

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

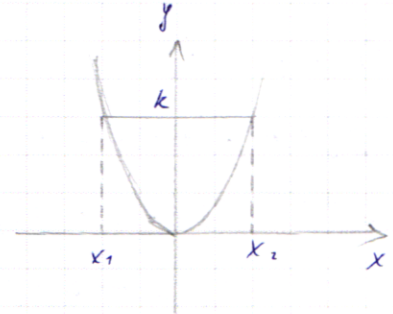
9-5

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое наименьшее значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Схематически изображите график параболы $y = x^2$ и отрезок прямой $y = k$, который отсекает графике параболы, тогда $x_1 = -\sqrt{k}$, $x_2 = \sqrt{k}$, тогда длина такого отрезка равна $2\sqrt{k}$, значит длины отрезков прямой $y = 169$, $y = 64$, $y = a$ равны соответственно 26 , 16 , $2\sqrt{a}$



Пусть в $\triangle ABC$ $AB = 26$,
 $BC = 16$, $AC = 2\sqrt{a}$.

1) $\angle A = 120^\circ$

По теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

$$16^2 = 26^2 + 4a - 2 \cdot 26 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \cos 120^\circ$$

$$256 = 676 + 4a + 52\sqrt{a}$$

$$4a + 52\sqrt{a} + 676 - 256 = 0$$

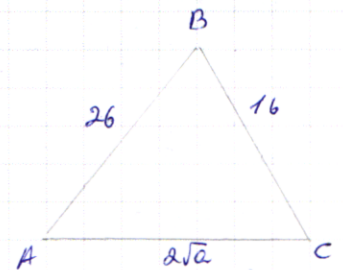
$$4a + 52\sqrt{a} + 420 = 0$$

$$a + 13\sqrt{a} + 105 = 0$$

$$\sqrt{a} = t$$

$$t^2 + 13t + 105 = 0$$

$$D = 169 - 420 < 0$$



$$2) \angle B = 120^\circ$$

$$4a = 16^2 + 26^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos 120^\circ$$

$$4a = 256 + 676 + 16 \cdot 26 = 1192$$

$$a = \frac{1192}{4} = 298$$

$$3) \angle C = 120^\circ$$

$$26^2 = 16^2 + 4a - 2 \cdot 16 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \cos 120^\circ$$

$$676 = 256 + 4a + 64 \cdot 32\sqrt{a}$$

$$4a + 32\sqrt{a} + 420 = 0$$

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$$

$$\sqrt{a} = t$$

$$t^2 + 8t - 105 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 484$$

$$t_1 = \frac{-8 + 22}{2} = 7$$

$$t_2 = \frac{-8 - 22}{2} = -15 - \text{не уф.}$$

$$\sqrt{a} = 7$$

$$a = 49$$

Ответ: 49; 298.

$$2. g(x) = \sin 4x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 3x - 3 =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \frac{1}{2}(1 - \cos 14x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x - 4 = \frac{1}{2}(2 \cos^2 2x - 1) - \frac{1}{2} \cos 2x - 4 =$$

$$= \cos^2 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x - 4 = \cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{9}{2}$$

$$\cos 2x = t \quad t \in [-1; 1]$$

$$g(t) = t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{9}{2}$$

$$t_{\min} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$g_{\min}(t) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{9}{2} = -\frac{73}{16}$$

$$g(-1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$g(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $g_{\min} \left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{73}{16}$; $g_{\max}(-1) = -3$.

4. а) $AD + BC = AN + NM + MD + BE + EF +$
 $+ FC$

$AB + CD = AH + HB + DL + LK + KC$

По свойству касательных

$DM = DL, AN = AH, HB = BE, FC = KC,$

тогда

$AD + BC - AB + CD = MN + EF - LK = 10$

Так как $2R = LK = MN = EF$ (R — радиус окружности), то

$2R = 10$

$R = 5$

б) Проведём прямые AD и BC до пересечения в м. S .
Поскольку радиусы окружностей равны и они
попарно касаются друг друга, то $\triangle DSA \triangle C$ —
равносторонний.

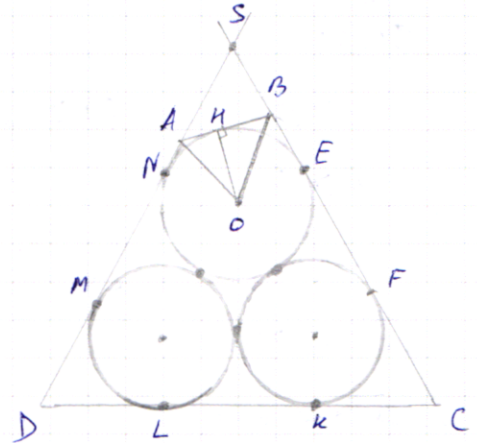
$\angle ASB = 60^\circ$

$\angle SAB + \angle SBA = 120^\circ$

$\angle DAB + \angle CBA = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

$\angle OAB + \angle OBA = \frac{\angle DAB + \angle CBA}{2} = 120^\circ$

$\angle AOM = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$



$$6) S_{ABO} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$$

$$5 \cdot AB = 42 \cdot \sin 60^\circ$$

$$AB = \frac{42\sqrt{3}}{2 \cdot 5} = \frac{21\sqrt{3}}{5}$$

Ответ: $5; 60^\circ; \frac{21\sqrt{3}}{5}$.

$$5. \log_{\sqrt{x+3}}(x+5) \geq 1$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -3 \\ \sqrt{x+3} \neq x+1 \\ \sqrt{x+3} > x \end{cases}$$

$$1) \sqrt{x+3} \neq x+1$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -1 \\ x+3 \neq x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$x^2+x-2 \neq 0$$

$$x_1 \neq 1 \quad x_2 \neq -2 - \text{не ур.}$$

$$2) \sqrt{x+3} > x$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -3 \\ x \neq 0 \\ x+3 > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-3; 0) \\ x \in (0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x \neq \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 0) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

$$\text{ОДЗ: } x \in [-3; 1) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \geq 0$$

Это неравенство выражение имеет такой же знак, что и выражение

$$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$$

$$\sqrt{x+3} \geq x+1 \quad x+5-\sqrt{x+3}+x=0$$

$$x=1$$

$$\sqrt{x+3} = 2x+5 \quad \text{ОДЗ: } x \in [-3; -\frac{5}{2}] \cup (-\frac{5}{2}; \infty)$$

$$x+3 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$4x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$D = 361 - 4 \cdot 88 = 9$$

$$x_1 = \frac{-19+3}{16} = -1 \quad x_2 = \frac{-19-3}{16} = -\frac{11}{8}$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup [-\frac{11}{8}; 1]$$

С учетом ОДЗ: $x \in [-3; -1] \cup [-\frac{11}{8}; 1]$.

Ответ: $x \in [-3; -1] \cup [-\frac{11}{8}; 1]$.

3. Примем шесть нулевок за отдельную цифру, тогда кол-во способов представить их вместе любой цифрой в числе (теперь 13-значном) равно 13.

Посчитаем кол-во последовательностей из "0" и "9" отдельно. Их кол-во будет равно 2^{12} . Кол-во последовательностей, включая нулевки, равно $13 \cdot 2^{12}$.

Подсчитаем кол-во последовательностей, в начале которых стоит 0.

кол-во способов подстановки номеров — 12.

кол-во последовательностей из 0 и 9 — 2^{12} .

кол-во последовательностей, в начале которых номер равен 12 — 2^{11} .

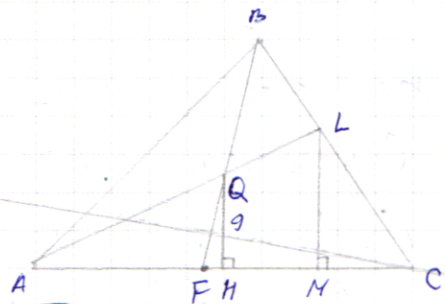
кол-во последовательностей, в которых не встречаются нули, равно $13 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11}$.

кол-во чисел, в записи которых нет какой либо цифры равно 14 (1 число, которое начинается с 5-ки, а затем идут нули и 13 чисел с цифрами 1-4 и 6-9).

кол-во всех чисел равно: $13 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11} - 14 = 14(2^{11} - 1)$

Ответ: 28658.

6.



7. Пусть k — наименьшее выбранное число из 1-го промежутка. Тогда все остальные числа можно представить в виде $35n+k$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \in [0; 5]$, q — сумма остатков от деления данного числа на 35 и остатка от деления k на 35. Сумму 25 чисел можно представить в виде $S = 75k + \sum q$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Каждое выбранное число можно представить в виде $35n + q$, где $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [0; 4]$, q - остаток от деления данного числа на 35. Так как числа k -го промежутка имеют вид $35k + q$, то сумму 25 чисел можно представить в виде

$$S = 0 \cdot 35 \cdot 5 + 1 \cdot 35 \cdot 5 + \dots + 4 \cdot 35 \cdot 5 + \sum q =$$

$$= 35 \cdot 50 + \sum q = 175 + \sum q$$

Чтобы выполнялся условие задачи, никакие 2 числа не должны иметь одинаковые остатки при делении на 35. Чтобы $\sum q$ была минимальной, она должна быть равна сумме чисел от 0 до 24.

$$\sum q = \frac{0+24}{2} \cdot 25 = 12 \cdot 25 = 300$$

$$S = 175 + 300 = 475$$

Ответ: 475.

6. Пусть $AF = 3x$, $FC = 4x$

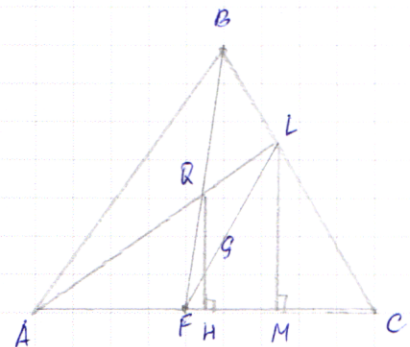
$$S_{ABF} = \frac{1}{2} h_{AC} \cdot AF$$

$$S_{FBC} = \frac{1}{2} h_{AC} \cdot FC$$

$$\frac{S_{ABF}}{S_{FBC}} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{FBC}}{S_{ABC}} = \frac{4}{7}$$

$$S_{FBC} = \frac{4}{7} S_{ABC}$$



Пример как $S_{PQL} = \frac{1}{16} S_{AMC}$, vco

$$S_{PQL} = \frac{4}{7} S_{AMC} - \frac{1}{16} S_{AMC} = \frac{57}{112} S_{AMC}$$

$$S_{ALC} = \frac{1}{2} LM \cdot AC$$

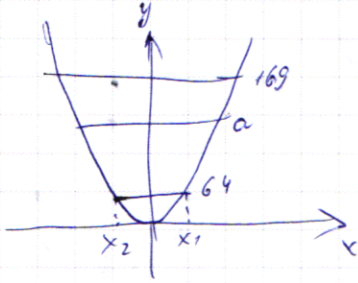
$$S_{ALF} = \frac{1}{2} LAM \cdot AF$$

$$\frac{S_{ALC}}{S_{ALF}} = \frac{7}{3}$$

$$S_{PLC} = \frac{4}{7} S_{ALC}$$

$$S_{FQL} = S_{ALF} - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x_1 = 8$$

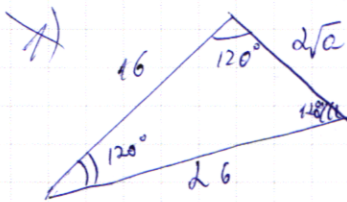
$$a = 2\sqrt{a}$$

$$x_2 = -8$$

$$v_{64} = 16$$

$$v_{169} = 26$$

$$\begin{array}{r} \cancel{26} \times \cancel{26} \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$



$$\begin{aligned} 1) \quad 26^2 &= 16^2 + 2\sqrt{a}^2 - 2 \cdot 16 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \cos 120^\circ = \\ &= 256 + 4a - 64\sqrt{a} \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= 256 + 4a + 32\sqrt{a} = 676 \end{aligned}$$

$$4a + 32\sqrt{a} + 256 - 676 = 0$$

$$\cancel{256} \quad \cancel{676}$$

$$4a + 32\sqrt{a} - 420 = 0$$

$$476 - 56 = 420$$

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$$

$$\sqrt{a} = t \quad t \geq 0$$

$$t^2 + 8t - 105 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 484$$

$$t_1 = \frac{-8 + 22}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$t_2 = \frac{-8 - 22}{2} = -15 \text{ не ур.}$$

$$\sqrt{a} = 7 \quad a = 49$$

$$\cancel{2\sqrt{a}} = 14$$

$$2) \quad \cancel{16^2} = \cancel{26^2}$$

$$4a = 16^2 + 26^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 256 + 676 + 260 =$$

$$= 1192$$

$$\underline{a} = \frac{1192}{4} = \frac{1000}{4} + \frac{100}{4} + \frac{80}{4} + \frac{12}{4} = 250 + 25 + 20 + 3 =$$

$$= 275 + 23 = \underline{298}$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \quad \times 256 \\ \times 22 \quad + 676 \\ \hline 44 \quad + 932 \\ + 260 \\ \hline 484 \quad 1192 \end{array}$$

$$3) \quad 16^2 = 26^2 + 4a - 2 \cdot 26 \cdot 2\sqrt{a} \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 676 + 4a + 52\sqrt{a} = 256$$

$$4a + 52\sqrt{a} + 676 - 256 = 0$$

$$4a + 52\sqrt{a} + 420 = 0$$

$$a + 13\sqrt{a} + 105 = 0$$

$$\sqrt{a} = t$$

$$t^2 + 13t + 105 = 0$$

$$D = 169 - 420 < 0$$

$$2. f(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} (\cancel{\cos 4x} - \cancel{\cos 14x}) - \frac{1}{2} (1 - \cos 14x) - \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 14x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) - 4 = \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x - 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 - 4$$

$$-2 \sin 4x + \sin 2x - 4 = 0$$

$$-4 \sin 2x \cos 2x + \sin 2x - 4 = 0$$

$$\sin 2x (4 \cos 2x + 1 - 4) = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$4 \cos 2x = -5$$

$$2x = \pi n$$

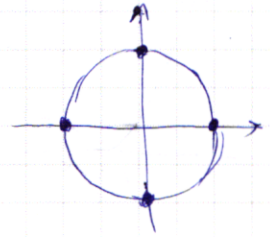
$$\cos 2x = -\frac{5}{4} < -1 - \text{не ур.}$$

$$x = \frac{\pi n}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$f(2\pi n)$$

$$f(\pi + 2\pi n)$$



$$g(x) = \frac{1}{2} (2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x) - 4 = \cos^2 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x - 4 =$$

$$= \cos^2 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{9}{2}$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$y_0 = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{9}{2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{9}{2} = \frac{1}{16} - \frac{2}{16} - \frac{72}{16} = -\frac{73}{16}$$

$$1) \cos 2x = 1$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$2) \cos 2x = -1$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

$$\text{Отв.: } -\frac{73}{16}; -3.$$

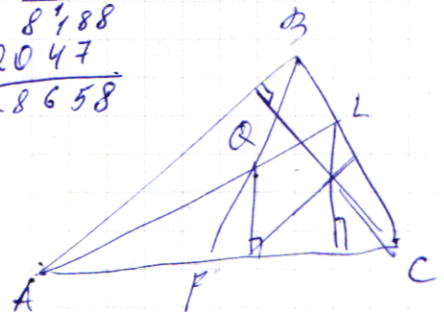
$$2'' (26 + 12) - 14 =$$

$$= 2'' \cdot 14 - 14 = 14(2'' - 1)$$

$$2048 - 1 = 2047$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 2047 \\ + 8188 \\ \hline 28658 \end{array}$$

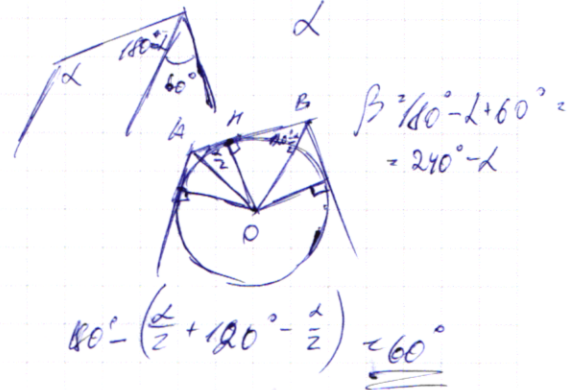
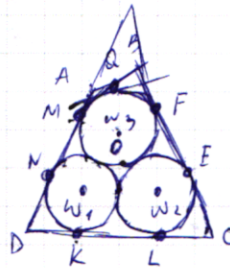
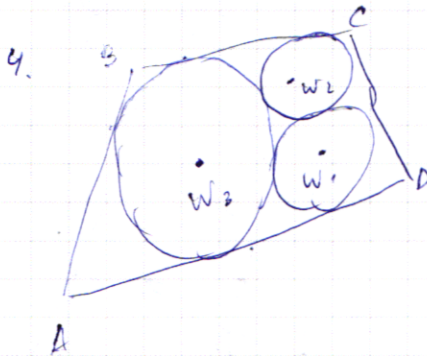
$$\frac{64-7}{16-7} = \frac{57}{9}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\frac{905555550000000000}{12345678910111213}$

1) $2^{12} \cdot (13 - 12 \cdot 2^{11})$



$$AD + BC - AB - CD = 10$$

$$AD + BC = AM + MN + ND + BF + FE + CE$$

$$AB + CD = AM + BF + KL + DN + EC$$

$$AD + BC - AB - CD = \cancel{AM + MN + ND + BF + FE + CE} - \cancel{AM + BF + KL + DN + EC} = 10$$

$$MN + FE - KL = 10$$

$$MN = KL = FE = 10 = 2R \quad R = 5$$

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin 60^\circ$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{5}{2} AB = \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

$$AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$$

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \frac{6}{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$$

$$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$$

OD 3:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \sqrt{x+3} \neq 1+x \\ \sqrt{x+3} > x \\ x > -5 \end{cases} \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 1, -2 \end{cases}$$

OD 3:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases}$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = -2$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ x+3 > x^2 \end{cases} \begin{cases} x \in [-3; 0) \\ x \in [0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \end{cases}$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad x \in (\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

OD 3: $x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \cup [1; 2)$

$$\sqrt{x+3} - x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x + 5 - \sqrt{x+3} + x = 0$$

$$\sqrt{x+3} = 2x + 5$$

$$2x + 5 \geq 0$$

$$x + 3 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$$4x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$D = 361 - 4 \cdot 88 =$$

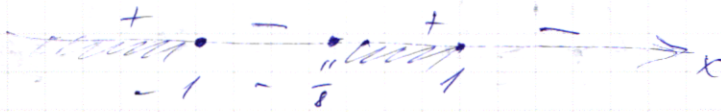
$$\frac{3}{35} \cdot \frac{8}{2}$$

$$= 361 - 352 = 9$$

$$x_1 = \frac{-19+3}{16} = -1$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{16} = \frac{-22}{16} = -\frac{11}{8}$$

$$-\frac{11}{8}$$

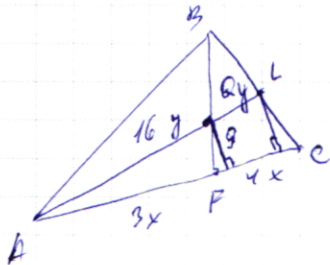


$$x \in (-\infty; -1] \cup [-\frac{11}{8}; 1]$$

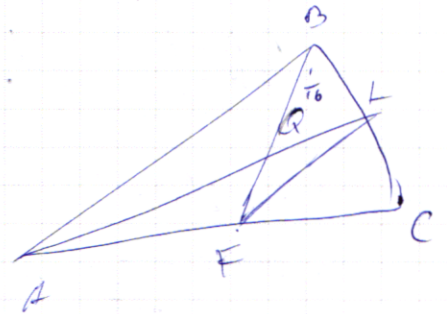
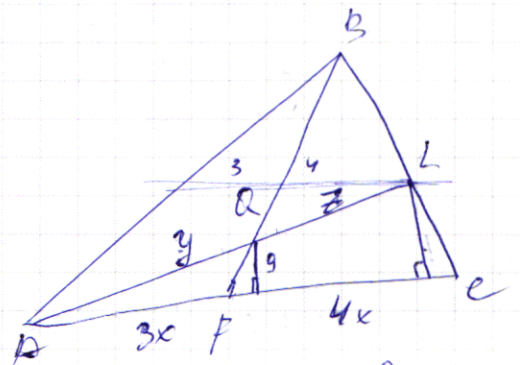
OP 3:

$$x \in [-3; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

Отв: $x \in [-3; -1] \cup [-\frac{11}{8}; 1]$



$$S_{BQL} : S_{ABC} = 1 : 16$$



- [1; 35], [36; 70], [71; 105], [106; 140], [141; 175]

- a_i b_i c_i d_i e_i

- a_1 b_2 c_3 d_4 e_5

- a_6 b_7 c_8 d_9 e_{10}

$$\frac{1}{16} + x =$$

$$35n + q$$

$$S = 5k + 10k + 15k + 20k + 25k =$$

$$= 75k + q$$

$$S_0 = \frac{0+24}{2} \cdot 25 = 12 \cdot 25 = 300$$

$$k = \frac{P+q}{2}$$

$$q_i \in [0; 34]$$

$$3 = k + 2$$

$$S = 75k + 300 = 375$$

$$30 = 2k$$

$$k = 1$$