МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-018

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

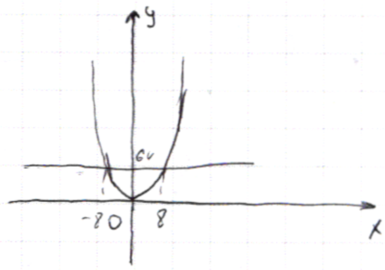
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

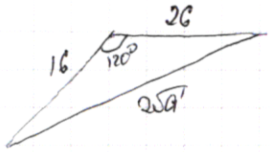
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y=x^2$ $\quad y=169 \Downarrow x=\pm 13 \Downarrow$ отрезок $=26$ $\quad y=64 \Downarrow x=\pm 8 \Downarrow$ отрезок $=16$ $\quad y=a \Downarrow x=\pm\sqrt{a} \Downarrow$ отрезок $=2\sqrt{a}$



I случай



по т. косинусов

$4a = 26\cdot 26 + 16\cdot 16 - 2\cdot 26\cdot 16\cdot \cos 120°$

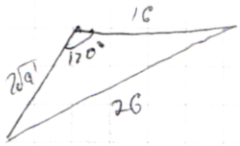
$4a = 26\cdot 26 + 16\cdot 16 - 2\cdot 26\cdot 16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\cancel{4}a = \overset{13\cdot 13}{\cancel{26}\cdot\cancel{26}} + \overset{4}{\cancel{16}}\cdot 16 + 26\cdot\overset{4}{\cancel{16}}$

$a = 13\cdot 13 + 4\cdot 16 + 26\cdot 4$

$a = 169 + 4\cdot 42 = 169 + 168 = \boxed{337}$

II случай



по т. косинусов

$26\cdot 26 = 16\cdot 16 + 4a - 2\cdot 2\sqrt{a}\cdot 16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\overset{5}{\cancel{10}}\cdot\overset{21}{\cancel{42}} = \cancel{4}a + \overset{8}{\cancel{32}}\sqrt{a}$

$105 = a + 8\sqrt{a}$

пусть $\sqrt{a} = t$, $t \geq 0$

$t^2 + 8t - 105 = 0$

$D = 64 + 420 = 484 = (22)^2$

$\begin{cases} t = \frac{-8\pm 22}{2} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = -15 \end{array}\right. \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow t = 7 \Rightarrow \sqrt{a} = 7 \Rightarrow \boxed{a = 49}$

III случай т.к. в треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона $\Rightarrow (26 > 16) \Rightarrow$ напротив $\angle = 120°$ не может лежать сторона $= 16 \Rightarrow$ больше случаев нет

Ответ: $a \in \{49; 337\}$

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - (\sin^2 7x + \cos^2 x) - 3$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \left(\frac{1 - \cos 14x}{2} + \frac{\cos 2x + 1}{2}\right) - \frac{6}{2}$

$g(x) = \frac{\cos 4x - \cancel{\cos 14x} - 1 + \cancel{\cos 14x} - \cos 2x - 1 - 6}{2}$

$g(x) = \frac{\cos 4x - \cos 2x - 8}{2}$

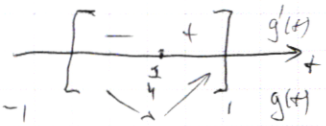
$g(x) = \frac{2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x - 8}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - \cos 2x - 9)$

пусть $\cos 2x = t,\ t \in [-1; 1]$

$g(t) = \frac{1}{2}(2t^2 - t - 9)$

$g'(t) = \frac{1}{2} \cdot (4t - 1) \quad g'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$



$g(-1) = \frac{1}{2}(2 + 1 - 9) = \frac{1}{2} \cdot (-6) = -3$

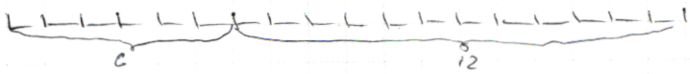
$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 9\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{72}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-73}{8}\right) = \frac{-73}{16}$

$g(1) = \frac{1}{2}(2 - 1 - 9) = \frac{1}{2} \cdot (-8) = -4$

$g(x)_{max} = -3 \ ; \ g(x)_{min} = -\frac{73}{16}$

Ответ: $max = -3$; $min = -\frac{73}{16}$

№3



I случай, когда шесть пятёрок стоят на местах с 1–6

а) оставшиеся 12 мест распределяются между "0" и "9"

Если один "0" и одиннадцать "9" $C^1_{12} = \frac{12!}{1!\,11!} = \frac{12}{1} = 12$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) два „0" и десять „9" $C_{12}^2 = \frac{12!}{2!\,10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$

в) 3 „0" и 9 „9" $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3} = 220$

г) 4 „0" и 8 „9" $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!\,8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$

д) 5 „0" и 7 „9" $C_{12}^5 = \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$

е) 6 „0" и 6 „9" $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!\,6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 12 \cdot 11 = 84 \cdot 11 = 924$

ж) 7 „0" и 5 „9" $C_{12}^7 = C_{12}^5 = 792$

з) 8 „0" и 4 „9" $C_{12}^8 = C_{12}^4 = 495$

и) 9 „0" и 3 „9" $C_{12}^3 = 220$

к) 10 „0" и 2 „9" $C_{12}^2 = 66$

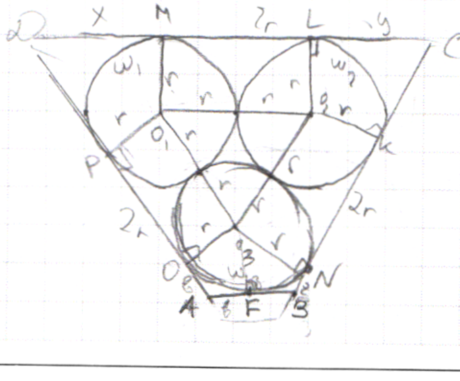
л) 11 „0" и 1 „9" $C_{12}^1 = 12$

$\Sigma = 2(12 + 66 + 220 + 495 + 792) + 924 = 4094$

II Затем рассчитаем кол-во случаев расстановки шести пятёрок подряд: 1-6; 2-7; 3-8; 4-9; 5-10; 6-11; 7-12; 8-13; 9-14; 10-15; 11-16; 12-17; 13-18. $\Rightarrow$ таких случаев 13

$\Rightarrow \Sigma_\Sigma = 13 \cdot 4094 = 53222$ случая.

Ответ: 53222.



№4

а) $AD + BC - AB - CD = 10$

Пусть r – радиус всех окружностей

1) O_1 и O_2 и точка пересечения ω_1 и ω_2 будут лежать на одной прямой, т.к. если мы проведем касательную к этим двум окружностям в т. пересеч. ω_1 и ω_2, то радиусы, проведенные в т. касания, будут перпендикулярны одной прямой $\Rightarrow$ O_1, O_2 и т. перес. лежат на одной прямой

Аналогично для O_1, O_3 и т. перес. ω_1 и ω_3 и для O_2 и O_3, т. перес. ω_2 и ω_3

2) Эти прямые будут равны $2r$ и будут $\parallel$ сторонам ~~прямо~~четырёхугольника, т.к. $\left.\begin{array}{l} O_2K \perp CB \\ O_2K = O_3N \\ O_3N \perp CB \end{array}\right\} \Rightarrow O_2O_3 \parallel CB$ и $O_2O_3 = NK = 2r$

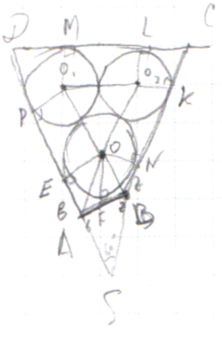
Аналогично для ML и PO

3) пусть $DM = x$; $LC = y$; $NB = z$; $OA = b$

Т.к. расстояния от вершины до т. касания равны, можно сделать вывод, что $PD = DM = x$; $LC = CK = y$; $NB = FB = z$; $AF = OA = b$

4) Тогда запишем $AD + BC - AB - CD = 10$ через наши отрезки: $\cancel{b} + 2r + \cancel{x} + \cancel{z} + 2r + \cancel{y} - \cancel{x} - 2r - \cancel{y} - \cancel{b} - \cancel{z} = 10$

$\Downarrow$ $2r = 10 \Rightarrow r = 5$

б) 

1) рассм. $\triangle OO_1O_2$

$O_1O_2 = OO_2 = O_1O = 2r \Rightarrow \triangle OO_1O_2$ - р/ст $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OO_1O_2 = 60^\circ$ и все углы в $\triangle OO_1O_2 = 60^\circ$

Т.к. мы доказали что $NK \parallel OO_2$ и т.д. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ BC; AD и DC параллельны сторонам равностороннего треугольника $\Rightarrow$ если продлить DA и CB, получим $\angle DSC = 60^\circ$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) рассм. $\triangle FOB$ и $\triangle OBN$ они равны (по ~~2-ум~~ гипот. и катету)
$\Rightarrow$ (если $\angle FOB = \alpha$) тогда $\angle OBF = 90 - \alpha = \angle OBN \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle FBN = 180 - 2\alpha$ (1)
Аналогично $\triangle EAO$ и $\triangle OAF$ (если $\angle AOF = \beta$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EAF = -2\beta + 180$ (2)

Б) из (1) и (2) $\Rightarrow \angle SAB = 2\beta$ а $\angle SBA = 2\alpha$, а
$\angle AOB = \alpha + \beta$
Тогда в $\triangle SAB$ $180 = 60 + 2\alpha + 2\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$

в) $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot r \cdot AB$
$\frac{1}{2} \cdot 42 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AB$
$AB = \frac{42\sqrt{3}}{10} = 4{,}2\sqrt{3}$

Ответ: а) 5; б) 60°; в) $4{,}2\sqrt{3}$

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

ОДЗ: $\begin{cases} x+5>0 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x \neq \sqrt{x+3}-1 \\ \sqrt{3+x} > x \\ 3+x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \in [-3;0] \cup [0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3;1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} \geq x+1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} \leq x+1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} \geq x+1 \\ 2x+5 \geq \sqrt{x+3} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} \leq x+1 \\ 2x+5 \leq \sqrt{x+3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} \geq x+1 \ (1) \\ \sqrt{x+3} \leq 2x+5 \ (2) \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} \leq x+1 \ (3) \\ \sqrt{x+3} \geq 2x+5 \ (4) \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [-3;1] \\ x \in [-2;\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [1;\infty) \\ x \in [-3;-2] \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

(1) $\sqrt{x+3} \geq x+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 \geq x^2+2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -1 \\ x^2+x-2 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-3;-1] \\ x \in (-1;1] \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-3;1]$

Тогда (3) $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1;\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-3;-2] \cup [1;\infty) \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x \in [1;\infty)$

(2) $\sqrt{x+3} \le 2x+5 \Rightarrow \begin{cases} 2x+5\ge 0 \\ x+3 \le 4x^2+20x+25 \\ x+3\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{5}{2} \\ x\ge -3 \\ 4x^2+19x+22\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{5}{2} \\ 4x^2+19x+22\ge 0\end{cases} \Rightarrow$

$4x^2+19x+22=0$

$D=19\cdot 19-16\cdot 22=361-352=9$

$x=\frac{-19\pm 3}{8} = \left[\begin{array}{l} x=\frac{-16}{8}=-2 \\ x=-\frac{22}{8}=-\frac{11}{4}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{5}{2} \\ x\in(-\infty;-\frac{11}{4}]\cup[-2;\infty)\end{cases} \Rightarrow x\in[-2;\infty)$

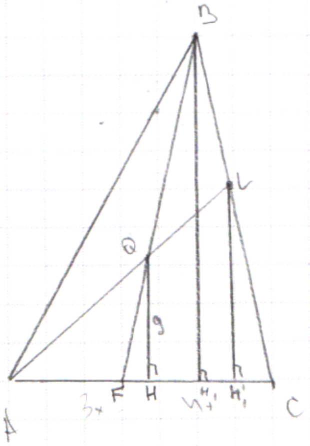
(4) $\sqrt{x+3}\ge 2x+5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+5\le 0\\ x+3\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2x+5\ge 0\\ x+3\ge 4x^2+20x+25\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -\frac{5}{2}\\ x\ge -3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -\frac{5}{2}\\ x\in[-\frac{11}{4};-2]\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[-3;-\frac{5}{2}]\\ x\in[-\frac{5}{2};-2]\end{array}\right. \Rightarrow x\in[-3;-2]$

$\Rightarrow x\in[-2;1]$

С учётом ОДЗ: $x\in[-2;1)$

Ответ: $[-2;1)$

№6



1) по т. Менелая в $\triangle FBC$ и AL - сек

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{3}{7}=1 \Rightarrow \frac{CL\cdot BQ}{LB\cdot QF}=\frac{7}{3}$

2) т.к. $\triangle ABF$ и $\triangle FBC$ имеют общую высоту, то $\frac{S_{ABF}}{S_{BFC}}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{BFC}}{S_{ABC}}=\frac{4}{7}$

3) $\triangle BQL$ и $\triangle FBC$ имеют общий угол

$\Rightarrow \frac{S_{QBL}}{S_{BFC}}=\frac{QB\cdot BL}{BF\cdot BC}$ (т.к. $S_{BFC}=\frac{4}{7}\cdot S_{ABC}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{QBL}}{\frac{4}{7}S_{ABC}}=\frac{QB\cdot BL}{BF\cdot BC} \Rightarrow \frac{S_{QBL}}{S_{ABC}}=\frac{7}{4}\cdot\frac{QB\cdot BL}{BF\cdot BC}=\frac{1}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{QB\cdot BL}{BF\cdot BC}=\frac{1}{28} \Rightarrow QB\cdot BL\cdot 28=BF\cdot BC$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) по т. Менелая $\triangle ALC$ и FB - сек.

$$\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{LB}{BC}=1 \Rightarrow \frac{4}{3}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{LB}{BC}=1 \Rightarrow \frac{4}{3}\cdot\frac{LB}{BC}=\frac{QL}{AQ}$$

№7

Возьмём наименьшие пять чисел из наибольшего ~~отрезка~~ промежутка. (Проверяем лишь числа которые в сумме дают число с последней цифрой 5 или 0)

141 142 143 144 145 (Сумма никаких двух не $\vdots$ 35)

Затем подберём к ним наименьшие из [106; 140]

106 107 108 109 110 (Сумма никаких двух не $\vdots$ 35)

[71; 105]

71 72 73 74 75 (Сумма никаких двух не $\vdots$ 35)

[36; 70]

36 37 38 39 40 (Сумма никаких двух не $\vdots$ 35)

с4 провер. с 3-им столбцом с2 с1 с 5ст.

[1; 35]

1 2 3 4 5

$$\sum = (S_1) \frac{141+145}{2}\cdot 5 + \frac{106+110}{2}\cdot 5 + \frac{71+75}{2}\cdot 5 + \frac{36+40}{2}\cdot 5 + \frac{1+5}{2}\cdot 5 =$$

$$= \frac{5}{2}(286+116+146+76+6) = \frac{5}{\cancel{2}}\cdot \cancel{630}^{315} = 1575$$

Ответ: 1575

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15 - 018

ШИФР

(заполняется секретарём)

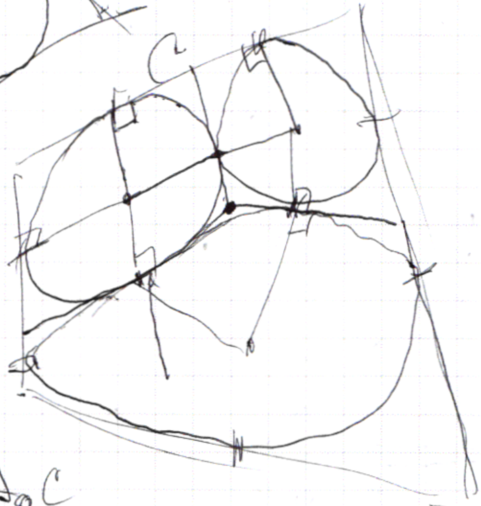
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{3+x} > x$

$x^2 - x - 3 < 0$

$D = 1 + 12 = \sqrt{13}$

$AD + BC - AB - CD = 10$

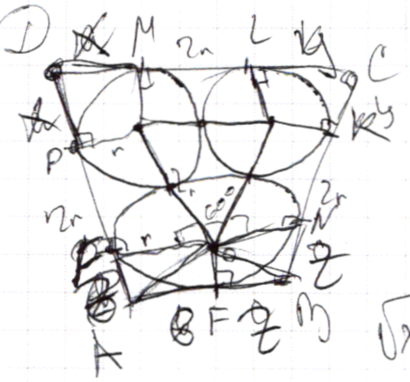


$\sqrt{g(x)} \geq f(x)$

$\left[\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq f^2(x) \end{cases} \right.$

$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$22 \cdot 16 = 132 + 22 = 352$



$\cancel{a + b + 2r + c + k + 2r - b - c - a - k - 2r = 10}$

$\sqrt{x+3} \geq 1 + x$

$2r = 10$

$1 + x \geq 0$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x + 3 = 1 + 2x + x^2 \end{cases}$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$ $x = 1$ $x = -2$

$x \in [-2; 1]$

$2\beta + 2\alpha = 120$

$\beta + \alpha = 60$

$180 - 2\beta$

2β

$r = 5$

$89 \cdot 9 = 171 + 9$ 361

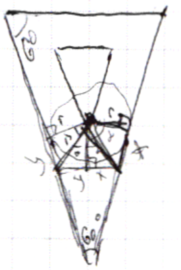
$\sqrt{3+x} > x$

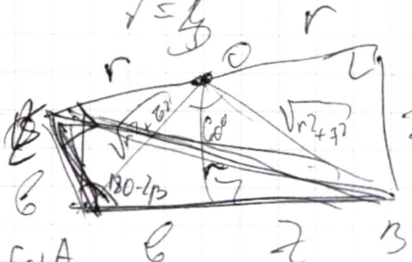
$\left[\begin{cases} x < 0 \\ 3 + x \geq 0 \end{cases} \right.$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3 + x > x^2 \end{cases}$

$x^2 - x - 3 < 0$

$D = 1 + 12 = 13$





$\sqrt{g(x)} \leq f(x)$

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq f^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

$\log_{\sqrt{x+3} - x}(x+5) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3} - x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3} - x}(\sqrt{x+3} - x)$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

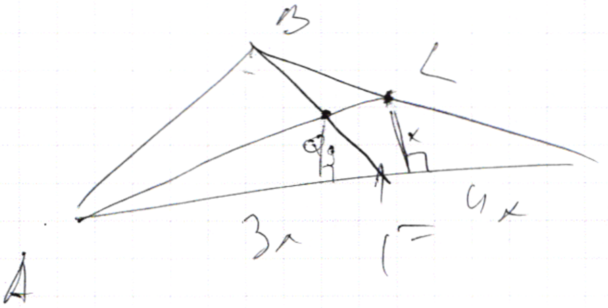
$x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



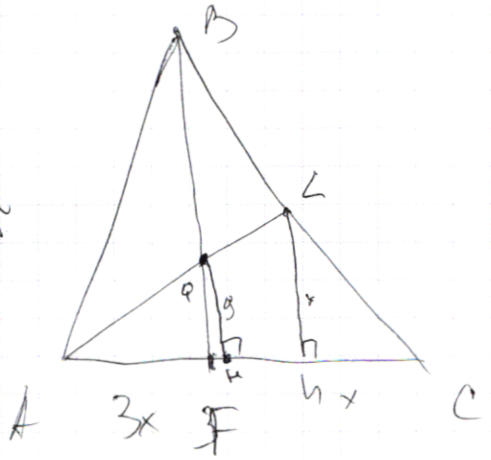
$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$$

x = ?

$3\cdot CL\cdot BQ = 7\cdot LB\cdot QF$

$QB\cdot BL\cdot 28 = BF\cdot BC$

$S_{AQF} = \frac{27}{7\cdot 4} S$



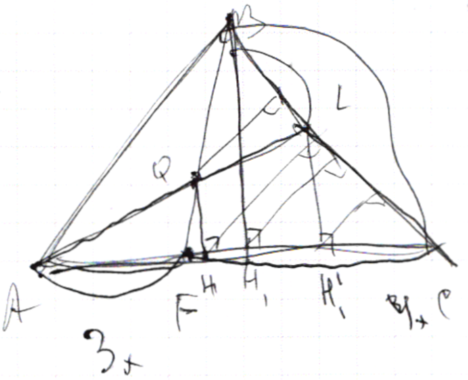
$$S_{BQL} = \frac{3\cdot CL\cdot BQ}{BF\cdot BC} = \frac{7\cdot \cancel{LB}\cdot QF}{QB\cdot \cancel{BL}\cdot \cancel{28}}$$

3

$$\frac{9\cdot CL\cdot BQ}{BF\cdot BC} = \frac{QF}{QB}$$

$\frac{9\cdot 3}{4\cdot 7} = \frac{S_{AQF}}{S_{ABC}}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{AQF}} = \frac{7}{3}\cdot\frac{BH_1}{QH}$



$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH_1 \cdot AC$

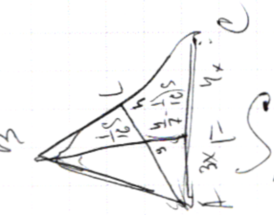
$S_{ALC} = \frac{1}{2} LH_1' \cdot AC$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ALC}} = \frac{BH_1}{LH_1'}$

$\frac{AB\cdot 3}{AB\cdot 7} = \frac{3}{7}$

$\frac{BH_1}{LH_1'}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{ALC}} = \frac{BH_1}{LH_1'}$



$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot BH_1 \cdot AC$

$S_{AQF} = \frac{1}{2}\cdot QH \cdot \frac{3}{4} AC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AQF}} = \frac{BH_1}{QH}\cdot\frac{4}{3}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{ALC}} = \frac{BH_1}{LH_1'} = \frac{7 BH_1}{3\cdot 8}$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{3}{7} = 1$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{BQ\cdot BL}{BF\cdot BC}$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QF} = \frac{7}{3}$

$\frac{S_{ABF}}{S_{BFC}} = \frac{3}{4}$

$S_{BFC} = \frac{4}{7} S_{ABC}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-018

ШИФР

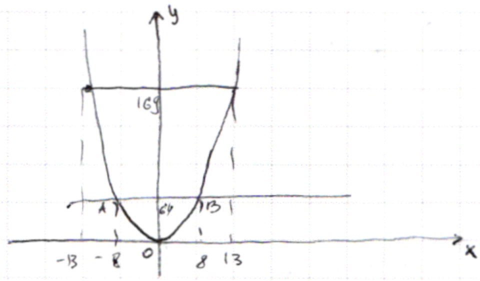
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=x^2$ $y=169$ $y=64$ $y=a$

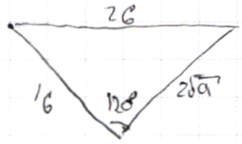
$x=\pm 8$ $x=\pm 13$

$AB=16$ $CD=26$ $LM=2\sqrt{a}$



$13 \cdot 13 = 169$

I



$26 \cdot 26 = 16 \cdot 16 + 4a + 2 \cdot 16 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2}$

$10 \cdot 42 = 4a + 32\sqrt{a}$

пусть $\sqrt{a} = t$, $t \geq 0$

$4t^2 + 32t - 10 \cdot 42 = 0$

$t^2 + 8t - 105 = 0$

$D = 64 + 420 = 484 = (22)^2$

$\begin{cases} t = \frac{-8 \pm 22}{2} \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 7 \\ t = -15 \end{array}\right. \\ t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow t = 7$

$\sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$

$26 \cdot 26 = 676$ $16 \cdot 26 = 416$ $22 \cdot 22 = 484$

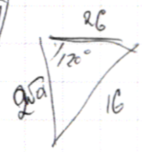
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

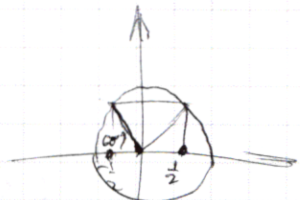
$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

III



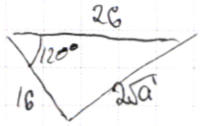
$16 \cdot 16 = 256$

$16 \cdot 16 = 26 \cdot 26 + 4a + 2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot 26$



$42 \cdot 4 = 168$

II



$4a = 26 \cdot 26 + 16 \cdot 16 + 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}$

$a = 13 \cdot 13 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 26$

$a = 13 \cdot 13 + 4 \cdot 42$

$a = 169 + 168 = 337$

$676 + 416 = 1092$, $1092 + 256 = 1348$, $1348 : 4 = 337$

$169 + 169 = 337$

$\cos 4x - \cos 14x + 2 \cdot \sin 9x \cdot \sin 5x$

$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x)$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 7 - 3$

$\sin 5x \cdot \sin 9x - (\sin^2 7x + \cos^2 y) - 3$

$\sin^2 7x = \frac{1 - \cos 14x}{2}$, $\cos^2 y = \frac{\cos 2y + 1}{2}$

$1 - 2\sin^2 y$

$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$

$\frac{\cos 2y + 1}{2}$

$\cancel{\sin x + \cos x = 2 \cdot \sin x}$

$\sin x + \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$

$\cos y - \cos x = -2 \cdot \sin\frac{y-x}{2} \cdot \sin\frac{x+y}{2}$

$\sin\frac{y-x}{2} \cdot \sin\frac{y+x}{2} = \frac{1}{2}(\cos x - \cos y)$

$\frac{y-x}{2} = 5x$ $\frac{y+x}{2} = 9x$ $\begin{cases} y - z = 10x \\ y + z = 18x \end{cases}$ $y = 14x$, $z = 4x$

$2\sin^2 y = 1 - \cos 2y$

$\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$

$$g(x) = \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x}{2} - \left(\frac{1-\cos 14x}{2} + \frac{\cos 2x + 1}{2}\right)$$

$$g(x) = \frac{\cos 4x - \cos 14x - 1 + \cos 14x - \cos 2x - 1}{2}$$

$$g(x) = \frac{2\cos^2 2x - \cos 2x - 3}{2}$$

пусть $\cos 2x = t$, $t \in [-1; 1]$

$$g(x) = \frac{2t^2 - t - 3}{2}$$

$g'(x) = \frac{1}{2}(4t - 1)$ $\quad g'(x) = 0$

$t = \frac{1}{4}$

$g(-1) = \frac{1}{2}\cdot(2+1-3) = \frac{1}{2}\cdot 0$

$g(1) = \frac{1}{2}(2-1-3) = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{24}{8}\right) = \frac{-25}{16}$

$\frac{BL}{BC} = \frac{1}{28} \cdot \frac{BF}{\ldots}$

$792 + 495 = 1287$

$1287 + 298 = 1585$

$1585 \cdot 2 = 3170$

$3170 + 924 = 4094$

$84 \cdot 11 = 924$

5 3

1) 5 5 5 5 5 5

2) 5 5 5 5 5 5

3) 5 5 5 5 5 5

4)

12

66

220

1,0 11,9

2,0 10,9

3,0 9,9

4,0 8,9

$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!\,10!} = \frac{11\cdot 12}{2} = 66$

$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,9!} = \frac{11\cdot 12\cdot 10}{3!} = 220$

$12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1$

33 15

43+15

58

$C_{12}^4 = 11\cdot 12$

$C_{12}^9 = \frac{12!}{9!\,3!}$

$4094 \cdot 13 = 12282 + 40940 = 53222$

$4094 \cdot 13$

12282

+4094

53222

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)