МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15 - 003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “7” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “8” ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

© МФТИ, 2017

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x \neq 1 \iff x\neq -3;\ x\neq 2 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \iff x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\ \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x+7\geq 0 \iff x\geq -7 \\ x+4>0 \iff x>-4 \end{cases} \iff x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\ 2\right)\cup\left(2;\ \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

$\sqrt{x+7}-x\neq 1$

$\sqrt{x+7}\neq 1+x \quad \uparrow^2$

$x+7\neq 1+2x+x^2$

$x^2+x-6\neq 0$

$D=1+4\cdot 6=25$

$x_{1,2}\neq \frac{-1\pm 5}{2}$

$x\neq -3;\ x\neq 2$

$\sqrt{x+7}-x>0$

$\sqrt{x+7}>x \quad \uparrow^2$

$x+7>x^2$

$0>x^2-x-7$

$D=1+7\cdot 4=29$

$x_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\ \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} \vee -4$

$1-\sqrt{29} \vee -8$

$-\sqrt{29} \vee -9$

$\sqrt{29} \wedge 9$

$29<81$

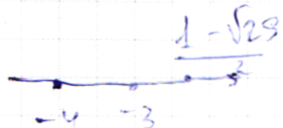
$\frac{1-\sqrt{29}}{2} \vee -3$

$1-\sqrt{29} \vee -6$

$-\sqrt{29} \vee -7$

$\sqrt{29} \wedge 7$

$29<49$



$\frac{1+\sqrt{29}}{2} \vee 2$

$1+\sqrt{29} \vee 4$

$\sqrt{29} \vee 3$

$29>9$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - 1 \geq 0$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0 \Leftrightarrow$

Т.к. логарифм – монотонно возр. непр. ф-я

$\Leftrightarrow x+4-\sqrt{x+7}+x \geq 0$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7} \quad \uparrow^2$

$4x^2+16x+16 \geq x+7$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$$\begin{cases} D = 225 - 16\cdot 9 = 225-144 = 81 = 9^2 \\ x_{1,2} = \dfrac{-15 \pm 9}{8} \\ x_1 = -3 \ ; \ x_2 = \dfrac{-6}{8} = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$ с учетом ОДЗ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{29}}{2} \vee -\dfrac{3}{4} \\ 2-2\sqrt{29} \vee -3 \\ -2\sqrt{29} \vee -5 \\ 2\sqrt{29} \wedge 5 \\ 2\sqrt{29} > 5. \end{cases} \qquad \left\{ \dfrac{1+\sqrt{29}}{2} > -\dfrac{3}{4} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty) \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

Очевидно, что число можно представить так:

_ _ _ _ _ ← 17 мест, которые нужно заполнить

Необходимо, чтобы ~~8~~ 7 8-ок стояли рядом.
Рассмотрим все независимые расстановки этих восьмерок

1. 8 8 8 8 8 8 8 _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ → 2^{10} вариантов, т.к. в каждой из свободных клеточек может стоять 2 возможные цифры — 0 или 7; по правилу перемножения мы их умножаем, т.к. зависимые варианты.
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

2. _ 8 8 8 8 8 8 8 _ _ _ _ _ _ _ _ _ → 2^9 вариантов.
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
1 вариант, только 7 может стоять на 1-ом месте

3. $1 \cdot 2 \cdot$ 8 8 8 8 8 8 8 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ → 2^9

4. $1 \cdot 2 \cdot 2$ 8 8 8 8 8 8 8 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ → 2^9

5. $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot$ 8 8 8 8 8 8 8 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ → 2^9

6. $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot$ 8 8 8 8 8 8 8 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ → 2^9

7. $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ 8 8 8 8 8 8 8 $\cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ → 2^9

8. $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot$ 8 8 8 8 8 8 8 $2 \cdot 2 \cdot 2$ → 2^9

9. $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ 8 8 8 8 8 8 8 $\cdot 2 \cdot 2$ → 2^9

10. $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot}8888888\underbrace{\quad}_{\cdot 2} \to 2^9$

11. $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}8888888 \to 2^9$

Т.к. все варианты нахождения "условий" восьмерок в числе независимы, суммируем.

$\Rightarrow 2^{10}+10\cdot 2^9 = 2^{10}+5\cdot 2^{10} = 6\cdot 2^{10} = 3\cdot 2^{11}$

Ответ: $6\cdot 2^{10} = 3\cdot 2^{11} = 6144$

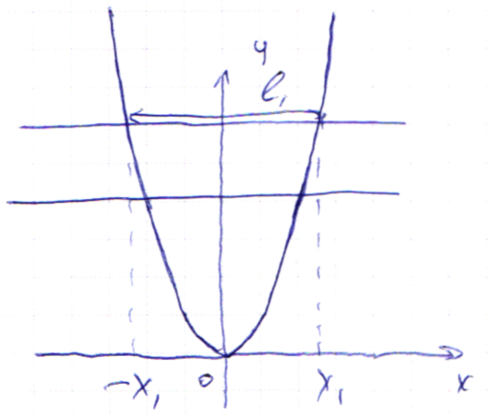
№1.

$y=2x^2$

$y=98$

$y=18$

$y=a$.



это выглядит примерно так.

Сначала найдем l_1 и l_2 – уже известные стороны Δ.

1. $y_1 = 98 = 2x_1^2$

$49 = x_1^2$

$x_1 = \pm 7$

$l_1 = |x_1 - (-x_1)| = |2x_1| = 14.$

2. $y_2 = 18 = 2x_2^2$

$9 = x_2^2$

$x_2 = \pm 3$

$l_2 = |x_2 - (-x_2)| = |2x_2| = 6.$

3. $y_3 = a = 2x_3^2$

$x_3^2 = \frac{a}{2}$

$x_3 = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

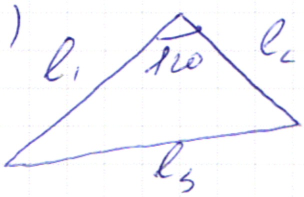
$l_3 = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$

$l_3^2 = 2a$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Есть 3 варианта получившегося Δ:

1)



по т. косинусов:

$l_3^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2\cos 120^\circ \cdot l_1 l_2$;

$l_3^2 = 196 + 36 + 6\cdot 14 = 196+36+84 =$

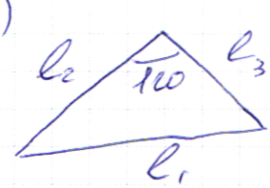
$= 120 + 196 = 316$

$l_3^2 = 2a = 316$

$a = \frac{316}{2} = 158$

$\underline{a = 158}$

2)



по т. косинусов:

$l_1^2 = l_2^2 + l_3^2 - 2\cdot\cos 120\, l_2 l_3 =$

$= l_2^2 + l_3^2 + l_2 l_3$

$l_3^2 + 6l_3 + 36 - 196 = 0$

$l_3^2 + 6l_3 - 160 = 0$

$D = 36 + 4\cdot 160 = 640 + 36 = \cancel{676} = 4(9+160) =$

$= 4\cdot 169 = (2\cdot 13)^2 = 26^2$

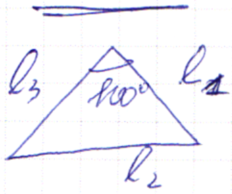
$l_3 = \frac{-6\pm 26}{2}$; $l_3 > 0$ – очевидно

$l_3 = 10.$

$l_3^2 = 2a = 100$

$\underline{a = 50}$

3)



по т. косинусов:

$l_2^2 = l_3^2 + l_1^2 + l_3 \cdot l_1$

$l_3^2 + l_3 \cdot l_1 + l_1^2 - l_2^2 = 0$

$l_3^2 + 14 l_3 + 196 - 36 = 0$

$l_3^2 + 14 l_3 + 160 = 0$

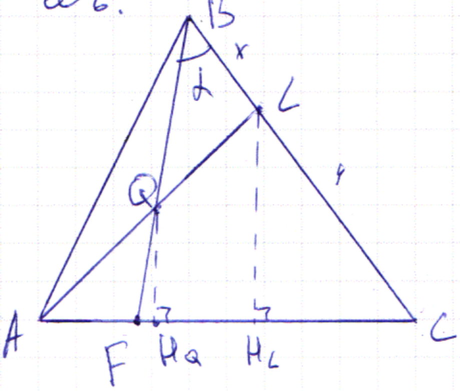
$D = 196 - 4 \cdot 160 < 0 \Rightarrow$ нет решений

Объединим все варианты,

$\left[\begin{array}{l} a = 50 \\ a = 158. \end{array}\right.$

Ответ: $a = 50$; $a = 158$.

№6.



$AF : FC = 2 : 5$

$S_{BQL} : S_{ABC} = 5 : 12$

$QH_Q = 6$

$LH_L - ?$

Решение:

Пусть $BL : LC = x : y$.

По т. Менелая для $\triangle FBC$ и AL:

$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CA}{FA} \cdot \frac{FQ}{QB} = 1$; $\frac{QF}{BQ} = \frac{y}{x} \cdot \frac{2}{7}$; $QF = BQ \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{2}{7}$

$BF = QB \left(1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{2}{7}\right)$

для $\triangle ALC$ и BF:

$\cancel{\frac{CF}{FA} \cdot \frac{AQ}{QL}}$ $\frac{CB}{BL} \cdot \frac{LQ}{QA} \cdot \frac{AF}{FC} = 1$; $\frac{LQ}{QA} = \frac{2}{5} \cdot \frac{y}{x+y}$; $LQ = \frac{2y}{5(x+y)} \cdot QA$

$S_{BQL} = \frac{5}{12} S_{ABC}$; $S_{BCF} = \frac{5}{7} \cdot S_{ABC} = \frac{FC}{AC} \cdot S_{ABC} \Rightarrow$

$S_{BQL} = \frac{7}{12} S_{BCF}$.

$S_{BQL} = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot BQ \cdot BL$

$S_{BCF} = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot BF \cdot BC$ $\Bigg| \Rightarrow \frac{S_{BQL}}{S_{BCF}} = \frac{BQ}{BF} \cdot \frac{BL}{BC} = \frac{7}{12}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BCF}} = \frac{1}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{2}{7}} \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{x}{x+y} \cdot \frac{7x}{2y + 7x} = \frac{7}{12}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{7}{12} = \frac{7x^2}{(x+y)(2y+7x)}$$

$$(x+y)(2y+7x) = 12x^2$$

$$2xy + 2y^2 + 7x^2 + 7xy = 12x^2$$

$$2y^2 + 9xy - 5x^2 = 0 \quad |:xy$$

$$2\frac{y}{x} + 9 - 5\frac{x}{y} = 0 \quad ; \frac{x}{y} = k \text{ - замена.}$$

$$2\frac{1}{k} + 9 - 5k = 0$$

$$\frac{-5k^2+9k+2}{k} = 0.$$

$$-5k^2+9k+2=0$$

$$5k^2-9k-2=0$$

$$D = 81 + 4\cdot5\cdot2 = 81+40 = 121 = 11^2$$

$$k_{1,2} = \frac{9\pm11}{2\cdot5} \quad ; k>0.$$

$$k = \frac{10}{5} = 2. \quad ; \boxed{k=2}$$

$$\boxed{\frac{x}{y}=2} \Rightarrow x=2y$$

$\triangle AQH_Q \sim \triangle ALH_L$ ($\angle QAH_Q = \angle LAH_L$; QH_Q и LH_L - высоты)

$$\Rightarrow \frac{QH_Q}{LH_L} = \frac{AQ}{AQ+QL} = \frac{AQ}{AQ(1+\frac{2y}{5(x+y)})} = \frac{5(x+y)}{5x+7y} = \frac{5\cdot3y}{5\cdot2y+7y} =$$

$$= \frac{15y}{17y} = \frac{15}{17}$$

$$H_LL = \frac{17}{15}\cdot QH_Q = \frac{17}{15}\cdot6 = \frac{17}{5}\cdot2 = \frac{34}{5} = \frac{68}{10} = 6{,}8.$$

$$LH_L = 6{,}8$$

Ответ: $LH_L = 6{,}8$

№2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}(2\cos^2 5x - 1) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\cos^2 5x} + \frac{1}{2} - \sin^2 x + \cancel{\cos^2 5x} + 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + 4{,}5 =$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) - \sin^2 x + 4{,}5 = \cos^2 2x - \cancel{\frac{1}{2}} - \sin^2 x + \cancel{\frac{1}{2}} + 4 =$

$= \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 = (1 - 2\sin^2 x)^2 - \sin^2 x + 4$

Замена: $\sin^2 x = t$; $t \in [-1; 1]$.

$g(t) = (1-2t)^2 - t + 4 = 1 + 4t^2 - 4t - t + 4 =$

$= 4t^2 - 5t + 5$ ← парабола => минимум при:

$t_0 = \frac{+5}{2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$.

$g(\frac{5}{8}) = g_{min} = 4\frac{25}{64} - \frac{25}{64} + 5 = \frac{3 \cdot 25}{64} + 5 =$

$= \frac{75 + 5 \cdot 64}{64} = 5\frac{11}{64}$.

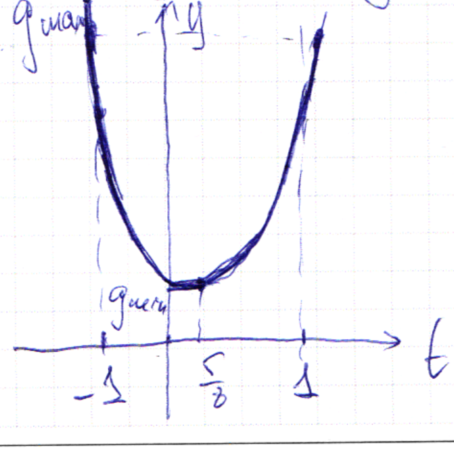
g_{max} находится в крайней (одной из) точек: $t = \pm 1$.

$g(-1) = 4 + 5 + 5 = 14$

$g(1) = 4 - 5 + 5 = 4$ => $g_{max} = 14$.

Ответ: $g_{min} = g(\frac{5}{8}) = 5\frac{11}{64}$

$g_{max} = g(-1) = 14$.



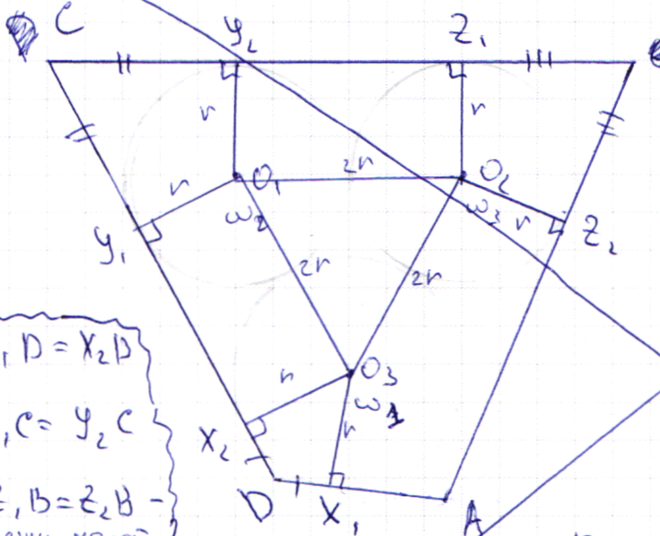
← примерный график

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-003
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$AD+BC-AB-CD=12.$

$r_1=r_2=r_3=r$

$X_1D=X_2D$
$Y_1C=Y_2C$
$Z_1B=Z_2B$ – отрезки касат.

Решение:

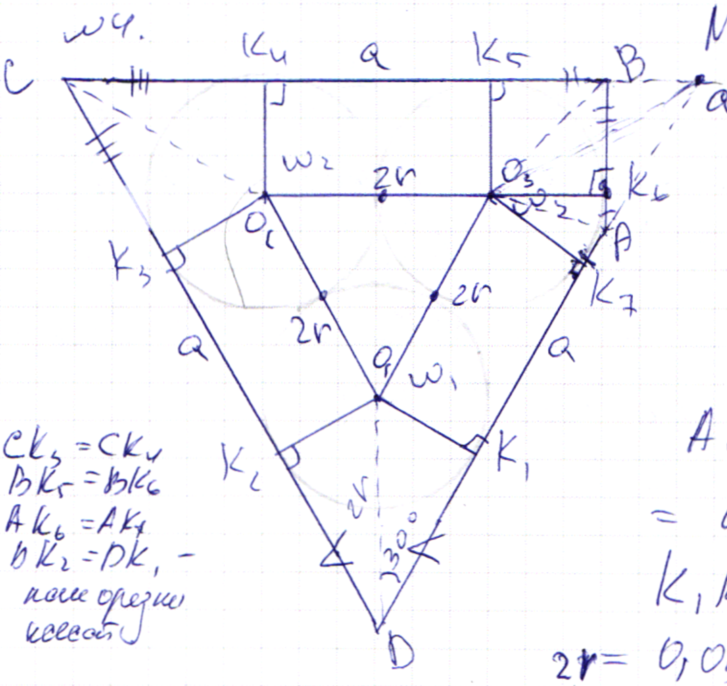
Проверим радиусы ⊥ сторонам $ABCD$.

$AD=AX_1+X_1D$; $BC=Z_1B+Z_1Y_2+Y_2C$; $AB=AZ_2+Z_2B$; $CD=CY_1+Y_1X_2+X_2D$

$AD+BC-AB-CD=AX_1-AZ_2=12$, т.к. $Y_1X_2=Y_2Z_1$ – т.к. $Y_1O_1O_3X_2=$
$=Y_2Z_1O_2O_1$ – по 3-м сторонам.

$\boxed{AX_1-AZ_2=12}$

№4.



$CK_3=CK_4$
$BK_5=BK_6$
$AK_6=AK_7$
$DK_2=DK_1$ – как отрезки касат.

a) Проверим радиусы окр-тей на стороны. Очевидно, что $K_4K_5=O_3O_2=K_7K_1O_1O_3=$
$=K_2K_3O_2O_1$ по 3-м сторонам.

Пусть $K_3K_2=a$.

$AD+BC-AB-CD=12=$
$=a$. ; $a=12$

$K_1K_7O_3O_1$ – прямоуг $\Rightarrow$

$2r=O_1O_3=K_1K_7=a\Rightarrow$ $\boxed{r=\frac{a}{2}=6.}$

б) Обозначим $K_6B = x$; $AK_6 = y$.

=> По т. Пифагора: $OB^2 = r^2 + K_6B^2$

$OA^2 = r^2 + K_6A^2$

По т. косинусов для $\triangle OBA$:

$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2\cos\angle AOB \cdot OB \cdot OA.$

$(x+y)^2 = r^2 + x^2 + r^2 + y^2 - 2\cos\angle AOB \sqrt{(r^2+x^2)(r^2+y^2)}$

$x^2 + 2yx + y^2 = 2r^2 + x^2 + y^2 - 2\cos\angle AOB \sqrt{(r^2+x^2)(r^2+y^2)}$

$$\cos\angle AOB = \frac{r^2 - yx}{\sqrt{(r^2+x^2)(r^2+y^2)}}$$

$S_{AOB} = \frac{1}{2}\sin\angle AOB \cdot OB \cdot OA = \frac{1}{2} r \cdot AB$

$$\sin\angle AOB = \frac{r(x+y)}{\sqrt{(r^2+x^2)(r^2+y^2)}}$$

$\sin^2\angle AOB + \cos^2\angle AOB = 1. = \dfrac{r^2(x^2+2yx+y^2) + r^4 + y^2x^2 - 2r^2yx}{(r^2+x^2)(r^2+y^2)} =$

$= \dfrac{r^4 + y^2x^2 + r^2(x^2+y^2)}{r^4 + r^2(x^2+y^2) + x^2y^2} = 1.$ – и правда...

...

$\angle BO_3K_6 = \frac{1}{2}\angle K_5O_3K_6$

$+$

$\angle AO_3K_6 = \frac{1}{2}\angle K_7O_3K_6$

$\angle BO_3A = \frac{1}{2}(\angle K_5O_3K_6 + \angle K_7O_3K_6) = \frac{1}{2}\angle K_7O_3K_5.$

Если продолжить AD и CB до пересеч. в (.) N, то получится CDN – равност. $\triangle$ (всилу симметрии)

$\Rightarrow \angle K_5NK_7 = 60^\circ \Rightarrow$ из $K_5NK_7O_3$ (четырехуг.)

$\angle K_7O_3K_5 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$

$\Rightarrow \angle BO_3A = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

$\boxed{\angle BO_3A = 60^\circ}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

в) $S_{AO_3B} = \frac{1}{2}\sin\angle AOB \cdot OB \cdot OA = \frac{1}{2}\cdot r \cdot AB$

$AB = \frac{\sin\angle AOB \cdot OB \cdot OA}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{58}{6} =$

$= \frac{\sqrt{3}\cdot 29}{6}$

Ответ: $r = 6$; $\angle BO_3A = 60°$; $AB = \sqrt{3}\cdot\frac{29}{6}$

№7.

$[1;45]$, $[46;90]$, $[91;135]$, $[136;180]$, $[181;225]$

$\{a_1, \ldots, a_6\} = A$ | $\{b_1, \ldots, b_6\} = B$ | $\{c_1, \ldots, c_6\} = C$ | $\{d_1, \ldots, d_6\} = D$ | $\{e_1, \ldots, e_6\} = E$.

$\forall x, y: (x \neq y;\ x, y \in A \cup B \cup C \cup D \cup E)$:

$(x-y) \not\vdots\ 45$.

$\min(a_1 + \ldots + a_6 + \ldots + e_6)$ — ?

$x = 100\cdot k_1 + 10\cdot k_2 + k_3$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$y = 100\cdot l_1 + 10 l_2 + l_3$, $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$x - y = 100(k_1 - l_1) + 10(k_2 - l_2) + (k_3 - l_3)$

Если $(x-y) \vdots\ 45$, то $(x-y) \vdots\ 3, 9, 5$ — одновр-но.

1) $(x-y) \vdots\ 5 \Rightarrow (k_3 - l_3) \neq 0$ — не знач. на одну цифру

2.) $(x-y) \vdots\ 9 \Rightarrow$ сумма цифр $\vdots\ 9$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

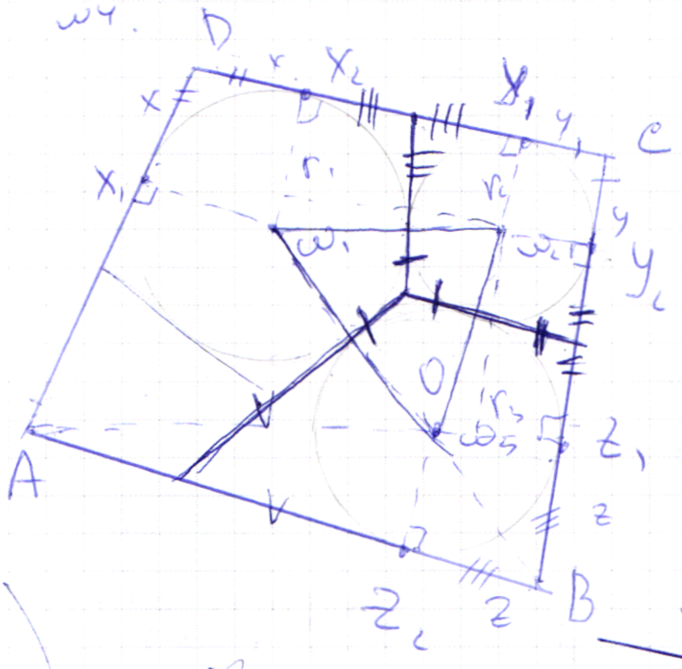
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AD + BC - AB - CD = 12$

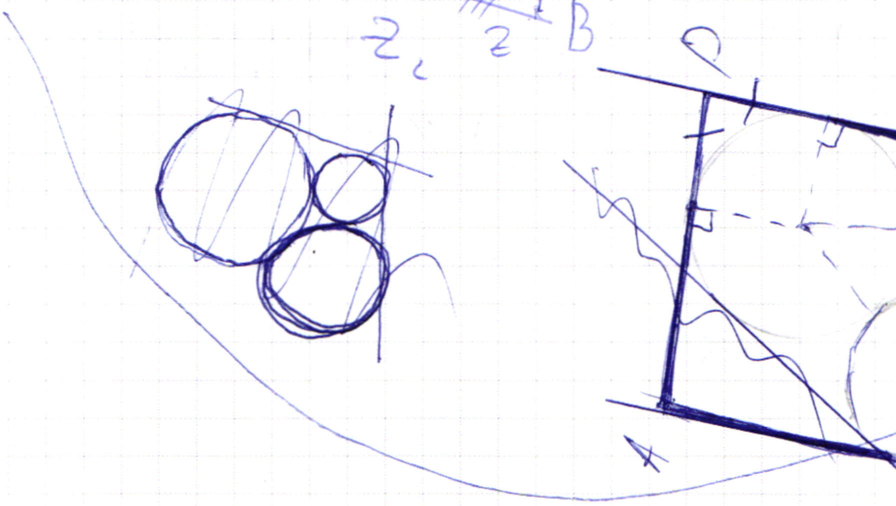
$AD = AX_1 + x$

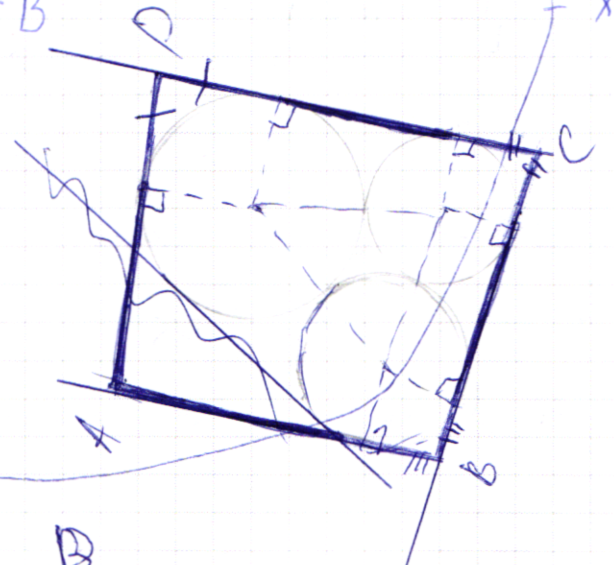
$AX_1 + x + z + y + Y_2Z_1 -$

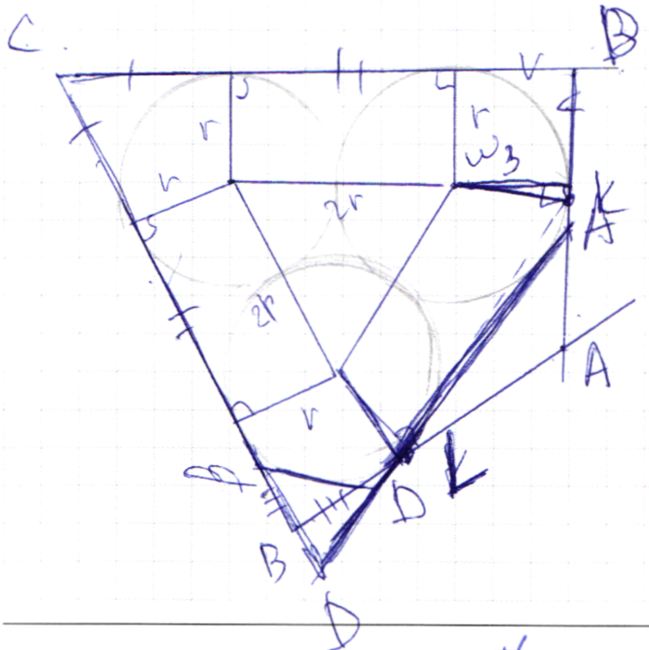
$- z - AZ_2 - x - y - X_2Y_1 =$

$= 12 = AX_1 + Y_2Z_1 - AZ_2 -$

$- X_2Y_1$







$AD + CB - AB - CD =$

$= \boxed{AK - AL = 12}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№7.

$[1;45]$; $[46;90]$; $[91;135]$, $[136;180]$; $[181;225]$

$a_1, \dots, a_6$ $b_1, \dots, b_6$ $c_1, \dots, c_6$ $d_1, \dots d_6$ $e_1, \dots, e_6$

A B C D E

$\forall x;y \left(\frac{x\neq y;}{x,y\in A \cup B \cup C \cup D \cup E}\right): |x-y| \vdots 45.$

$\Rightarrow |x-y| \vdots$ ~~...~~, 45

$\min(a_1 + \dots + e_6) - ?$

$x = 100\cdot r_1 + 10\cdot r_2 + r_3$

$y = 100\cdot m_1 + 10\cdot m_2 + m_3$

$x-y = 100(r_1-m_1) + 10(r_2-m_2) + (r_3-m_3)$

$\Leftrightarrow \boxed{r_3 \neq m_3}$ — последние цифры не совп. чтобы не $\vdots 5$

$(r_1+r_2+r_3-m_1-m_2-m_3) \vdots 3,9$ - чтобы не делилось на 3,9

~~$\left(a_1\cdot 29 - \Sigma \dots, \text{кроме } a_1\right) \neq \vdots 45.$~~

$a_1\cdot 28 - \Sigma \vdots 45.$

$\Rightarrow$ всего он выбрал 30 чисел от 1 до 225.

вряд ли что-то выйдет (

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$y=2x^2$

$y=98$

$y=18$

$y=a$

△ с углом $120°$.

$98=2x^2$

$49=x^2 \quad x=\pm 7.$

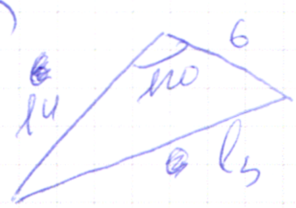
$\Rightarrow$ отрезок 1: $l_1 = |7-(-7)| =$
$= 14.$

$18=2x^2 \Rightarrow x=\pm 3.$ $l_2 = |3-(-3)| =$
$= 6.$

$14 \times 6 = 84$

$14 \times 14 = 196$

1)



по т. кос:

$l_3^2 = 14^2+6^2 - 2\cdot\cos 120\cdot 6\cdot 14 =$
$= 14^2+6^2+6\cdot 14 = 196+36+$
$+84 = \cancel{120}+196 =$
$= 316$

$316 : 4 = 79$

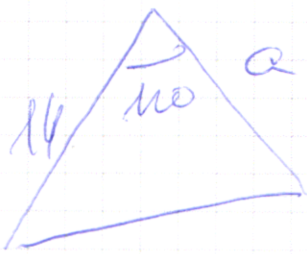
$l_3 = \sqrt{316} = 2x_3$

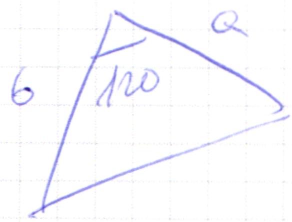
$x_3 = \sqrt{\frac{316}{4}} = \sqrt{79}$

14×14

$2x_3^2 = a$

$79\cdot 2 = a.$





$14 \times 14 = 196$

$160 \times 4 = 640$

$14 \times 6 = 84$

Нужно.

№5.

$$(1-2t)^2 - 1 - t + \frac{1}{2} + 4 =$$
$$= 1 + 4t^2 - 4t - X - t + 4{,}5$$
$$4t^2 -$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \\ \sqrt{x+7} - x > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -7 \\ x \neq 2 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x > -4 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\left\{ \sqrt{x+7} - x > 0 \right.$$
$$\sqrt{x+7} > x$$
$$x+7 > x^2$$
$$x^2 - 7 - x < 0$$
$$D = 1 + 7 \cdot 4 = 29$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$\sqrt{x+7} \neq 1+x$$
$$x+7 \neq x^2+2x+1$$
$$x^2+x-6 \neq 0$$
$$D = 1+24 = 5^2$$
$$x_{1,2} \neq \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x \neq 2$$
$$x \neq -3$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \underset{\parallel}{1} \geq 0$$
$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$$

$$x+4 - \sqrt{x+7} + x \geq 0$$
$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$
$$4x^2+16x+16 \geq x+7$$

Ну ясно.

$15 \cdot 9 = 6$, $225 - 144 = 81$, $16 \cdot 9 = 144$, $16 \cdot 9 = 126$, $75 - 64 = 11$, $6144 + 1024$, $6144 + 2048$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

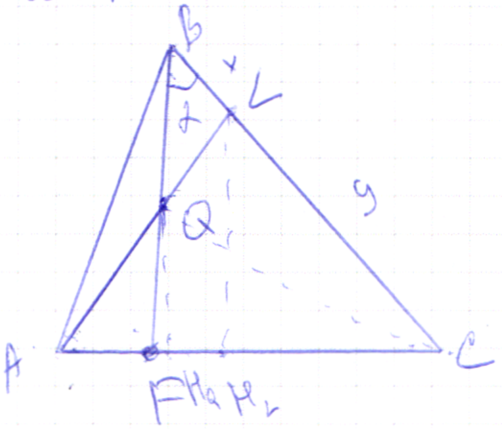
15-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



$AF : FC = 2:5$

$S_{BQL} : S_{BAC} = 8:12$

$LM_L - ?$

$QM_Q = 6$

$\Rightarrow S_{\triangle ABF} = \frac{2}{7} S_{\triangle ABC}$

$\frac{S_{AQC}}{S_{ALC}} = \frac{QM_Q}{LM_L}$ $QF = QB \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{y}{x}$

Пусть $BL : LC = x:y$

$\Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AQ}{QL} = 1.$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{QB}{QF} = 1.$ $\frac{QB}{QF} = \frac{5}{2} \cdot \frac{x}{y}$

$\frac{AQ}{QL} = \frac{y}{x} \cdot \cancel{\frac{5}{2}} \frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ $\frac{QH_Q}{LH_L} = \frac{AQ}{AQ+QL}$

$S_{BLF} = \frac{5}{7} S_{ABC}.$

$S_{\triangle} = a \cdot b \cdot \frac{1}{2} \sin\alpha \Rightarrow$ $\frac{S_{BLQ} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot QB \cdot BL}{S_{BFC} = \frac{1}{2}\sin\alpha \; BF \cdot BC}$

$\frac{S_{BLQ}}{S_{BFC}} = \frac{QB}{BF} \cdot \frac{BL}{BC} \Rightarrow$

$\parallel$

$\frac{5}{7} S_{ABC}$

$\frac{S_{BLQ}}{S_{ABC}} = \frac{7}{5} \cdot \frac{QB}{BF} \cdot \frac{BL}{BC} =$

$= \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{y}{x}} \cdot \frac{x}{x+y} =$

$=$

...

$7 + 2$

34

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3.

1. $\overbrace{8\,8\,8\,8\,8\,8\,8}^{}$ — 1 — $2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2$

2^{10}

2. 1, $8\,8\,8\,8\,8\,8\,8$, $2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2$

2^{9}

3. $1\,2$. $8\,8\,8\,8\,8\,8\,8$, $2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2$

2^{9}

4.

2^{8}

5. $8\,8\,8\,8\,8\,8\,8$

2^{8}

$\sin\alpha\cdot\ldots$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\ldots$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-$

$-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-$

$-\cos(\alpha+\beta)$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-$

$-\cos(\alpha+\beta))$

$1-2\sin^2\alpha$

ч.5.

№2.

$g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$g'(x)=3\cos 3x\cdot 7\cos 7x-2\sin x\cos x-2\cos 5x\sin 5x\cdot 5+4=$

$\sin 3x'=3\cdot\cos 3x$

$\sin 7x'=7\cdot\cos 7x$

$\sin^2 x'=2\sin x\cos x=$

$\cos^2 5x'=-2\cos 5x\sin 5x\cdot 5$.

$\cos^2 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$=3\cos 3x\cdot 7\cos 7x-\sin 2x-\sin 10x\cdot 5+4$?

$g(x)=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 10x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4=$

$=\frac{1}{2}\cos 4x-\cancel{\cos^2 5x}+\frac{1}{2}-\sin^2 x+\cancel{\cos^2 5x}+4=$

$=\frac{1}{2}\cos 4x-\sin^2 x+\frac{1}{2}+4$

$\cos^2 2x-1-\sin^2 x+\frac{1}{2}+4$

$(1-2\sin^2 x)^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)