

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕСНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

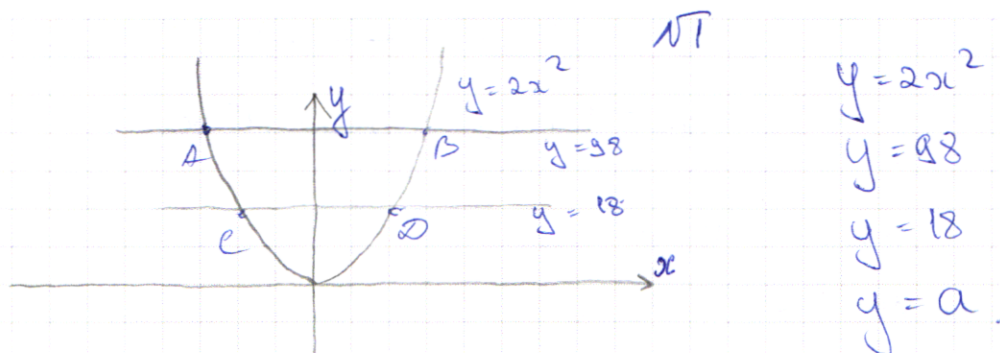
ШИФР

6-009

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\Rightarrow 2x^2 = 98 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow AB = 14.$$

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow \frac{AB}{CD} = 6.$$

$$\Rightarrow y = a \Rightarrow a = 2x^2 \quad x = \sqrt{\frac{a}{2}} \quad , \quad \text{Путь стороны } MN = 2x = \sqrt{2a}.$$

\Rightarrow Т.к. угол $120^\circ \Rightarrow$ по т. косинусов.

$$1) \quad 2a = AB^2 + CD^2 - 2AB \cdot CD \cdot \cos 120^\circ$$

$$2a = 196 + 36 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 6 \Rightarrow a = \frac{316}{2} \Rightarrow a = 158$$

$$2) \quad AB^2 = CD^2 + 2a + 2\sqrt{2a} \cdot CD \cdot \frac{1}{2}$$

$$196 = 36 + 2a + 6\sqrt{2a}, \quad \text{Пусть } \sqrt{2a} = x, \quad x \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 6x - 160 = 0 \Rightarrow D = 36 + 640 = 20^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm 20}{2} = \begin{cases} 7 \\ -13 \end{cases}, \text{ но } x \geq 0.$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a} = 7 \Rightarrow a = 49.$$

$$3) \quad CD^2 = AB^2 + 2a + 2\sqrt{2a} \cdot 14 \cdot \frac{1}{2}$$

$$36 = 196 + 2a + 14\sqrt{2a} \Rightarrow \text{Пусть } \sqrt{2a} = x, \quad x \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 14x + 160 = 0 \Rightarrow D < 0, \Rightarrow \emptyset$$

Ответ: $a = 50, a = 158$

$\sqrt{2}$

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$$

$$g(x) = \frac{\cos 10x - \cos 4x}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$$

$$g'(x) = -\frac{10 \sin 10x}{2} - \frac{4 \sin 4x}{2} - 2 \sin x \cos x - 10 \cos 5x \sin 5x.$$

$$g'(x) = -5 \sin 10x - 2 \sin 4x - \sin 2x - 5 \sin 10x.$$

$$-10 \sin 10x - 2 \sin 4x - \sin 2x = 0$$

$$10 \sin 10x + 2 \sin 4x + \sin 2x = 0$$

$\sqrt{3}$

14-значное число a.

1) Если все "8" в начале числа $\Rightarrow 8888888 \overset{\text{7 цифр}}{\downarrow} \text{XXXXXXXXXX}$

Каждый x принимает значение либо "0", либо "4", но хотя бы один x - "0" или "4" \Rightarrow исключаются 2 варианта, где все x

- единицы или где все x нули \Rightarrow всего $2^{10} = 1024 \Rightarrow$

В итоге $\Rightarrow 1024 - 2 = 1022$.

2) Если все "8" не в начале числа \Rightarrow число должно начинаться с "4" \Rightarrow для всех остальных вариантов $\Rightarrow 2^9$, т.е.

48888888XXXXXXXX и исключением будет вариант, где все x - "4"

\Rightarrow всего $2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$.

1 цифрой - только один раз $\Rightarrow 1022$

2 цифрой - 10 раз \Rightarrow всего $511 \cdot 10 = 5110$ } $\overset{5}{\uparrow}$ 6132 чисел.

Ответ: 6132 чисел.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{5}$

$$\log_{\sqrt{x+4}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+4}-x} (x+4) - \log_{\sqrt{x+4}-x} (\sqrt{x+4}-x) \geq 0$$

$$(a-1)(b-c) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+4}-x-1)(x+4-\sqrt{x+4}-x) \geq 0$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+4}-x > 0 \\ \sqrt{x+4}-x \neq 1 \Rightarrow \\ x+4 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} \neq 1+x \\ \sqrt{x+4} > x \Rightarrow \\ x > -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ x+4 \neq x^2+2x+1 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x+4 > x^2 \end{cases} \Rightarrow \\ x < 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2+x-6 \neq 0 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -4 \end{cases} \\ x > -4 \end{cases}$$

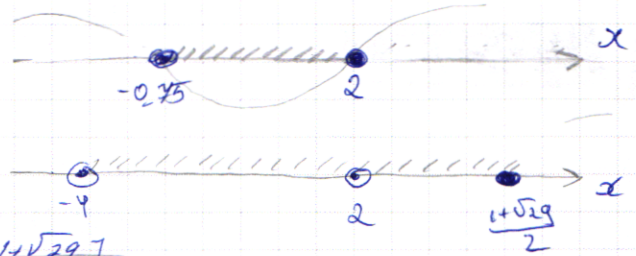
$$\begin{cases} x \neq 2 \\ \begin{cases} x \in [0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}] \\ x \in [-4; 0] \end{cases} \Rightarrow \\ x > -4 \end{cases}$$

ОДЗ: $x \in (-4; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

Решение:

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} \geq x+1 \\ x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} = x+1 \Rightarrow x = 2 \\ \begin{cases} x+4 = \sqrt{x+4} \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2+16x+16 = x+4 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2+15x+12 = 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{225-192}}{8} = \frac{-15 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\begin{cases} (x-2)(x+0,45) \leq 0 \\ x \in (-4; 2) \vee (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}] \end{cases}$$



$$\Rightarrow x \in \cancel{(-4; -0,45]} \vee (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}] \quad x \in [-0,45; 2)$$

Ответ: $x \in \cancel{(-4; -0,45]} \vee (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}] \quad x \in [-0,45; 2)$

№4

а) [1; 45], б) [46; 90], в) [91; 135], г) [136; 180], д) [181; 225]

Чтобы числа в разности не делились на ~~45~~ 45 надо чтобы они были ~~четными~~ либо нечетными, чтобы последняя цифра числа была четной

а) 1, 3, 5, 7, 9, 11 - берем нечетные.

б) ~~46, 48~~ 47, 49, 51, 53, 55, 57 - берем нечетные.

Мы не можем брать опять первые нечетные числа, т.к. в разности будет число, делящееся на 45

в) ~~91, 93, 95, 97, 99, 101~~, 103, 105, 107, 109, 111, 113 - берем нечетные
не берем

г) [137, 139, 141, 143, 145, 147] [149, 151, 153, 155, 157, 159] - берем нечетные.
не берем

Для промежутка д) соответственно.

д) [181, 183, 185, 187, 189, 191], [193, 195, 197, 199, 201, 203],
не берем не берем

205, 207, 209, 211, 213, 215 - берем

Общая сумма: а) 36 б) 312 в) 648 г) 924 д) 1260

$$\Sigma = 36 + 312 + 648 + 924 + 1260 = 3180$$

Ответ: 3180

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Дано:

$ABCD$ - выпуклый четырехугольник.

$\omega_1(O_1; r_1)$

$\omega_2(O_2; r_2)$

$\omega_3(O, r)$

$$AD + BC - AB - CD = 12$$

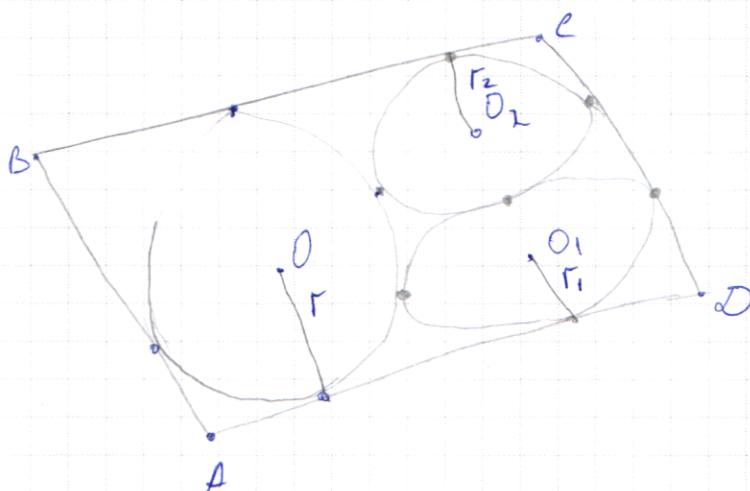
$$AO \cdot BO = 58$$

Найти:

а) r_1, r_2, r_3

б) $\angle AOB$

в) AB



№6

Дано:

$\triangle ABC$

$$AF:FC = 2:5$$

$F \in AC, L \in BC$

$BF \cap AL \in \{Q\}$

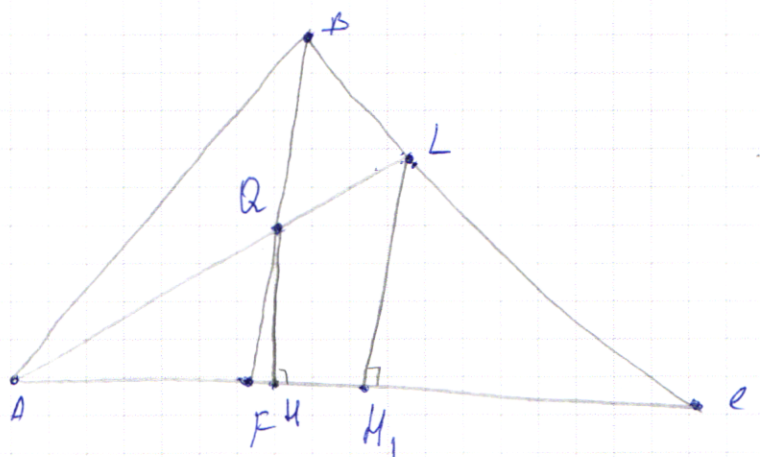
$$S_{\triangle BQL} : S_{\triangle BAC} = 5:12$$

$$QH = 6$$

Найти:

$$LM_1 = ?$$

Решение:





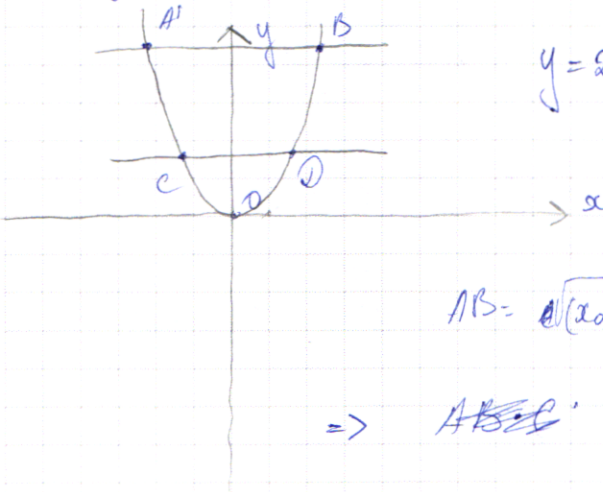
черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y = 2x^2$ $y = 98$, $y = 18$, $y = a$.



$y = 2x^2 \rightarrow 2x^2 = 98$

$x^2 = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

$2x^2 = 18 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} = (7+7)^2 + 14^2 \Rightarrow AB = 14$
 $CD = 6$

$\Rightarrow AB \cdot C = \sqrt{\frac{a}{2}}$

$2\sqrt{\frac{a}{2}}$

$2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{\dots}$

$\frac{14}{2} = 7$
 $\frac{6}{2} = 3$
 84

$\frac{196}{36}$
 252

$\frac{232}{84}$
 316

$\frac{316}{150}$
 158

1) $\frac{4a}{2} = \frac{a}{2}$ $2a = AB^2 + CD^2 - 2AB \cdot CD \cdot \cos 120^\circ$

$2a = 196 + 36 + 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$

$2a = 232 + 84$

$2a = 316$

$a = 158$

2) $AB^2 = CD^2 + 2a - 2\sqrt{2a} \cdot CD \cdot \cos 120^\circ$

$196 = 36 + 2a + 6\sqrt{2a}$

$160 = 2a + 6\sqrt{2a}$

Пусть $6\sqrt{2a} = x \Rightarrow 2a \geq 0$

$x^2 + 6x - 160 = 0$

$D = 36 + 640 = 20 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm 26}{2} = \begin{cases} 10 \\ -16 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{2a} = 10 \Rightarrow 2a = 100$
 $a = 50$

$\frac{26}{26}$
 $\frac{156}{52}$
 $\frac{140}{4}$
 $\frac{640}{30}$
 $\frac{640}{640}$

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \frac{\cos 10x - \sin 4x}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g'(x) = \sin 4x$$

$$g''(x) = \frac{\cos 10x}{2} - \frac{\sin 4x}{2} - \sin 2x + \cos^2 5x + 4$$

$$g'(x) = -\frac{\sin 10x}{2} + \frac{\cos 4x}{2} - 2\cos 5x \sin x + 2 \cdot 5 \cdot (-\sin 5x) \cdot \cos 5x + 4$$

$$g'(x) = -\frac{\sin 10x}{2} + \frac{\cos 4x}{2} - \sin 2x - 5 \sin 10x + 4$$

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$(\cos^2 5x)' = 2 \cos 5x \cdot (-\sin 5x) = -10 \cos 5x \sin 5x$$

$$g^4. \quad \log \sqrt{x+4} - x \cdot (x+4) \geq 1$$

$$\log \sqrt{x+4} - x \cdot (x+4) - \log \sqrt{x+4} - x \geq 0$$

OD3:

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - x \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \log \sqrt{x+4} - \frac{x+4}{\sqrt{x+4} - x} \geq 0$$

$$(a-b)(b-c) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+4} - x - 1)(x+4 - \sqrt{x+4} + x) \geq 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} \geq x \\ x \geq -4 \\ \sqrt{x+4} \neq x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} > x \\ x > -4 \\ \sqrt{x+4} \neq x+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+4 &= x^2+2x+1 \\ (x+3)^2 &= (x+1)^2+5 \\ (x+3)^2 &= (x+1)^2+5 \\ (x+3)^2 &= (x+1)^2+5 \\ (x+3)^2 &= (x+1)^2+5 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left. \begin{array}{l} x > -4 \\ \sqrt{x+4} > x \\ \sqrt{x+4} \neq x+1 \\ x+1 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq -4 \\ x+4 \geq x^2+2x+1 \Rightarrow \\ x > -1 \end{array}$$

$$\sqrt{x+4} \geq x+1$$

$$x+4 - \sqrt{x+4} + x \geq 0$$

$$x+4 - \sqrt{x+4} - x \leq 0$$

$$x+4 - \sqrt{x+4} \leq x+1$$

6¹¹

$D = 1 + 24 = 25$
 $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

$\emptyset = 29$
 $4 \cdot 4 = 29$

$D = 225 - 4 \cdot 144 = -144$
 $= 9 - \frac{15 \pm 9}{8} = \begin{cases} \frac{36}{8} \\ -\frac{24}{8} \end{cases}$

$2^{10} = 1024 - 2$, т.к. не может быть нулей на 10⁴

$\frac{1024}{2} = 512$
511

$\frac{29}{2} = 14.5$

"0", "4", "8"
88888888XXXXXX
↑↑↑
000
777

Вариантов раскладки

для каждого получающего =>

X 88888888XXXXXX => 29-1

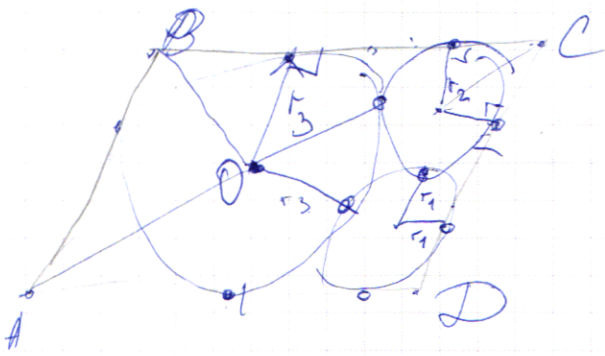
можно было так же 4

X X 88888888XXXXX

↑
всегда 4

Итого: варианты - 1022 и ~~29~~ 511 · 10 = 5110 + 1022 = 6132 чел.

№4



$$AD + BC - AB - CD = 12.$$

Окр. ω_1 и ω_2 имеют равные радиусы. \Rightarrow ABCD - др. может быть

Прямоугольником \Rightarrow $\Rightarrow AD + BC = CD + AB = 12$

$$2AD = 2AB + 12$$

$$AD = AB + 6.$$

$$r_3 = \frac{AB}{2} = \frac{AD}{2} - 3.$$

$$r_2 = r_1 \Rightarrow$$

Дано:

$FE \perp AC$

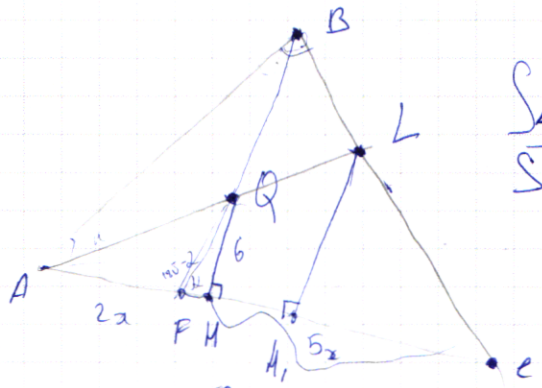
$LE \perp BC$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$$

$$BF \cap AL = Q$$

$$\frac{BQL}{BAC} = \frac{5}{12}$$

№6



$$\frac{S_{\triangle BQC}}{S_{\triangle BQL}} = \frac{12}{5}$$

$[1; 45]$ $[46; 90]$ $[91; 135]$ $[136; 180]$ $[181; 225]$

$[1; 225]$

$\angle 45 \Rightarrow$

$46 + 94$

130

0

$\frac{46}{52}$

$180 + 45$

$\frac{52}{52}$

$1, 2, 3, 4, 5$

$a_1 +$

$1, 2$

$1, 2, 3, 4, 5$

$6 +$

$46, 47, 48, 49, 50$

$x -$

$\frac{52}{52}$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 46 + 47 + 48 + 49 + 50 + 51$

$(5 \cdot 90 - 6 \cdot 30 - 90) + 21$

$2 \cdot 6 \cdot 105 + 21$

$45 \cdot 6 + 21$

$180 = 90 + 90$

$2400 - 121$

2421

$2 \cdot 1 + 45 \cdot 6 + 21 = 90 \cdot 6 + 21 + 135 \cdot 6 + 21 + 180 \cdot 6 + 21$

$6(45 + 90 + 135 + 180) + 21$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№

[1; 45], [46; 90], [91; 135], [136; 180], [181; 225]

а) 1, 2, 3, 4, 5, 6

б)

в) 91, 92, 93, 94, 95

г)

д) 181, 182, 183, 184, 185

е) 1, 3, 5, 7, 9, 11 $20 + 12 + 4 = 36$

ж) 44, 49, 51, 53, 55, 57 = $96 + 104 + 112 = 312$

з) 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113

и) ~~117, 119, 121, 123, 125, 127~~

к) 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159

л) 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203,

205, 207, 209, 211, 213, 215

Ответ:

г) $181 + 205$
 207
 209
 211
 213
 215

 420

420
 420
 420

 1260

36
 924

 960

312
 36

 348

950
 960

 1910

500
 310

 810
 149
 15
 15

 24

103
 107

210
 105

 315
 109

 424
 111

 535
 113

 648

312
 648

 960

 36
 924

 960

312
 648

 960

1920
 1260

 3180
 960
 960

 1920



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)