# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 9-30

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-30

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9
0
5

995
905
959
950
599
500
509
500

1 2 3 4

$\to \quad \to 2\cdot \to 1$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$2^3 \quad 2^2 \quad 2$

$2^3+(2^2+2\cdot(2+\cancel{2}\cdot 1))=2^3+2^2+2\cdot\cancel{8}4=12+\cancel{12}8=\cancel{24}$
$=20$

9995
9905
9095
9005
9599
9590
9509
9500

$2^2$

9959
9950
9059
9050

$\to \quad \to 2\cdot \to 2\cdot \to 2\cdot 1$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2$

$2^4+(2^3+2(2^2+2(2+2)))=$
$=16+(8+2(2^2+8))=16+8+24=$
$=48$

1 $5 \to 2^{n-1}$

2 $5 \to 2^{n-2}$

3 $5 \to 2\cdot 2^{n-3}$

n $5 \to 2^{n-2}\cdot 2^0$

$= \boxed{2^{n-1}+\sum_{k=0}^{k=n-2} 2^k\cdot 2^{n-2-k}} =$

$n=3$

$2^2+\sum_0^1 2^k 2^{n-2-k}=2^2+1\cdot 2+2=8$

$n=4$

$2^3+2^2+2^1\cdot 2^1+2^2=2^3+3\cdot 2^2=8+\cancel{8}3\cdot 4=$
$=20$

$= \boxed{2^{n-1}+(n-\cancel{1})2^{n-2}}$

$n=4$

$2^3+\cancel{3}\cdot 2^2=8+12=20$

$n=5$

$2^4+4\cdot 2^3=16+4\cdot 8=48$

$2^{n-k}+(n-k)2^{n-k-1}$

$2^{12}+12\cdot 2^{11}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

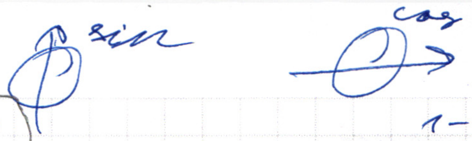
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin' = \cos$

$\cos' = -\sin$

$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$




## №2

$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

~~$\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta) =$~~ $-\frac{1}{2}($~~$\cos\alpha - \cos$~~

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\cdot\sin\alpha\sin\beta$

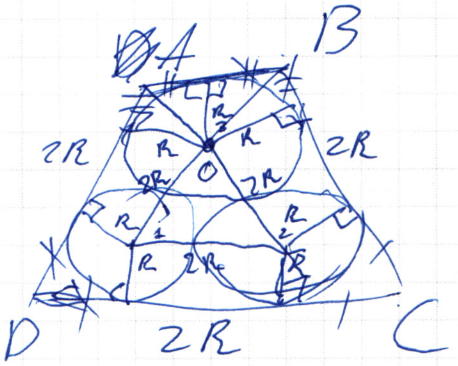
$-\frac{1}{2}(\cos 14x - \cos 4x) + \frac{1}{2}(1-\cos 14x) -$

$-\cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2} - \cos 14x - \cos^2 x - 3$

$y' = 2(-\sin x) + 14\sin 14x - 2\cdot\cos x(-\sin x) - 3 =$

$= 14\sin 14x - 2\sin x + 2\sin 2x - 3$

## №4




$2R + \cancel{x} + \cancel{y} + \cancel{2R} + \cancel{x} + \cancel{y} = \cancel{y} - \cancel{x} - \cancel{2R} - \cancel{x} - \cancel{y} =$

$2R = 10$

$\Rightarrow R = 5$

$1 + \cos x = 2\cos^2 x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-30

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

| | |
|---|---|
| 26 | 8 |
| 52 | 4 |
| 104 | 2 |
| 208 | 1 |

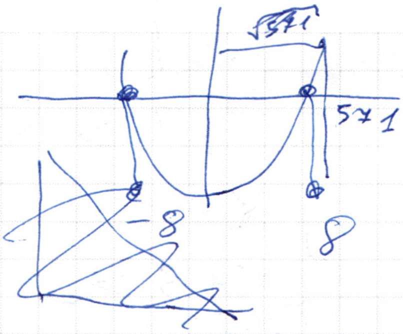
№ 1

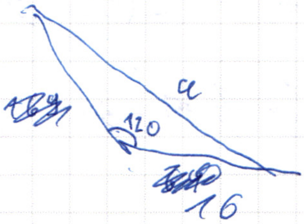
$y = x^2$

$y = 169 \quad 26$

$y = 64 \quad 16$

$y = a$




$26 \cdot 8 = 48 + 160 = 208$


$26 \cdot 26$: $156$, $52$, $676$

$16 \cdot 16$: $96$, $16$, $256$

$$a = \sqrt{16^2 + 26^2 + \frac{1}{2} 26 \cdot 16} = \sqrt{678 + 256 + 208} =$$

$$= \sqrt{1142} = 2 \cdot \sqrt{571}$$

$678 + 256 + 208 = 1142$

$y = 571$

420

$16^2 + a^2 + 8a = 26^2$

$a^2 + 8a + 256 - 676 = 0$

$\Rightarrow a^2 + 8a - 420 = 0$

$D = 16 + 420 = 436 = 4 \cdot 109$

$$a = -4 \pm 2\sqrt{109} = 2(\sqrt{109} - 2)$$

$26 \cdot 26$: $52 \cdot 13$

$13 \cdot 13 = 169$, $169 \cdot 4 = 676$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x+5>0 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-5 \\ \boxed{\text{ОДЗ: } x\in[-3;\tfrac{1+\sqrt{13}}{2})} \\ x>-3 \end{cases}$

$\sqrt{x+3}>x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x+3>x^2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x\geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-x-3<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$-3$ $0$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ $0$ $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$+$

$D=1+12=13$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$\frac{1+2\sqrt{13}+13}{4}-\frac{1+\sqrt{13}}{2}-3=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}-3=0$ Да, да

$\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}+3}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{7+\sqrt{13}}{2}=\frac{1+2\sqrt{13}+13}{4}$

~~$\sqrt{x+3}-x<1$~~

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1>\sqrt{x+3}-x>0 \\ x+5\leq\sqrt{x+3}-x \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3}-x>1 \\ x+5\geq\sqrt{x+3}-x \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3}>x \\ \sqrt{x+3}<x+1 \\ 2x+5\leq\sqrt{x+3} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3}>x+1 \\ 2x+5\geq\sqrt{x+3} \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in[-3;\tfrac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty) \\ x\in[-3;-2{,}5)\cup[-\tfrac{11}{4};-2] \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[-3;1) \\ x\in[-3;-2)\cup(-\tfrac{11}{4};+\infty) \end{cases} \end{array}\right.$

$\boxed{x\in[-3;-2)\cup(-\tfrac{11}{4};1)}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

| 9-30 |
| --- |
| ШИФР |

(заполняется секретарём)

$4\cdot\frac{121}{16} - \frac{19\cdot 11}{4} + 22 = \frac{121-209+88}{4} = 0$

$4\cdot 4 - 38 + 22 = 0$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x+3 \geq 0$ $\quad x+1 \geq 0$

$x+3 < x^2+2x+1$ $\quad x \geq -1$

$x^2+x-2>0$

$(x-1)(x+2)>0$ $\quad + \;\; -2 \;\; - \;\; 1 \;\; +$

$x \in \cancel{(-\infty; -2)} \cup (1; +\infty)$

---

$2x+5 \leq \sqrt{x+3}$

$$\left[\begin{cases} 2x+5<0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}\right. \quad \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+3 \geq 4x^2+20x+25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x<-2,5 \\ x \geq -3 \end{cases}\right. \quad \begin{cases} x \geq -2,5 \\ 4x^2+19x+22 \leq 0 \end{cases}$$

$x \in [-3; -2,5)$

~~$x \in (-2,5; -3]$~~

$\geq 0$ всегда

$D = 19^2 - 16\cdot 22 = 36\cancel{1-552<0}\ 9$

~~$(20-1)^2 = 400-40+1 = 361$~~

$(19-3)(19+3) = 19^2 - 9$

$\times\, 176 \cdot 2 = 352$

$x_{1,2} = \frac{-19 \pm 3}{8} = -2; -\frac{11}{4}$

---

$\sqrt{x+3} > x+1$ $\quad$ ~~$x+3$~~

$$\left[\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+1<0 \end{cases}\right. \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+3 > x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x \geq -3 \\ x<-1 \end{cases}\right. \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-2<0 \end{cases}$$ $\quad (x-1)(x+2)<0$

$x \in [-3; -1)$

$+ \;\; -2 \;\; - \;\; 1 \;\; +$

$x \in [-1; 1)$

---

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4x^2+20x+25 \geq x+3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ 4x^2+19x+22 = 4(x+2)(x+\frac{11}{4}) \geq 0 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 1

$\cancel{0}_{12}$ $\cancel{0,1,2,3},1,1,1,12$

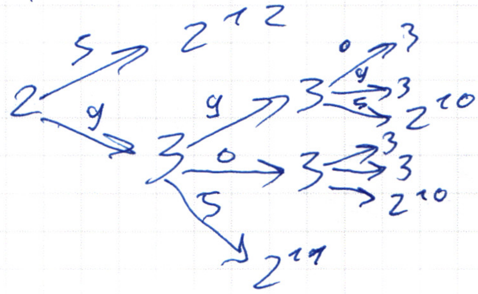
$5\cdot 0+5\cdot 35+5\cdot 70+5\cdot 105+5\cdot 140+$
$+1+\ldots+25=5(280+70)+\frac{1+25}{2}\cdot 25=$
$=5\cdot 350+13\cdot 25=1750+325=\underline{2075}$

№ 3

~~12 ме~~

13 мест

1



$\cancel{((2^{11}+(2^{10}+2\ldots)}$

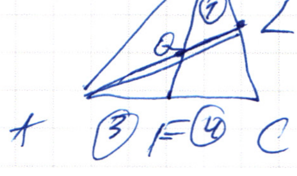
$(2^{12}+(2^{11}+2\cdot(2^{10}+4\ldots\ldots)$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & & 12 & 13 \\
\cancel{3} & \to & \cancel{3} & \to & 2\cdot & \to & 2\cdot & \to & 2\cdot & \to & \ldots \to & 2\cdot & \to 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
2^{12} & & 2^{11} & & 2^{10} & & 2^{9} & & 2^{8} & & & 2 &
\end{array}$$

8

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & 2 & & 3 \\
\cancel{3} & \to & & \to & 2\cdot 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
2^2 & & 2 & &
\end{array}$$

$2^2+2+21=\cancel{8}$

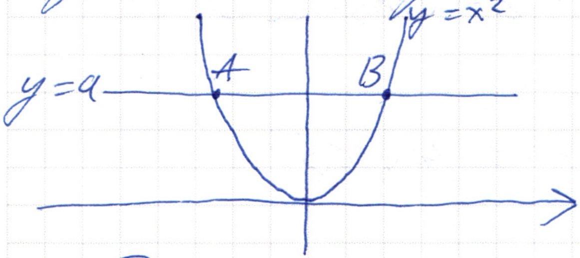


16

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y=x^2$ пересекает прямые $y=169$; $y=64$; $y=a$, высекая на каждой из ~~них~~ прямых отрезок. Найдем эти отрезки.




$\begin{cases} y=a \\ y=x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt{a} \\ x=-\sqrt{a} \end{cases}$ $a \geq 0$

$A(-\sqrt{a}; a)$ $B(\sqrt{a}; a)$

~~Расстояни~~ $|AB| = \sqrt{(a-a)^2+(\sqrt{a}+\sqrt{a})^2} = \sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$

Аналогично для $y=64$

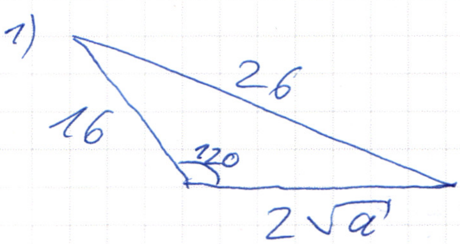
$|AB| = 16$

для $y=169$

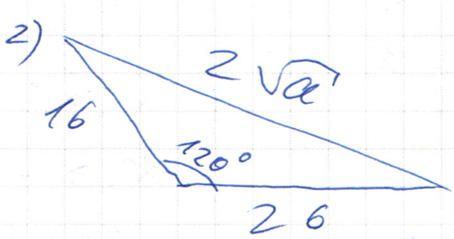
$|AB| = 26$

У нас может получится 2 треугольника (т.к напротив $120°$ большая сторона)

1)




2)




По т. cos найдем ~~эти~~ $2\sqrt{a}$

Из первого $\Delta$:

$\cos 120$

$$26^2 = 16^2 + (2\sqrt{a})^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 16 \cdot (2\sqrt{a})$$

$676 = 256 + 4a + 16\sqrt{a} \quad |:4$

$169 = 64 + a + 4\sqrt{a}$

$a + 4\sqrt{a} - 105 = 0$

$D_1 = 4 + 105 = 109 \quad \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac\right)$

$\sqrt{a}_{1,2} = -2 \pm \sqrt{109}$

Т.к $\sqrt{a} > 0$, то рассм. только $-2 + \sqrt{109}$

$(-2 - \sqrt{109} < 0)$

$\left(\sqrt{a} = -2 + \sqrt{109}\right)^2$

$\underline{a = 109 - 4\sqrt{109} + 4 = 113 - 4\sqrt{109}}$

Из 2 $\Delta$:

$(2\sqrt{a})^2 = 16^2 + 26^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 16 \cdot 26$

$4a = 256 + 676 + 8 \cdot 26 = 932 + 208 = 1140$

$\underline{a = 285}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = 285 \\ a = 113 - 4\sqrt{109} \end{array}\right.$

---

№5

$\log_{\sqrt{x+3} - x}(x+5) \geq 1$

~~Р~~ Найдем ОДЗ:

$\begin{cases} x+5 > 0 \\ x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -5 \\ x \geq -3 \\ -3 \leq x < \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$\sqrt{x+3} > x$

ОДЗ: $x \in \left[-3; 1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР: 9-30
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x+3\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x+3>x^2\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ x\ge -3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-3<0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ x\ge -3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ \left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$D=1+4\cdot 3=13$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x\in\left[-3;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$\sqrt{x+3}\ne x+1$

$$\begin{cases}x+1\ge 0\\ x+3\ge 0\\ x+3\ne x^2+2x+1\end{cases} \quad \begin{cases}x\ge -1\\ x\ge -3\\ x^2+x-2\ne 0\end{cases} \quad \begin{cases}x\ge -1\\ x\ge -3\\ (x-1)(x+2)\ne 0\end{cases}$$

~~$x\ne\{1;-2\}$~~ ~~$x\ne 1$~~

$x\ne 1$

~~$x\in[-1;1)\cup(1;+\infty)$~~

---

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\ge 1$

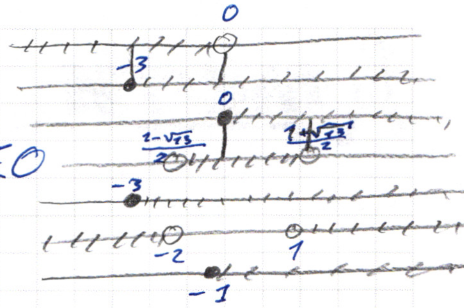
$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\ge\log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1>\sqrt{x+3}-x>0 & (1)\\ x+5\le\sqrt{x+3}-x & (2)\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+3}-x>1 & (3)\\ x+5\ge\sqrt{x+3}-x & (4)\end{cases}\end{array}\right.$$

1) $\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>0\\ \sqrt{x+3}-x<1\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{x+3}>x\\ \sqrt{x+3}<x+1\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x+3\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x+3>x^2\end{cases}\end{array}\right.\\ \begin{cases}x+3\ge 0\\ x^2+2x+1>x+3\\ x+1\ge 0\end{cases}\end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\x\ge-3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge0\\x^2-x-3\le0\end{cases}\end{array}\right.\\ x\ge-3\\ \left[\begin{array}{l}x^2+x-2>0\\x+1\ge0\end{array}\right.\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\x\ge-3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge0\\\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\le0\end{cases}\end{array}\right.\\ x\ge-3\\ \left[\begin{array}{l}(x-1)(x+2)>0\\x\ge-1\end{array}\right.\end{cases}$$



$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}-3\le x<0\\0\le x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-3\le x<-2\\x>1\end{array}\right.\\ x\ge-1\end{cases}$$

$\cancel{x\in[-3;-2)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)}$

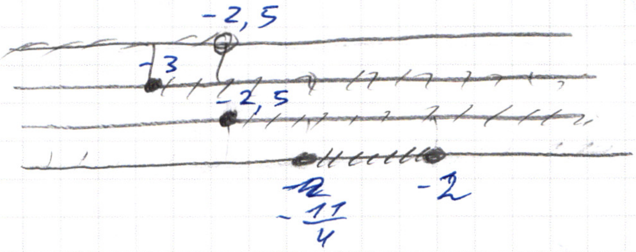
$x\in\left(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

2) $x+5\le\sqrt{x+3}-x$

$2x+5\le\sqrt{x+3}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+5<0\\x+3\ge0\end{cases}\\ \begin{cases}2x+5\ge0\\x+3\ge4x^2+20x+25\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,5\\x\ge-3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge-2,5\\4x^2+19x+22\le0\end{cases}\end{array}\right.$$

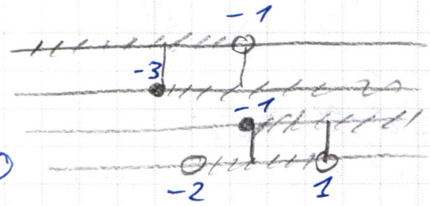
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,5\\x\ge-3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge-2,5\\4(x+2)\left(x+\frac{11}{4}\right)\le0\end{cases}\end{array}\right.$$



$x\in[-3;-2,5)\cup\left[-\frac{11}{4};-2\right]$

3) $\sqrt{x+3}>x+1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1<0\\x+3\ge0\end{cases}\\ \begin{cases}x+1\ge0\\x+3>x^2+2x+1\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\x\ge-3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge-1\\(x-1)(x+2)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

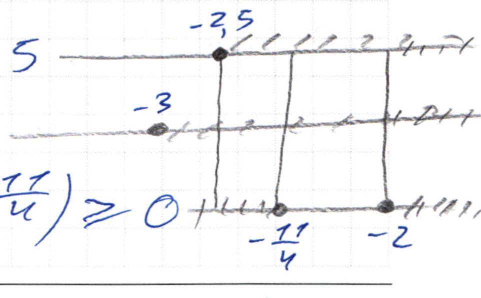


$x\in[-3;1)$

4) $x+5\ge\sqrt{x+3}-x$

$2x+5\ge\sqrt{x+3}$

$$\begin{cases}2x+5\ge0\\x+3\ge0\\4x^2+20x+25\ge x+3\end{cases}\qquad \begin{cases}x\ge-2,5\\x\ge-3\\4(x+2)\left(x+\frac{11}{4}\right)\ge0\end{cases}$$



☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-30

ШИФР

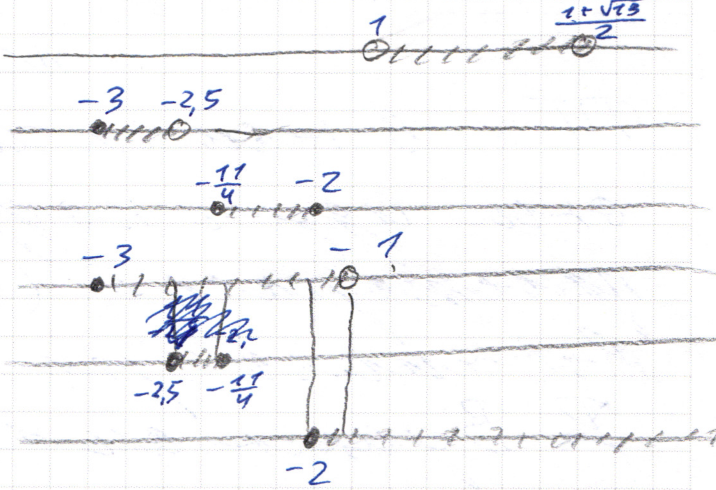
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \in [-2,5; -\frac{11}{4}] \cup [-2; +\infty)$

~~Тож~~ Снова перейдем к начальной системе

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -3\le x<-2,5 \\ -\frac{11}{4}\le x\le -2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} -3\le x<-1 \\ \left[\begin{array}{l} -2,5\le x\le -\frac{11}{4} \\ -2\le x \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$




Ответ: $x \in [-2,5; -\frac{11}{4}] \cup [-2; -1)$

## №7

Если разность никаких двух выбраных чисел ~~не~~ $\vdots$ (не делится) 35, то остатки при делении на 35 у любых двух чисел не равны. В каждом из наших промежутков идут числа ~~кот~~ остаток которых будет выглядеть 1,...,34,0 $\Rightarrow$ Первое число возьмем с остатком 1, второе с ост. 2 и т.д. Т.к мы должны выбрать всего 25 чисел, то ответом будет:

$\underbrace{5\cdot 0+5\cdot 35+5\cdot 70+5\cdot 105+5\cdot 141}_{\text{нач. числа}}+\overbrace{1+2+3+\dots+24+25}^{\text{остатки}}=$

сумма арифм прогрессии

$$5(105+105+140)+\frac{1+25}{2}\cdot 25=5\cdot(210+140)+13\cdot 25=$$
$$=5\cdot 350+13\cdot 25=1750+325=2075$$

$$\begin{array}{r} \times\,25 \\ 13 \\ \hline 75 \\ 25\phantom{0} \\ \hline 325 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\,350 \\ 5 \\ \hline 1750 \end{array}$$

Ответ: 2075

№3

Т.к в нашем числе ровно шесть 5 и они идут подряд, то мы можем просто рассм $(18-6+1)=13$-ти цифровое число с ровно 1 пятеркой.

~~Х~~ В данном 13-ти цифровом числе на первом месте может стоять либо 5 либо 9 (0 не может быть на первом месте в числе). Если на первом месте стоит 5, то на остальных местах стоят либо 0, либо 9 $\Rightarrow$ (т.к мест 12) то кол-во вариантов $2^{12}$.

Если на первом месте стоит 9, то мы можем поставить 5 на одно из оставшихся (12) мест, а на остальные (11) мы можем поставить 0 или 9 $\Rightarrow$ ~~Общая формула~~

(Пусть $S$ — это кол-во перестановок)

$$S=2^{12}+12\cdot 2^{11}=4096+12\cdot 2048$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-30

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2^{11} = 2^{10} \cdot 2 = 1024 \cdot 2 = 2048$

$$\begin{array}{r} \times\, 1024 \\ 2 \\ \hline 2048 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 2048 \\ 2 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$2^{12} = 2048 \cdot 2 = 4096$

$$\begin{array}{r} \times\, 2048 \\ 12 \\ \hline 4096 \\ 2048\phantom{0} \\ \hline 24576 \end{array}$$

$S = 4096 + 24576 = 28672$

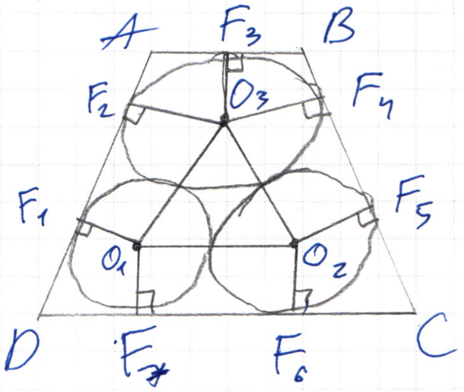
$$\begin{array}{r} +\, 24576 \\ 4096 \\ \hline 28672 \end{array}$$

Ответ: Кол-во перестановок = $= 28676$

Также хочу предоставить обобщенную формулу для $n$-значного числа с $k$ пятерками подряд

$$\boxed{S = 2^{n-k} + (n-k) \cdot 2^{n-k-1}}$$

№ 4




обозначим

$R(\omega_1)=R(\omega_2)=R(\omega_3)=R$

$O_1$ – центр $\omega_1$

$O_2$ – $\omega_2$

$O_3$ – $\omega_2$

Все окружности касаются

$\omega_1$ касает $AD$, $DC$

$\omega_2$ касает $DC$, $BC$

$\omega_3$ касает $D\cancel{A}$, $AB$, $BC$

Построем радиусы касательные $F_1 - F_7$.
По т. о двух касательных из 1 точки $DF_1 = DF_7$; $CF_6 = CF_5$; $BF_3 = BF_4$; $AF_2 = AF_3$ (1) Т.к. $\omega_1$ касает $\omega_2$ $O_1O_2 = 2R$, аналогично $O_1O_3 = 2R$; $O_2O_3 = 2R$;
Из параллелограмов $O_1F_1F_2O_3$; $O_3F_4F_5O_2$; $O_2F_6F_7O_1$ (противоположные прямые равны как радиусы и параллельны, т.к перпендикулярны одной прямой)
$\Rightarrow$ (2) $F_1F_2 = O_1O_3 = 2R$; $F_4F_5 = O_2O_3 = 2R$; $F_6F_7 = O_1O_2 = 2R$.

а) Из условия $AD + BC - AB - CD = 10$

$AD + BC - AB - CD = DF_1 + F_1F_2 + F_2A +$
$+ BF_4 + F_4F_5 + F_5C - AF_3 - BF_3 - DF_7 - F_6F_7 - CF_6 =$
$=$ (из (1) и (2)) $\cancel{DF_1} + 2R + \cancel{AF_2} + \cancel{BF_3} + 2R + \cancel{CF_6} -$
$- \cancel{AF_2} - \cancel{BF_3} - \cancel{DF_1} - 2R - \cancel{CF_6} = 2R$, но
из усл. $AD + BC - AB - CD = 10 \Rightarrow$
$2R = 10$

Ответ(к а): $R = 5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3.$

Найти: min, max ~~$\frac{?}{?}$~~

~~Для того чтобы~~

Немного преобразуем $g(x)$

$g(x) = -\frac{1}{2}(\cos((5+9)x) - \cos((9-5)x)) + \frac{1}{2}(1-\cos 14x) -$
$-\frac{1}{2}(~~\cos~~ 1 + \cos 2x) - 3$

$g(x) = -\frac{1}{2}\cos 14x + \frac{1}{2}\cos 4x + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cos 14x -$
$- \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cos 2x - 3 = -\cos 14x + \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - 3$

Теперь определим ~~пр~~ главный период

$T(\cos 14x) = \frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7}$

$T(\cos 4x) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$T(\cos 2x) = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\Rightarrow T(g(x)) = \pi$

Теперь возьмем производную и найдем где она будет равна 0, на ~~промеж~~ отрезке от 0 до $\pi$ и min из этих точек и $g(0)$ и $g(\pi)$ — будет минимальным значением, а их max — максимальным.

~~Вс~~ $g'(x) = -14(-\sin 14x) + 2(-\sin 4x) - (-\sin 2x) +$
$+ 0 = 14\sin 14x + \sin 2x - 2\sin 4x.$

Теперь найдем нули $g'(x)$

$14\sin 14x + \sin 2x - 2\sin 4x = 0$

$14 \cdot \sin(16x - 2x) + \sin 2x - \sin 2x\cos 2x = 0$

$14(\sin 16x\cos 2x + \cos 16x\sin 2x) + \sin 2x - \sin 2x\cos 2x = 0$

$14(2\sin 8x\cos 8x\cos 2x + (\cos^2 8x - \sin^2 8x)\sin 2x) + \sin 2x - \sin 2x\cos 2x = 0$

$14(8\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 2x + (\cos^2 8x - \sin^2 8x)\sin 2x) + \sin 2x - \sin 2x\cos 2x = 0$

$\sin 2x(14 \cdot (8\cos^2 2x\cos 4x + (\cos^2 8x - \sin^2 8x)) + 1 - \cos 2x) = 0$

$\Rightarrow$ При $\sin 2x = 0$ $\quad g'(x) = 0$

$x = 0 + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$

$g(0) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 3 = -4$

$g(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3 = -1$

$g(\pi) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 3 = -4$

$\Rightarrow$ ~~$\frac{\pi}{2}$ — max $g$ — $x$~~

**Ответ:** $-1$ — max

$-4$ — min

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)