МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-025

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-025

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано: №1

$y=x^2$

$y=169$

$y=64$

$y=a$

$\alpha=120^\circ$

Найти a, при которых можно составить треугольник

Решение:

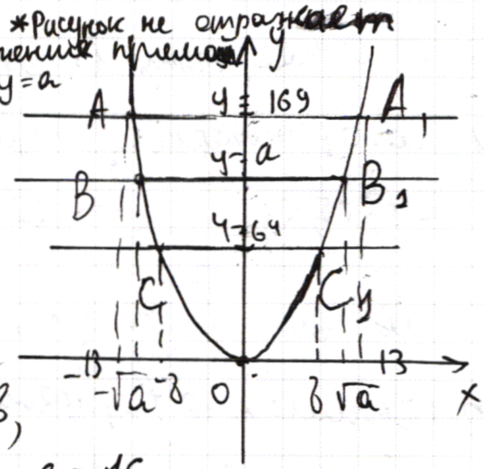
$169=x^2$, $x=\pm 13$ $AA_1=26$

$64=x^2$, $x=\pm 8$ $CC_1=16$

$a=x^2$, $x=\pm\sqrt{a}$ $BB_1=2\sqrt{a}$

$a>0$ т.к. иначе не будет отрезка

*Рисунок не отражает положения прямой $y=a$



Чтобы составить треугольник из отрезков, равных $a_0=26$, $b_0=2\sqrt{a}$ и $c_0=16$, мы должны проверить выполнение теоремы косинусов. Мы получим совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} a_0^2=b_0^2+c_0^2-2b_0c_0\cos\alpha \\ b_0^2=a_0^2+c_0^2-2a_0c_0\cos\alpha \\ c_0^2=a_0^2+b_0^2-2a_0b_0\cos\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_0^2=b_0^2+c_0^2+b_0c_0 \\ b_0^2=a_0^2+c_0^2+a_0c_0 \\ c_0^2=a_0^2+b_0^2+a_0b_0 \end{array}\right.$$

$\cos\alpha=\cos(120^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} 676=4a+256+32\sqrt{a}, \\ 4a=676+256+416, \\ 256=676+4a+52\sqrt{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 169=a+64+8\sqrt{a}, \\ a=169+64+104, \\ 64=169+a+13\sqrt{a} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}169\\4\end{array} \\ \hline 676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}26\\16\end{array} \\ \hline +\begin{array}{r}156\\26\end{array} \\ \hline 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}169\\168\end{array} \\ \hline 337 \end{array}$$

1) $a+64+8\sqrt{a}=169$

$a+8\sqrt{a}-105=0$

$\frac{D}{4}=16+105=121$

$\begin{cases}\sqrt{a}=-4\pm 11\\ \sqrt{a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{a}=7$

$a=49$.

2) $a=169+64+104$

$a=337$

3) $a+13\sqrt{a}+169=64$

$a+13\sqrt{a}+105=0$

$D=169-105=64$

$\sqrt{a}=\frac{-13\pm 8}{2}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{a}=-\frac{21}{2}\\ \sqrt{a}=-\frac{5}{2}\end{array}\right. \\ \sqrt{a}>0\end{cases}$ — нет решений.

Ответ: $a=49$ или $a=337$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

"0", "5", "9"

Последовательность из 6 пятерок может начинаться с любой цифры с первой по тринадцатую, т.е. у нас есть 13 вариантов расположения пятёрок.

1) Особо интересен первый случай.

$555555\underbrace{\_\ \_\ \_}_{12}$ на каждую свободную клетку может встать 0 или 9. => 2 вар. $2^{12}=4096$,
где $18-6=12$ - число незаполненных клеток

2) Остальные варианты отличаются от первого тем, что на первой клетке не может стоять ноль, а стоит только девятка (пятерки начинаются не с первой цифры)

$2^{11}=2048$

Таких вариантов 12 (13 случаев всего, 1 - с пятеркой в начале)

$N=12\cdot 2048+4096=2^{11}(2+12)=2^{12}\cdot 7=28672$

$$\begin{array}{r} \times\ 4096 \\ 7 \\ \hline 28672 \end{array}$$

Ответ: 28672.

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

$D(f)$:

$x\in(-3;0)\ \cancel{\cup[-2;0]}\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$

$D(f)$:

$\left[\begin{array}{l} x>-3, \\ \sqrt{x+3}-x>0, \\ \sqrt{x+3}-x\neq 1 \\ x>-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>-3, \\ \sqrt{x+3}>x, \\ \sqrt{x+3}\neq x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<0, \\ \left\{\begin{array}{l} x+3-x^2>0 \\ x>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x+3\neq x^2+2x+1, \\ x\geq -1 \end{array}\right. \\ x>-3 \end{array}\right.$

$3\leq\sqrt{13}\leq 4$

$-3\leq 1-\sqrt{13}\leq -2$

$-\frac{3}{2}\leq\frac{1-\sqrt{13}}{2}\leq -1$

$2\leq\frac{1+\sqrt{13}}{2}\leq 2{,}5$

$-x^2+x+3>0$

$x^2-x-3<0$

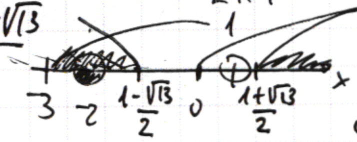
$D=1+3\cdot 4=13$

$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$x^2+x-2\neq 0$

$\left\{\begin{array}{l} x\geq -1. \\ x\neq 1 \\ x\neq -2. \end{array}\right.$

$x=-2$ - учитывается в $D(f)$, т.к. не явл решением уравнения.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5(продолжение)

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$(\sqrt{x+3}-x)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$

$(\sqrt{x+3}-x)(2x+5-\sqrt{x+3}) \geq 0$

$\sqrt{x+3}=x$

$x+3=x^2$

$x^2-x-3=0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$2x+5-\sqrt{x+3}=0$

$(2x+5)=\sqrt{x+3}$

$\begin{cases} x>-\frac{5}{2} \\ 4x^2+20x+25=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{5}{2} \\ 4x^2+19x+22=0 \end{cases}$

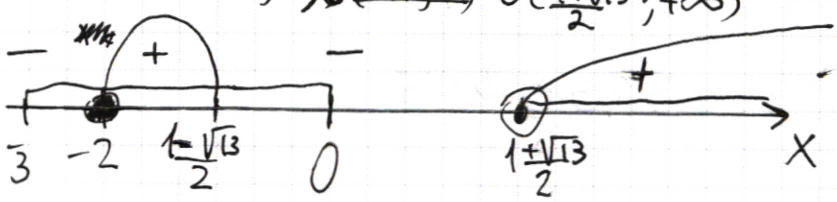
$\times\begin{array}{r}19\\19\\\hline 171\\19\\\hline 361\end{array}$ $\qquad \times\begin{array}{r}22\\16\\\hline 132\\22\\\hline 352\end{array}$

$D = 361 - 22\cancel{16} = 9$

$x=\frac{-19\pm3}{8}$ $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{11}{4} \\ x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2,75 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ x>-2,5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$

$(x+2)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \geq 0$

$D(f): (-3;0) \cup \cancel{(-2;0)} \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$



$x \in \left[-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$

Ответ: $\left[-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

№7.

Каждое число можно представить в общем виде $x = 35k + n$,

где $n \in [1; 35]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для выбран. промежутков:

$[1; 35]$	$k_1 = 0$	Чтобы никакие два числа
$[36; 70]$	$k_2 = 1$	не давали разность, кратную
$[71; 105]$	$k_3 = 2$	35, они все должны различаться
$[106; 140]$	$k_4 = 3$	по n, т.к. при совпадающих
$[141; 175]$	$k_5 = 4$	n они (n) ~~сократ~~ уйдут из разности.

$a_1 = 35k_1 + n$; $a_2 = 35k_2 + n$

$a_1 - a_2 = 35k_1 + n - 35k_2 - n = 35(k_1 - k_2) \vdots 35$ — противоречие.

Значит, мы выбираем 25 минимально возможных ~~...~~ n.

$S = 35k_1 \cdot 5 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + \ldots + 35k_5 \cdot 5 + n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} + n_{25}$.

$S = 35 \cdot 5(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5) + \sum\limits_{25} n$

Наименьшая сумма 25-и n: сумма всех n от 1 до 25.

$S_{25} = \frac{1+25}{2} \cdot 25 = 13 \cdot 25 = 325$

$\sum\limits_{5} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 5 \\ \hline 175 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1750 \\ +\ 325 \\ \hline 2075 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \times\ 13 \\ \hline 75 \\ +\ 25\ \ \\ \hline 325 \end{array}$$

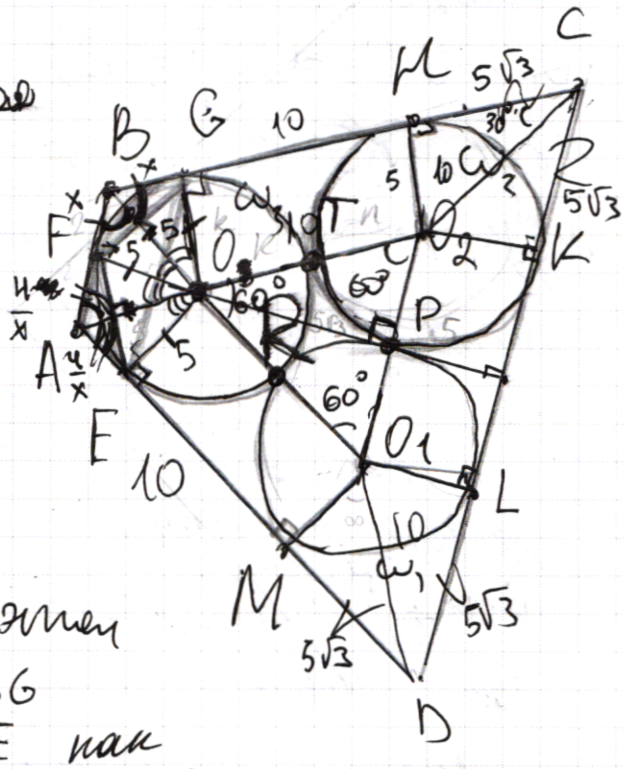
$S = 175 \cdot 10 + 325 = 1750 + 325 = 2075$

Ответ: 2075

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Обозначим точки ~~пересечения~~ касания (см. рисунок) и центры окр. (для $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - O_1, O_2, O_3 соотв.)



а) Найти R (радиус окр.): если

$AD+BC-AB-CD=10$

① $\begin{cases} AD=AE+EM+MD \\ CD=CK+KL+LD \\ BC=BG+GH+HC \\ AB=AF+FB \end{cases}$ при этом $\begin{cases} FB=BG \\ AF=AE \\ MD=ML \\ HC=CK \end{cases}$ как отрезки касательных проведенных из одной точки.

② EOO_1M, GOO_2H, KO_2O_1L — прямоугольники по призн. (т.к. $OE\perp AD$, $O_1M\perp AD$, $OE=O_1M=R$) $\Rightarrow OO_1=EM=2R$
$(OE\perp EM)$ $(O_1M\perp EM)\Rightarrow O_1M\parallel OE$

Аналогично $GH=OO_2=2R$, $O_1O_2=KL=2R$.

С учетом ①, ②:

$\begin{cases} AD=AE+MD+2R \\ BC=BG+2R+CH \\ AB=AE+BG \\ CD=CH+DM+2R \end{cases}$

$AD+BC-AB-CD=$
$=\cancel{AE}+\cancel{MD}+2R+\cancel{BG}+\cancel{2R}+\cancel{CH}-\cancel{AE}-\cancel{BG}-\cancel{CH}-$
$-\cancel{MD}-\cancel{2R}=2R$

$2R=10$, $R=5$.

б) $\angle AOB$, где O - центр ω_3

$\triangle BGO = \triangle BFO$, $\triangle AFO$, $\triangle AEO$ - прямоуг., т.к. GO, FO, OE перп. к сторонам

$GO = FO = OE = R = 5$

O_1O_2O - р/с прямоуг.

$(O_1O = O_1O_2 = O_2O = 2R)$

$\angle O_2O_3O_1 = \angle O_3O_2O_1 = \angle O_3O_1O_2 = 60^\circ$

$\angle HO_2K = \angle MO_1L = 360^\circ - 2\cdot 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$(\angle HO_2K + \angle KO_2O_1 + \angle O_3O_2O_1 + \angle O_3O_2H = 360^\circ,$

$\angle O_3O_2H = \angle KO_2O_1 = 90^\circ$ Аналогично для $\angle MO_1L$.

$\angle O_3O_2O_1 = 60^\circ$.

четырехуг. $HCKO_2$:

$\angle HCK + \angle CHO_2 + \angle O_2KC + \angle HO_2K = 360^\circ$

$\angle HCK = 360^\circ - 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Аналогично $\angle LDM = 60^\circ$

Для $ABCD$:

$\angle DAB + \angle ABC = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 240^\circ$

$\angle ABO = \angle OBG = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{R}{FB}$

$\angle FAO = \angle OAE = \beta = \operatorname{arctg}\frac{R}{FA}$.

$2\alpha + 2\beta = 240^\circ$

$\alpha + \beta = 120^\circ$

$\angle ABO + \angle BAO + \angle BOA = 180^\circ$ $(\triangle AOB)$

$\alpha + \beta + \angle AOB = 180^\circ$

$\angle AOB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

букву в) см. далее

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\cancel{-\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 9x)}$

$\cancel{\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 9x - \cos 5x \cos 9x)}$

Добьемся того что все тригоном. функции будут преобразованы в выр-ие, зависящее от $\cos x$

$g(x) = -\frac{1}{2}\left(\cos(5x+9x) - \cos(9x-5x)\right) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = -\frac{1}{2}(\cos 14x - \cos 4x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\cos 14x = 1 - 2\sin^2 7x$ $\qquad$ $\frac{1+\cos 4x}{2} = \cos^2 2x$

$\sin^2 7x = \frac{1-\cos 14x}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\frac{1}{2}\cos 14x} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\cos 14x} - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3$ $\qquad$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$g(x) = \cos^2 2x - 1 - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \cos^2 2x - \cos^2 x - 4$

$g(x) = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - \cos^2 x - 4$

$g(x) = 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$; $\cancel{g(\cos^2 x) = 4}$

$\cos^2 x \in [0;1]$ $\quad a = \cos^2 x$; $a \in [0;1]$

$\cancel{g(0) = -3;\ g(1) = 4-5-3 = -4;}$ $\qquad$ $\frac{25+16\cdot 3}{16} = \frac{48+25}{16}$

$g(a) = 4a^2 - 5a - 3$

$g(0) = -3$; $g(1) = -4$; $a_{верш} = -\frac{5}{-4\cdot 2} = \frac{5}{8}$

$g_{верш}(a) = 4\cdot\frac{25}{64} - \frac{25}{8} - 3 = -\frac{25}{16} - 3 = -4\frac{9}{16}$

№2 (продолжение):

$g_{max}(x) = -3$

$g_{min}(x) = -4\frac{9}{16}$

Ответ: $g_{max}(x) = -3$,
$g_{min}(x) = -4\frac{9}{16}$.

№4(б) (продолжение)

$AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos 60 = AB^2$

$AO^2+BO^2-84\cdot\frac{1}{2} = AB^2$

$AO^2+BO^2-42 = AB^2$

$BO^2-DF^2 = BF^2$

$BO^2 = BF^2+25$

$AO^2-DF^2 = AF^2$; $AO^2 = 25+AF^2$

$\cancel{(BF^2+25)^2+(AF+25)^2-42AB^2}$

$\cancel{BF^4+50BF^2+625+AF^4+25A}$

$25+AF^2+25+BF^2-42 = AB^2$

$AF^2+BF^2+8 = AB^2$

$(AF+BF)^2-2AF\cdot BF+8 = AB^2$

$AF\cdot BF = 4$

№6

Дано:

$AF : FC = 3 : 4$

$F \in AC$

$L \in BC$

$BF \cap AL = Q$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

Найти $g(L; AC)$, если $g(Q; AC) = 9$

Решение:

$g(Q; AC) = QH$

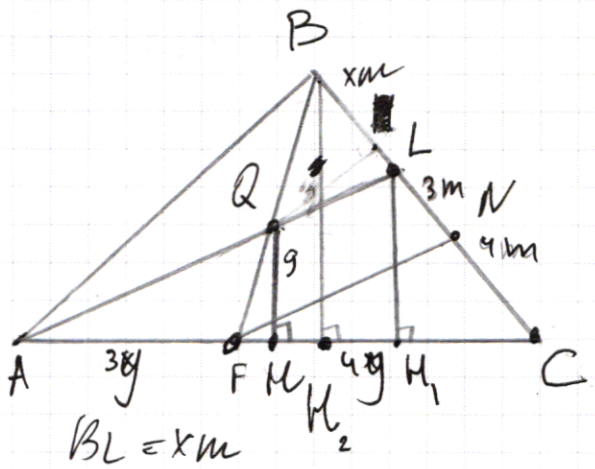
$g(L; AC) = LH_1$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$FN \parallel AL$

~~$\frac{S_{BQL}}{S_{BFN}} = \frac{9}{FN}$~~

~~$\frac{S_{BQL}}{S_{BFN}} = \frac{BQ \cdot BL}{BF \cdot BN}$~~



$BL = xm$

$\frac{LN}{NC} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$

$LN = 3m$, $CN = 4m$

$\triangle AQH \sim \triangle ALH_1$

$\frac{QH}{LH_1} = \frac{AQ}{AL} = \frac{AH}{AH_1}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{FBC}} = \frac{BQ \cdot BL}{BF \cdot BC}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{FBC}} = \frac{BQ \cdot x}{BF \cdot 7}$

$S_{FBC} = \frac{4}{7} S_{ABC}$ ($S_{ABC} : S_{FBC} = AC : FC$.

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{S_{BQL}}{\frac{7}{4} S_{FBC}} = \frac{4 S_{BQL}}{7 S_{FBC}} = \frac{1}{16}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{FBC}} = \frac{7}{64}$; $\frac{xBQ}{7BF} = \frac{S_{BQL}}{S_{FBC}}$

$\frac{xBQ}{7BF} = \frac{7}{64}$; $\frac{BQ}{BF} = \frac{49}{64x}$

$\frac{S_{ALC}}{S_{ABC}} = \frac{x}{7}$

$\frac{BQ}{QF} = \frac{BL}{LC}\left(1 + \frac{CA}{FA}\right)$ по лемме об отрезках

$\frac{49}{64x} = \frac{x}{7}\left(1 + \frac{7}{4}\right)$

$\frac{S_{ALC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{11}}$

$\frac{49}{64x} = \frac{x \cdot 11}{7 \cdot 4}$

$\frac{LH_1}{BH_2} = \frac{x}{7}$

$\frac{49}{16x} = \frac{11x}{7}$; $16 \cdot 11x = 49 \cdot 7$

$x = \sqrt{\frac{49 \cdot 7}{16 \cdot 11}} = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{7}{11}}$

$\frac{BH_2}{QH} =$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано:

$\cos 3x = \sqrt{1 - \sin^2 3x} = \sqrt{1 - (3\sin x - 4\sin^3 x)^2} =$

$= \sqrt{1 - 9\sin^2 x + 24\sin^4 x + 16\sin^6 x} =$

$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 2x} = \sqrt{(1 - 2\sin^2 x)^2 + 1} = \sqrt{\cancel{1} - \cancel{1} - 4\sin^4 x + 4\sin^2 x} =$

$= \sqrt{4\sin^2 x - 4\sin^4 x} = 2\sqrt{\sin^2 x - \sin^2 x} = 2\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}$

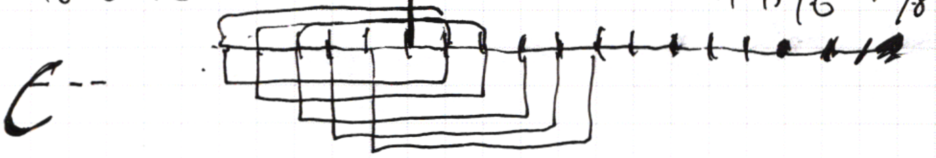
$\sqrt{1 - 9\sin^2 x + 24\sin^4 x + 16\sin^6 x - \sin^2 x + 9\sin^4 x + 24\sin^6 x + 16\sin^8 x} =$

$= \sqrt{1 - 10\sin^2 x + 33\sin^4 x + 40\sin^6 x + 16\sin^8 x}$

$\cos x \sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x \cos x$

5 5 5 5 5 5

18-6=12. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18



нач. послед. пятерок - с 1 по 13.
13 случаев

Если с первой.:

Если разности никаких двух выбр. чисел, среди них нет
- двух чисел :7, двух чисел :5
нет больше числа :35

$x = 35k + n, \; n \in (1; 35)$

Для пяти промежутков $k=0, k=1, k=2, k=3, k=4$

Если

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = (\sin x \cdot \cos 4x + \cos x \sin 4x)^{\sin 9x} + \cos^2 7x + \cos^2 x - 5 =$

$= \cancel{((\sin x(2\cos^2 2x - 1) + 2\cos x \sin 2x \cos 2x)(\sin 4x}$

$\sin 9x = \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x$

$g(x) = (\sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x)\sin 5x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \sin 4x \frac{\sin 10x}{2} + \sin^2 5x \cos 4x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$= \sin 4x \frac{\sin 10x}{2} + \frac{1-\cos 10x}{2}\cos 4x -$

$\frac{\sin^2 10x}{4} + \frac{1 - 2\cos 10x + \cos^2 10x}{4} = \frac{2 - 2\cos 10x}{4} = \frac{1-\cos 10x}{2}$

$4\sin^3 x - 3\sin x$

$\sin 90° = 4\sin^3 x + 3\sin x$

$1 \quad - 4\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{2}$

$g(x) = \sin(3x+2x)\cdot\sin 3(3x) - \sin^2(6x+x) - \cos^2 x - 3$

$(3\sin x - 4\sin^3 x)(\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x) - (\sin 6x \cos x + \sin x \cos 6x) - 3 =$

$= 3(3\sin x - 4\sin^3 x) - 4(3\sin x - 4\sin^3 x)^3$

$(3\sin x - 4\sin^3 x)(3 - 4(3\sin x - 4\sin^3 x)^2)$

$3 - 4(9\sin^2 x - 24\sin^4 x + 16\sin^6 x) =$

$= 3 - 36\sin^2 x + 96\sin^4 x - 64\sin 6x$

$\sin(3x+2x) = (3\sin x - 4\sin^3 x)(\ldots) + \cos 3x \sin 2x$

$\cos x =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-025

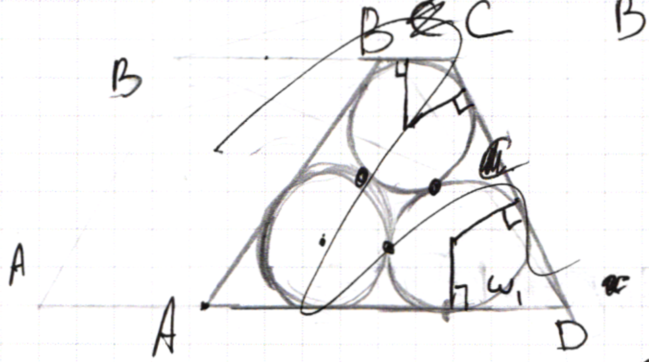
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$AB^2 = (5\sqrt{3}-x)^2 + \left(5\sqrt{3} - \frac{4}{x}\right)^2 -$

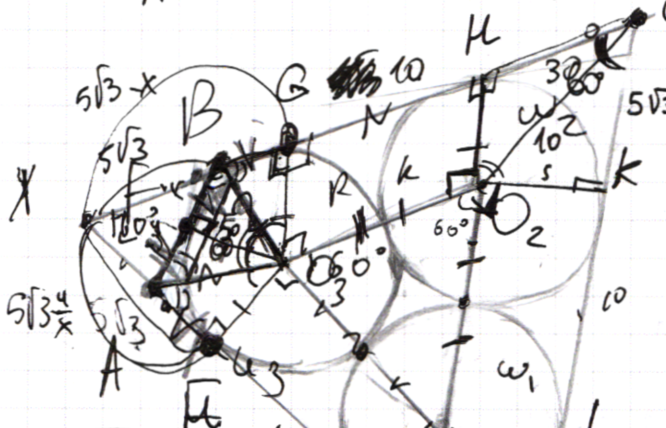


$BO = \frac{42}{AO}$

$AB^2 = \frac{42^2}{AO^2} + AO^2 - 42$

$AB^2 + 42 = \frac{42^2 + AO^4}{AO^2}$

$AB^2 = \frac{42^2 + AO^4}{AO^2} - 42$

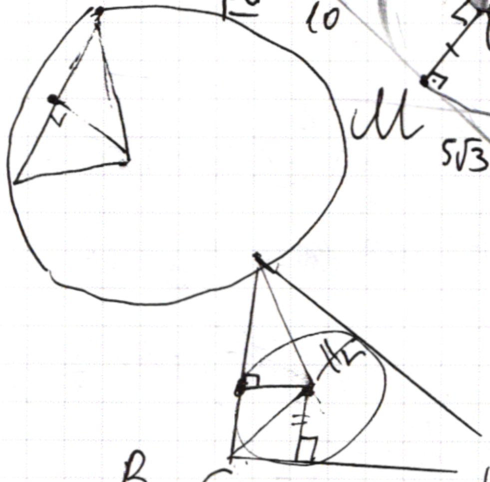


1) Найти r

$AD + BC - AB - CD = 10$

$AO = EM + AE + MD$

O_3O_1ME – прям.



$4\alpha + 60° + 180° = 4\alpha + 240° = 360°$

$4\alpha = 120°$

$\alpha = 30°$

$\angle AOB = 2\alpha = 60°$

$AO \cdot BO = 42$

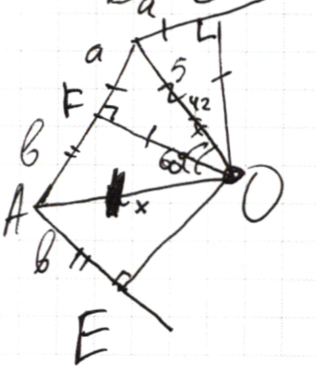
$FB^2 + AF^2 = AO^2 - FO^2 + BO^2 - FO^2$

$FB^2 + AF^2 = AO^2 + BO^2 - 50$

$FB - AF$

Найти AB

~~AB = AO BO~~



$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot AO \cdot \cos\angle AOB$

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO\,AO \cdot \frac{1}{2}$

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - BO \cdot AO$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

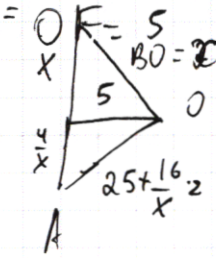
(Нумеровать только чистовики)

$AO \cdot BO = 42$

$x \cdot \frac{4}{x} =$

$(x + \frac{4}{x})^2 = x^2 + 25 + \cancel{25 + \frac{16}{x^2} - 2 \cdot 42 \cdot \frac{1}{2}}$

$\cancel{\frac{AO}{OE} = \frac{BO}{OG}}$



$\cancel{50 + x^2 + \frac{16}{x^2} - 42}$

$x^2 + 25$

$\cancel{25 + \frac{16}{x^2}} =$

$\cos\angle BOG = \frac{BG}{BO}$

$\cos\angle EOA = \frac{OE}{AO}$

$\cos(\angle BOG + \angle EOA) = \frac{1}{2}$

$\cos\angle BOG \cos\angle EOA - \sin\angle BOG \sin\angle EOA = \frac{1}{2}$

$\frac{OG}{BO} \cdot \frac{OE}{AO} - \frac{BG}{BO} \cdot \frac{AE}{AO} = \frac{1}{2}$

$\frac{25 - BG \cdot AE}{42} = \frac{1}{2}$

$\frac{25 - BG \cdot AE}{21} = 1.$

$25 - BG \cdot AE = 21$

$BG \cdot AE = 4$

$BF \cdot FA = 4$

$AB^2 = (5\sqrt{3} - x)^2 + (5\sqrt{3} - \frac{4}{x})^2 - 2(5\sqrt{3} - x)(5\sqrt{3} - \frac{4}{x})$

$AB^2 =$

$\cancel{75 - 10\sqrt{3}x + x^2 + 75 - \frac{40\sqrt{3}}{x} + \frac{16}{x^2} - 2(75 - 5\sqrt{3}x - \frac{20\sqrt{3}}{x} + 4)}$

$(AF + FB)^2 = BO^2 + AO^2 - 2 AO \cdot BO \cos 60^\circ$

$(AF + FB)^2 = BO^2 + AO^2 - AOBO$

$AB^2 = x^2 + \frac{16}{x^2} - 8$

$(x + \frac{4}{x})^2$

$AF^2 + 2AF \cdot FB + FB^2 = BO^2 + AO^2 - AOBO$

$AF^2 + 8 + FB^2 = BO^2 + AO^2 - 42$

$BO^2 = BF^2 + 25$

$\cancel{FB^2 + AF^2 = 50 - 25}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)