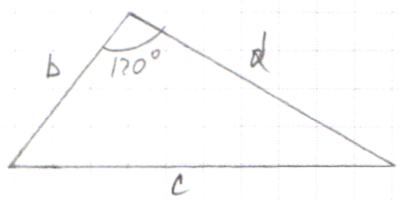
№1

При пересечении параболы $y=2x^2$ и прямой $y=98$, отрезок высекаемый параболой равен $2\cdot x$, где $2x^2=98$, $x=7$, сл. отрезок равен 14.

При пересечении параболы $y=2x^2$ и прямой $y=18$, отрезок высекаемый параболой равен $2\cdot x$, где $2x^2=18$, $x=3$, сл. отрезок равен 6.

Если из этих отрезков можно составить треугольник со сторонами 14, 6 и $\sqrt{2a}$, значит для него будет верна теорема косинусов.

При пересечении параболы $y=2x^2$ и прямой $y=a$, отрезок высекаемый параболой равен $2x$, где $2x^2=a$, $x=\sqrt{\frac{a}{2}}$, сл. отрезок равен $2\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2a}$



Рассмотрим 3 возможных случая:

1) При $c=\sqrt{2a}$, $b=14$, $d=6$, сл.

$2a=14^2+6^2-2\cdot14\cdot6\cdot\cos120^\circ=196+36+84=316$

$a=158$

2) При $c=14$, $b=\sqrt{2a}$, $d=6$, сл.

$14^2=6^2+2a-6\cdot\sqrt{2a}\cdot\cos120^\circ\cdot2$

$2a+6\sqrt{2a}-160=0$

$\sqrt{2a}=-3\pm13=-16;10$

$2a=100$

$a=50$

3) При $c=6$, $b=\sqrt{2a}$, $d=14$, сл.

$6^2=2a+14^2-2\cdot\sqrt{2a}\cdot14\cdot\cos120^\circ$

$2a+14\sqrt{2a}+160=0$

Данное уравнение не имеет корней

Ответ: $a=3{,}16$, $a=5{,}0$

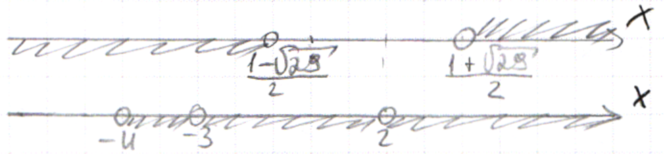
№5

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geqslant 1$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geqslant \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$$

$$D:\begin{cases}\sqrt{x+7}-x>0\\ x+4>0\\ x+7\geqslant 0\\ \sqrt{x+7}-x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-x-7>0\\ x>-4\\ x\geqslant -7\\ x+7\neq x^2+2x+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(x-\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{29}}{2}\right)>0\\ x>-4\\ x^2+x-6\neq 0\end{cases}$$

D:



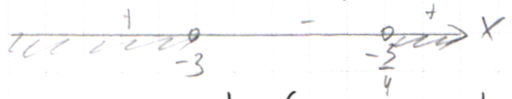
$$D:\ x\in(-4;-3)\cup\left(-3;\frac{1-\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$$

$$x+4\geqslant \sqrt{x+7}-x$$

$$2x+4\geqslant\sqrt{x+7}$$

$$4x^2+16+16x\geqslant x+7$$

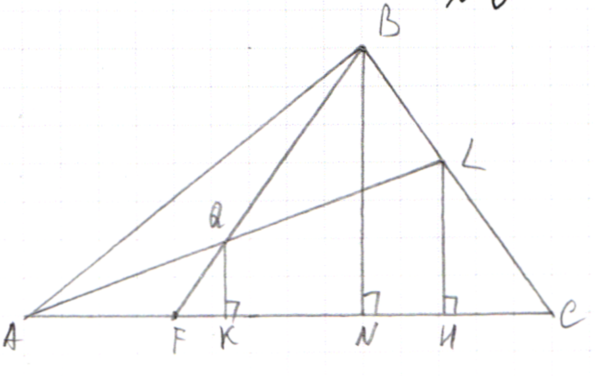
$$4x^2+15x+9\geqslant 0$$



$$x\in(-\infty;-3)\cup(-0{,}75;+\infty)$$

Ответ: $x\in(-4;-3)\cup\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$.

№6



Дано:
ΔABC, $F\in AC$
$AF:FC=2:5$
$L\in BC$, $S_{BQL}:S_{BAC}=5:12$
$Q=AL\cap BF$
$QK\perp AC$,
$BN\perp AC$
$LH\perp AC$
$QK=6$
Найти: LH-?

Решение: Пусть $AC=7x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $S_{BQL} = S_{BAC} - S_{ABF} - S_{ALC} + S_{AQF} = \frac{1}{2} AC \cdot BN - \frac{1}{2} AF \cdot BN - \frac{1}{2} AC \cdot LH + \frac{1}{2} AF \cdot QK =$

$= \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot BN - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot BN - \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot LH + \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 6 = \frac{5}{2} x \cdot BN - \frac{7}{2} x \cdot LH + 6x$

2. $S_{AQF} = \frac{1}{2} AF \cdot QK$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BN$

$$\frac{S_{AQF}}{S_{ABC}} = \frac{AF \cdot QK}{AC \cdot BN} = \frac{2x \cdot 6}{7x \cdot BN} = \frac{12}{7 \cdot BN}$$

3. $\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \left(\frac{5}{2} x \cdot BN - \frac{7}{2} x \cdot LH + 6x\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot 7x \cdot BN\right) = \left(5x \cdot NB - 7x \cdot LH + 12x\right) : \left(7x \cdot BN\right) =$

$= \left(5BN - 7LH + 12\right) : 7BN = \frac{5}{12}$

$60BN - 84LH + 144 = 35BN$

$25BN = 84LH - 144$

$BN = \frac{84LH - 144}{25}$

№7

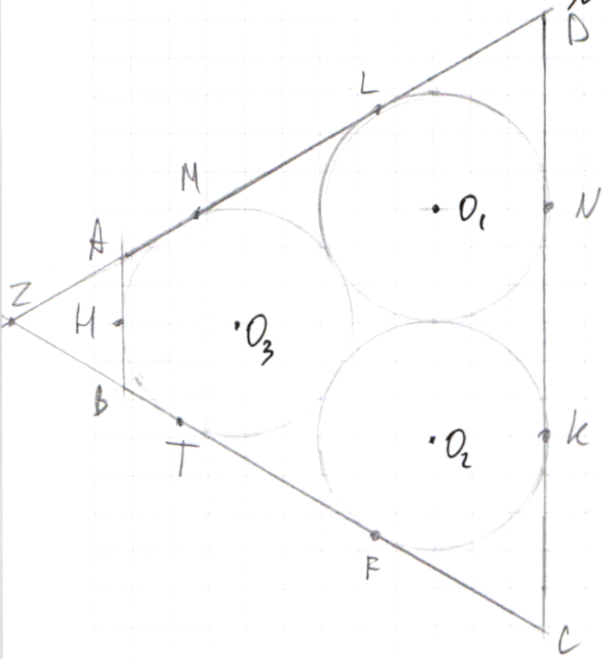
Для того, чтобы разность не делилась на 45 нужно брать числа из промежутка имеющие вид $x_2 = x_1 + 5$, ~~сл. наименьшая сумма из первого промежутка~~ при этом числа не должны совпадать по позиции в промежутке (т.е. если из одного из промежутков берется первое число, то из оставшихся промежутков уже нельзя брать первое число). Сумма в первом промежутке равна 81, во втором — 357, в третьем — 633, в четвертом — 909, в пятом — 1185. Сумма всех чисел равна 3165.

№3

$11\cdot 2\cdot 10!\cdot 9!\cdot 8!\cdot 7!\cdot 6!\cdot 5!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2! = 22\cdot 3628800\cdot 362880\cdot 40320\cdot 5040\times$

$\times 720\cdot 120\cdot 24\cdot 6\cdot 2 = 22\cdot 36288^2\cdot 4032\cdot 504\cdot 72\cdot 12\cdot 24\cdot 12\cdot 10^7 =$

№4



Дано:

ABCD - четырехугольник

$w_1(O_1; r)$, $w_2(O_2; r)$, $w_3(O_3; r)$

а) $AD + BC - AB - CD = 12$

Найти r?

б) Найти $\angle AO_3B$

в) $AO_3 \cdot O_3B = R\,58$

Найти AB

Решение:

1) Т.к. ~~AB+BC−AB−CD=12 и~~ все окружности касаются сторон (w_1 касается AD и DC, w_2 касается DC и CB, а w_3 касается CB, BA и AD), то $BH = BT$, $AH = AM$, $DL = DN$, $CK = CF$, сл. $AD + BC - AB - CD = AM + ML + LD + BT + TF + FC - AH - HB -$

$- DN - NK - KC = ML + TF - NK$

2) Т.к. у всех окружностей одинаковый радиус и $O_3M \perp AD$, $O_1L \perp AD$,

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-005
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$O_1N \perp CD$, $O_2K \perp CD$, $O_2F \perp BC$, $O_3T \perp BC$, а также окружности касаются друг другу попарно, то $ML = O_1O_3 = 2r$, $NK = O_1O_2 = 2r$, $TF = O_2O_3 = 2r$, сл.

$ML + TF - NK = 2r = 12$, сл. $r = 6$

3) $\Delta O_1O_2O_3$ — равносторонний, т.к. этот треугольник создан окружностями вписанными в ΔZDC, при этом радиусы этих окружностей равны, то ΔZDC — равносторонний, сл. $\angle ZDC = 60°$, а $\angle DAB = 120°$. Т.к. $\angle DAB = 120°$, $O_3M = O_3H = 6$, $AM = AH$ и $O_3M \perp AD$, $O_3H \perp AB$, то $\angle MO_3H = 360° - 90° - 90° - 120° = 60°$

Т.к. $AO_3 = O_3B$, сл. O_3H — биссектриса ΔAO_3B и $\angle AO_3H = \frac{1}{2}\angle AO_3B$, также O_3A — биссектриса $\angle MO_3H$ и $\angle AO_3H = \frac{1}{2}\angle MO_3H$, сл. $\angle AO_3B = \angle MO_3H = 60°$

4) По теореме косинусов.

$AB^2 = AO_3^2 + O_3B^2 - 2 \cdot AO_3 \cdot O_3B \cdot \cos 60°$, т.к. $AO_3 = O_3B$, то $AO_3^2 = O_3B^2 = AO_3 \cdot O_3B =$
$= 58$

$AB^2 = AO_3^2 + O_3A^2 - 2AO_3^2 \cdot \frac{1}{2} = AO_3^2$, сл. $AB = O_3A = 58$

Ответ: $r = 6$, $\angle AO_3B = 60°$, $AB = 58$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

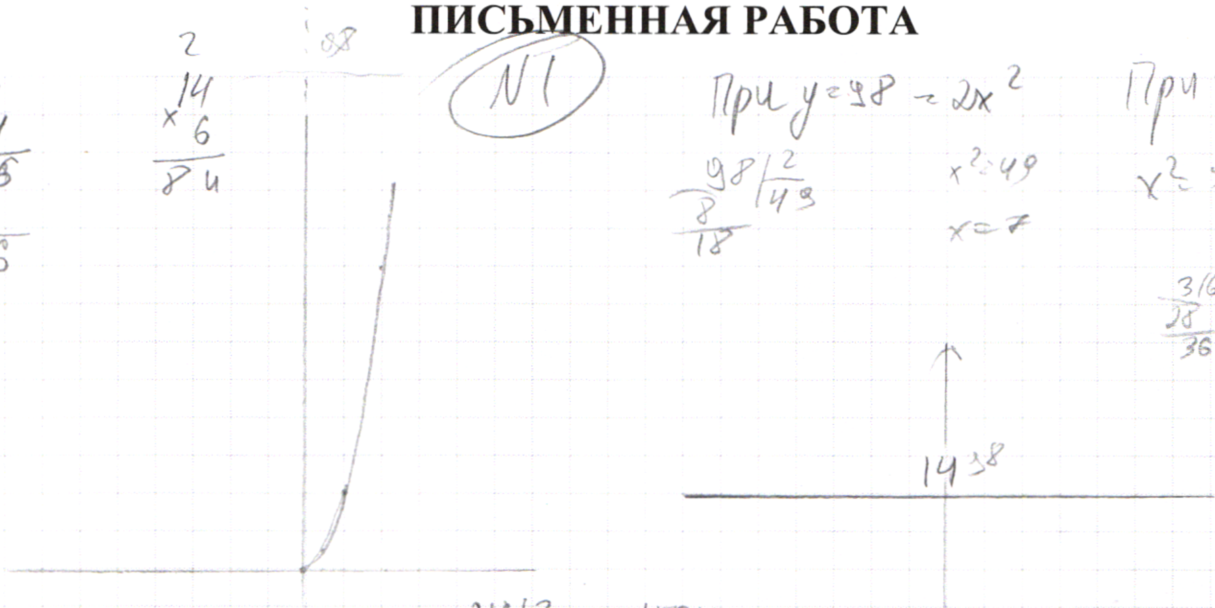
№1

$14 \cdot 14 = 196$ $\quad$ $14 \times 6 = 84$

При $y=98 = 2x^2$ $\quad$ $98 : 2 = 49$ $\quad$ $x^2=49$ $\quad$ $x=7$

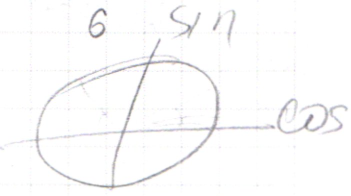
При $y=18=2x^2$ $\quad$ $x^2=9$, $x=3$

$316 : 4 = 79$



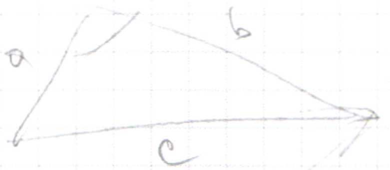
$316 : 2 = 150+8$

$14^2 =$



$c^2 = a^2+b^2-2ab \cdot \cos 120°$

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$



1) Пусть $c=a$, з.н.

$c^2 = 14^2+6^2-2\cdot 14\cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= 14^2+6^2+14\cdot 6 = 196+36+84 =$

$= 316$

$196 + 120 = 316$

2) Пусть $a=a$, $c=14$, $b=6$

$14^2 = a^2+6^2-2\cdot a\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$(6^2-14^2) = (6-14)(6+14) = 20\cdot(-8)$

$14^2 = a^2+6^2+a\cdot 6$

$a^2+6a-160=0$ $\quad$ $D_1 = 9+160 = 13^2$ $\quad$ $316 = 4\cdot 79$

$a = -3\pm 13 = \cancel{-16}; 10$

не соотв усл.

3) Пусть $b=a$, $c=6$, $a=14$

$6^2 = a^2+14^2-2a\cdot 14\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $a^2+14a+160=0$ $\quad$ $D<0$

$\cancel{x^2}$ $\cancel{2x^2}$ $\cancel{6x^4}$

№3

$11\cdot2\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2$

$11\cdot2\cdot10!\cdot9!\cdot8!\cdot7!\cdot6!\cdot5!\cdot4!\cdot3!\cdot2!$

$5<\sqrt{29}<6$

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq\log$

$\sqrt{x+7}-x>0$

$x+4>0$

$\sqrt{x+7}-x+1$

$x+4>\sqrt{x+7}-x$

$15\cdot15=75$, $15\cdot15=225$

$\sqrt{x+7}\geq x$

$x+7\geq x^2$

$x^2-x-7>0$

$-6<-\sqrt{29}<-5$

$-\frac{5}{2}<\frac{1-\sqrt{29}}{2}<-\frac{4}{2}$

$\sqrt{x+7}=1$

$x+7=x^2+2x+1$

$5<\sqrt{29}<6$

$6<1+\sqrt{29}<7$

$3<\frac{1+\sqrt{29}}{2}<3{,}5$

$36\cdot9=(6\cdot3)^2$

$D=1+4\cdot7=29$ $\quad D=b^2-4ac$

$1+4\cdot7=29$

$x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

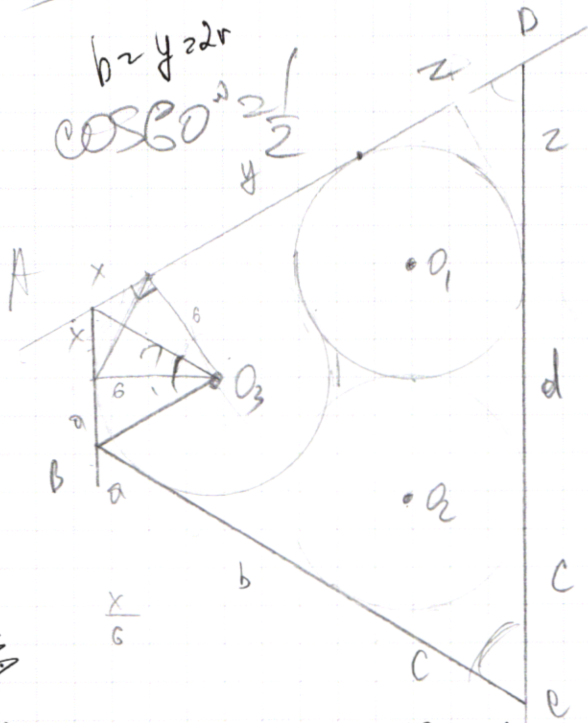
№4

$D=15^2-4\cdot9\cdot4=$

22.

$b=y=2r$

$\cos60^\circ=\frac{1}{2}$



$AD+BC-(AB+CD)=12$

$\cancel{x}+y+\cancel{z}+\cancel{a}+b+\cancel{c}-\cancel{x}-\cancel{a}-\cancel{z}-d-\cancel{c}=12$

$y+b-d=12$

$-2{,}5<\frac{1-\sqrt{29}}{2}<-2$

$5040\cdot8=40320$

$40320\cdot9=362880$

$D=1+24=25$

$x=\frac{-1\pm5}{2}=2;-3$

$D=b^2-4ac$

$15^2-4\cdot4\cdot9=(15-4\cdot3)(15+12)=$

$=3\cdot27=9^2$

$x=\frac{-15\pm9}{8}=-3$

$\frac{-(15+9)}{8}=-\frac{24}{8}$

$\frac{-(15-9)}{8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$

$2\cdot3=6$ $\quad 720\cdot7=4900+140=5040$

$6\cdot4=24$ $\quad 5040\cdot8=40320$

$24\cdot5=120$ $\quad 40320\cdot9=362880$

$120\cdot6=720$

$3<\frac{1+\sqrt{29}}{2}<3{,}5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

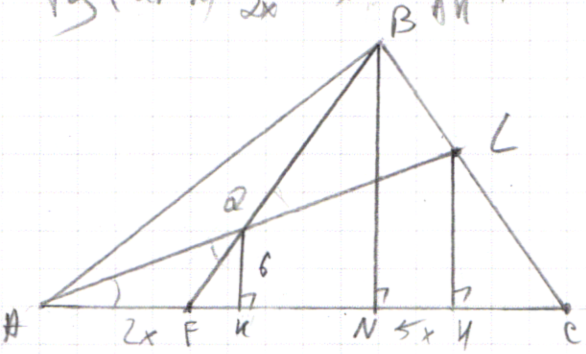
4-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg(QAK) = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x} = \frac{LH}{AH}$



$S_{BQL} = \frac{5}{12}k$

$S_{BQL} : S_{BAC} = 5 : 12$

$12 S_{BQL} = 5 S_{BAC}$

$\frac{7}{12} \cdot 5$

$\frac{7}{12} S_{ABC} = \frac{7}{12} AC \cdot \frac{1}{2} BN = \frac{1}{24} 7x \cdot BN$

$= k$

$S_{AQF} = \frac{1}{2} AF \cdot QK = \frac{1}{2} 2x \cdot 6 = 6x$

$S_{BQL} = S_{BAC} - S_{ABF} - S_{ALC} + S_{AQF} = \frac{1}{2} AC \cdot BN - \frac{1}{2} AF \cdot BN - \frac{1}{2} AC \cdot LH + \frac{1}{2} AF \cdot QK =$

$= \frac{7}{2} x \cdot BN - x \cdot BN - \frac{7}{2} x \cdot LH + x \cdot 6 = BN \cdot \frac{5}{2} x$

$12 \cdot 7$

$S_{ABF} = BN \cdot x = \frac{24}{7} k$

$\frac{5BN - 7LH + 12}{7BN} = \frac{5}{12}$

$\frac{S_{AQF}}{S_{ABC}} = \frac{12}{7BN}$

$\frac{S_{AQF}}{S_{ALC}} = \frac{2x \cdot 6}{7x \cdot LH} = \frac{12}{7LH}$

$\frac{S_{ALC}}{S_{ABC}} = \frac{LH}{BN} = \frac{CL}{BC}$

$S_{FQLC} = 12k - \frac{5}{12}k - \frac{24}{7}k$

$= 8k - \frac{3}{7}k - \frac{5}{12}k =$

$= 9k -$

$S_{AQF} = \frac{12}{7 \cdot BN} \cdot S_{ABC} =$

$S_{AQF} = 12x$

$\frac{QK}{LH} = \frac{AF}{AC}$

$S_{ALC} = S_{ABC} - S_{ABE} = S_{ABC} - S_{BQL} -$

$- S_{ABF} + S_{AQF} = S_{ABC} - \frac{5}{12} S_{ABC} - \frac{1}{2} \cdot 2x BN$

$+ 6x = \frac{7}{12} BN \cdot \frac{7}{2} x - BN\, x + 6x =$

$\cancel{\frac{LH}{BN}} = \frac{BN}{LH} = \frac{84LH - 144}{25LH} = \frac{84}{25} - \frac{144}{25LH}$

$S_{ABF} = S_{FQLC} = S_{ALC} - S_{AQF}$

$\frac{1}{2} 2x \cdot BN = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot LH - 6x$

$BN = \frac{7}{2} LN$

$BN \cdot \frac{25}{24} x + 6x = \frac{7}{2} x \cdot LH$

$BN =$

$\frac{49 - 24}{24} = \frac{25}{24}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1 . . . .
2 . . . .
3 . . . .
4 . . . .
5 . . . .

I $1+6+11+16+21+26$ $\quad 7+27+47=81$ $\quad \dfrac{a_1+(n-1)d}{} \cdot n = 1+5\cdot5\cdot5$

II $47+52+57+62+67+72$ $\quad n=3 \quad a_1+a_1+d+a_1+d\cdot2+=3a_1+3d$

III $93+98+103+108+113+118$ $\quad a_1+a_1+$

IV $139+144 \quad 149+154+159+164$

V $185+190+195+200+205+210$

$1+1+5+1+10$

$n=6 = a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d+a_1+5d$ $\boxed{=6a_1+15d}$

$100+17+5=120+2$

$6d+4d+5d=15d$ $\quad 6+75$

$6\cdot47+75$

$93+75=98+10=100+68$

$139+75=100+100+5+9=210+4$

$185+75$

$47\times6=282$, $282+75$ — II -357

$93\times6=558$, $558+75$ — III -633

$139\times6=834$, $834+75=909$

$185\times6=1110$, $1110+75=1185$

$990\times2=1980$, $1980+1185=3165$

~~75~~ 81

$81+357+633+909+1185$

$990+990+1185=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)