МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 11-002

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

Так как в условии сказанно найти минимальную сумму 25 чисел, то допустим что Никонька взял самое минимальное число из промежутка [1;35] — 1. То из следующего промежутка он мог взять такое минимальное число, чтобы при вычитании от него "1", получ. число не делилось на 35, значит минимальное число из промежутка → [36;70] — 37. Рассмотрим третий промежуток [71,105]. Из этого промежутка нужно выбрать ~~такое~~ минимальное число, чтобы при вычитании от него "1" и "37", получившееся числа не делились на 35, это будет число 73. И тут можно увидеть закономерность →, каждое последующее число увеличивается на 36. Значит из промежутка [106;140] было взято число — 109, а из [141;175] — 145. Сумма чисел 1;37;73;109;145 равна 365. Следующая наименьшая пятерка чисел ~~увеличивает~~ 2;38;74;110;146. их сумма увеличивается на 5 по сравнению с предыдущей — 370. Это следующие ~~пол~~ пятерки наименьших чисел: "3;39;75;111;147", "4;40;76;112;148", "5;41;77;113;149". Общая наименьшая сумма 25 чисел = 365+370+375+380+385 = = 1845

Ответ: 1845.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$ ~~[illegible]~~

$=$ ~~[illegible]~~ ~~формулы~~ преобразования которые использовались:

$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2}\cos 14x - \frac{1}{2}\cos 4x;$ $\quad \cos 14x = 2\cos^2 7x - 1;$

$\sin^2 7x = 1 - \cos^2 7x;$ $\quad \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 14x - \frac{1}{2}\cos 4x - 1 + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}(2\cos^2 7x - 1) - \frac{1}{2}(2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1)$

$+ \cos^2 7x - \cos^2 x - 4 = \cos^2 7x - \cancel{\frac{1}{2}} - 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cos^2 7x - \cos^2 x - 4 =$

$= 2\cos^2 7x - 4\cos^4 x + 3\cos^2 x - 5 = 2\cos^2 7x - (2\cos^2 x - \frac{3}{4})^2 - \frac{71}{16}.$

1) функция достигнет максимума когда $\cos x = 1$ (либо $\cos x = -1$). т.е. $x = 2\pi n$

$g(x)_{max} = 2 - (2 - \frac{3}{4})^2 - \frac{71}{16} = -4.$

2) функция будет минимальна при $\cos x = 0$. т.е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

$g(x)_{min} = -(\frac{3}{4})^2 - \frac{71}{16} = -5.$

ответ: максимальное значение функции $g(x)$ — "-4"

минимальное — "-5".

№5.

$\log_{\sqrt{x+3} - x}(x+5) \geq 1. \Rightarrow \log_{\sqrt{x+3} - x}\left(\frac{x+5}{\sqrt{x+3} - x}\right) \geq 0.$

рассмотрим 2 случая:

I) $\begin{cases} 0 < \sqrt{x+3} - x < 1 \\ 0 < \frac{x+5}{\sqrt{x+3} - x} \leq 1 \end{cases}$

а) $0 < \sqrt{x+3} - x < 1.$

1) $\sqrt{x+3} - x > 0.$

$x^2 - x - 3 < 0$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

2) $\sqrt{x+3} - x < 1.$

$x^2 + x + 2 > 0.$

$(x+2)(x-1) > 0.$

$x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

$-2 \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad 1 \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x \in (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

б) $0 < \frac{x+5}{\sqrt{x+3} - x} \leq 1.$

1) $\frac{x+5}{\sqrt{x+3} - x} > 0$

$x_1 = -5 \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad x_3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}. \quad x_4 \neq -3.$

ОДЗ: $x \neq -3$, $x \neq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

$+ \quad + \quad -$

$-5 \quad -3 \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x \in \left(-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

2) $\frac{x+5}{\sqrt{x+3} - x} \leq 1. \quad \frac{x+5+x-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3} - x} \leq 0.$

$+ \quad - \quad + \quad + \quad -$

$-3 \quad -\frac{11}{4} \quad -2 \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -2\right] \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$

$-2 \quad -\frac{11}{4} \quad 1 \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

нет реш.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (прод.)

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>1. \\ \dfrac{x+5}{\sqrt{x+3}-x}\geqslant 1. \end{cases}$$

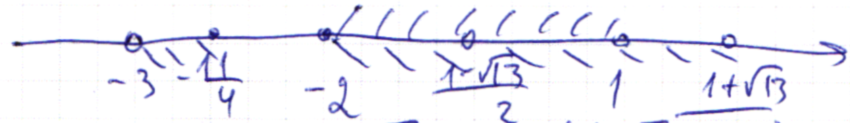
а) $\sqrt{x+3}-x>1.$

$x^2+x-2<0.$

$x\in(-2;1)$

б) $\dfrac{x+5-\sqrt{x+3}+x}{\sqrt{x+3}-x}\geqslant 0$

$x\in\left(-3;-\frac{11}{4}\right]\cup\left[-2;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$



$x\in\left[-2;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};1\right)$

ответ: $x\in\left[-2;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};1\right).$

№1.

$y=x^2$ $y=169$ $y=64.$ $y=a$

$x^2=169$ $x_{1,2}=\pm 13$ $x^2=64$ $x_{3,4}=\pm 8.$ $x^2=a$ $x=\pm a.$

$a=\sqrt{(13-8)^2+(169-64)^2}=\sqrt{11050}$ пусть a, b, c - длины сторон треугольника

$b=\sqrt{(13-\sqrt{a})^2+(169-a)^2}$

$c=\sqrt{(8-\sqrt{a})^2+(64-a)^2}$

а дальше по теореме косинусов можно найти чему равно a.

№3.

6 цифр — "5".

ост. 12 — "0" и "9"

ну расстановки — $C_{12}^{2} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = 66$.

зн. 66 способов в случае когда 6 "5"-рок первые. если двигать их в конец то всего будет 14 способов передвинуть 6 "5"-рок к концу значит ответ: $66 \cdot 14 = 924$.

□ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 1$

$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}\cos 14x - \frac{1}{2}\cos 4x + \cos^2 7x - \cos^2 x - 4 =$

$= 2\cos^2 7x - 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 1 - \cos^2 x - 4 = 2\cos^2 7x - 4\cos^4 x + 3\cos^2 x - 5 =$

$= 2\cos^2 7x - (4\cos^4 x - 3\cos^2 x + 5) = 2\cos^2 7x - (2\cos^2 x - \frac{3}{4})^2 - \frac{71}{16}$

$9 - 16 \cdot a = 0$, $a = \frac{9}{16}$, $5 - \frac{9}{16} = \frac{71}{16}$

1) ~~max = cos nx = 1~~. т.к. все cos x ~~вдв~~ в квадрате то max = 1.

$g(x)_{min} = 2 - (2 - \frac{3}{4})^2 - \frac{71}{16} = 2 - \frac{25}{16} - \frac{71}{16} = 2 - \frac{96}{16} = -4$

min = 0. т.е. $-(-\frac{3}{4})^2 - \frac{71}{16} = -\frac{80}{16} = -5$.

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.

$\log_{\sqrt{x+3}-x}\left(\frac{x+5}{\sqrt{x+3}-x}\right) \geq 0$

$\begin{cases} 0 < \sqrt{x+3} - x < 1 \\ 0 < \frac{x+5}{\sqrt{x+3}-x} \leq 1 \end{cases}$

ОДЗ: н.р.

$\sqrt{x+3} - x > 0$.

$x + 3 > x^2$

$x^2 - x - 3 < 0$

$D = 1 + 12 = 13$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$\sqrt{x+3} < 1 + x$.

$x + 3 < 1 + 2x + x^2$, $x^2 + x - 2$, $(x+2)(x-1) > 0$, $x \in (-\infty; -2) \vee (1; +\infty)$

$\boxed{x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)}$

$\frac{x+5}{\sqrt{x+3}-x} > 0$.

$x \in \left(-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \vee \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$\frac{x+5-\sqrt{x+3}+x}{\sqrt{x+3}-x} \leq 0$. $2x - \sqrt{x+3} + 5$, $\frac{4(x+2)(x+\frac{11}{4})}{\sqrt{x+3}-x} \leq 0$.

$\boxed{x \in \left[-\frac{11}{4}; -2\right]}$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -2\right] \vee \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; \infty\right)$

$2x - \sqrt{x+3} + 5 = 0$, $4x^2 + 20x + 25 = x + 3$, $4x^2 + 19x + 22 = 0$, $D = 361 - 352 = 3^2$

$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > ~~0~~ \\ \frac{x+5}{\sqrt{x+3}-x} \geq 1. \end{cases}$

1) $x + 3 > (1+x)^2$

$x^2 + x - 2 < 0$.

$\boxed{x \in (-2; 1)}$

2) $\frac{x+5-\sqrt{x+3}+x}{\sqrt{x+3}-x} \geq 0$

$x \in \left(-3; -\frac{11}{4}\right] \vee \left[-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \vee \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$x \in \left[-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \vee \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 1\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

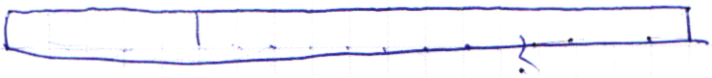
(Нумеровать только чистовики)

55555500.

$18 - 6 = \boxed{12}$

P.(

$C_{12}^{2} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 11 \cdot 6 = 66.$



$$\begin{array}{r} 66 \\ \times\ 14 \\ \hline 264 \\ 66 \\ \hline 924 \end{array}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

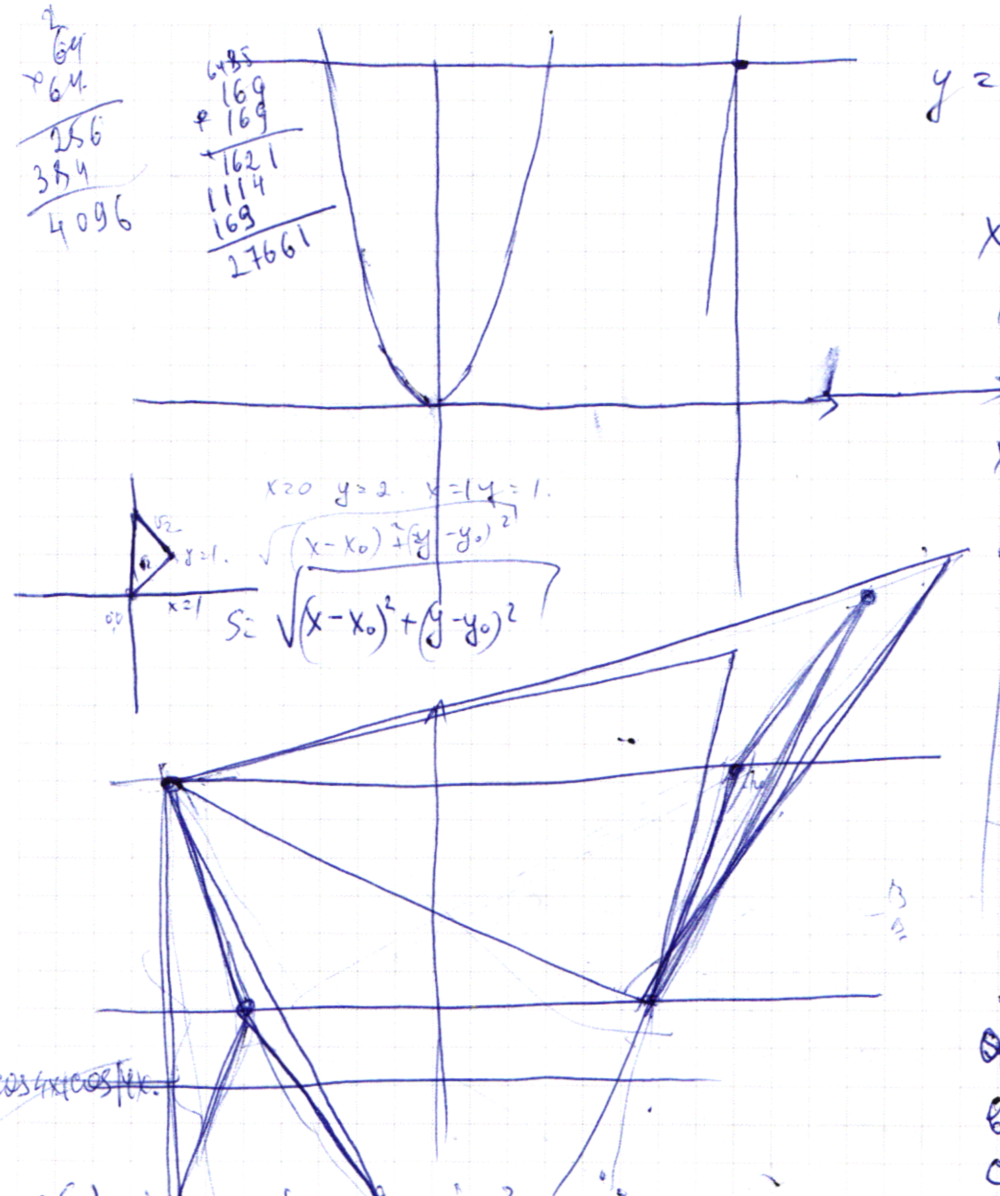
11-002
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$64 \cdot 64 = 4096$

$169 \cdot 169 = 27661$

$105 \cdot 105 = 11025$



$y = x^2 \quad y = 169.$

$y = 64.$

$x^2 = 169$

$x_1 = 13 \quad x_2 = -13.$

$x^2 = 64$

$x = 8 \quad x = -8.$

$y = 9.$

$x=0 \; y=2. \; x=1 \; y=1.$

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$S = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

1) $x = 8. \quad y = 64.$

2) $x = 13 \quad y = 169.$

$y = 169.$

3) $x = \sqrt{a} \quad y = a.$

$x = 8.$

$y = 13$

11050.

$y = 6425 + 11025$

$169 - 64 = 105$

$a = \sqrt{(13-8)^2+(169-64)^2} = \sqrt{11050}$

$b = \sqrt{(13-\sqrt{a})^2+(169-a)^2}$

$c = \sqrt{(8-\sqrt{a})^2+(64-a)^2}$

$\frac{1}{2}\cos 4x + \cos 14x.$

$169 + 169 = 338$, $64 + 64 = 128$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$\sin 14x. \quad + \sin 2x.$

$g'(x) = 5\cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x. - 2\sin 7x\cos 7x + 2\cos x \sin x = 0$

$338a - 128a = 210a$

$-16\sqrt{a} + 26\sqrt{a} = 10\sqrt{a}$

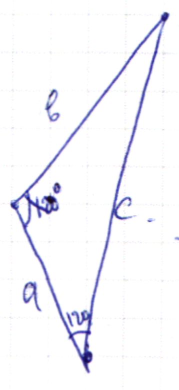
$4096 + 64 = 4160$, $4160 - 169 = 3991$

$27661 + 11050 = 38711$, $38711 - 3991 = 34720$

$\cos 2x =$

$(8-\sqrt{a})^2 + (64-a)^2 = \cancel{(13-\sqrt{a})^2 + (169-a)^2} + 11050 + \sqrt{11050}\sqrt{(13-\sqrt{a})^2+(169-a)^2}$

$\cancel{64 + 4096 = 169 + 27661 + 11050 +}$



$\cancel{13-\sqrt{a}}\; 64 + 4096 + 10\sqrt{a} + 210a = 169 + 27661 + 11050$

$210a + 10\sqrt{a} - 34720 = \sqrt{11050}\sqrt{(13-\sqrt{a})^2+(169-a)^2}$

25+

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1.$

$\log_5 5 = 1. \quad \log_5 25 > 1.$

1) $\begin{cases} x+5>1 \\ \sqrt{x+3}-x>1 \\ \boxed{x+5=\sqrt{x+3}-x} \end{cases}$

$4x^2+20x+25=x+3.$

$4x^2+19x+22=0.$

$D=261-$

ОДЗ:

$x+5>1$

$\boxed{x>-4}$

$\sqrt{x+3}-x>0.$

$\sqrt{x+3}-x\neq 1.$

$x+3\neq x^2+2x+1$

$x^2+x-2\neq 0.$

$(x+2)(x+1)\neq 0$

$\boxed{x\neq -2 \quad x\neq 1}$

$x+3>x^2$

$x^2-x-3<0.$

$D=1+12=13$

$x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

---

1) 1, 37, 73, 109, 145.

2) 2, 38, 74, 110, 146. +5

3) 3, 39, 75, 111, 147. +5

4) 4, 40, 76, 112, 148. +5

5) 5, 41, 77, 113, 149. +5.

+20.

$38+182+145=365.$

$365 \times 5 = 1825$

$+20$

$\boxed{1845}$

AF:FC = 3:4.

S(BQL):S(BAC) = 1:16.

$\sin 5x \cdot \sin 9x.$

$2\cos^2 2x - 1.$

$~~2\cos 7x~~ = 2\cos 2x - 2\cos 7x = \cos^2 x + \cos^2 7x - 3 + 2$

$y(x) = (\cos 7x-1)^2 + \cos^2 7x + 4\cos^2 x - 7 = -6.$

$= (\cos 7x-1)^2 + 3\cos^2 x - 7 =$

$= (\cos 7x-1)^2 + 3(\cos^2 x - 1) - 4 = \quad -4; \max 0.$

$y'(x) = 2\cdot 7\sin 7x(\cos 7x-1) - 3\sin 2x =$

$= -7\sin 14x - 3\sin 2x + 14\sin 7x = 0.$

$7\sin 14x + 3\sin 2x - 14\sin 7x = 0.$

$2\pi n \quad \pi k.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)