

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

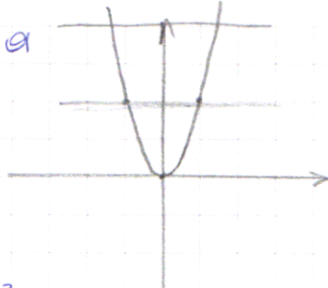
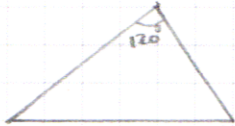
4-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = 2x^2$ $y = 9x$, $y = 18$, $y = a$ $a = ?$



2) $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \cos\left(\frac{3x+7x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-7x}{2}\right) - \sin^2 x + 1 - \sin^2 5x + 4$

3) "0" "7" "8" 17-значное "S" - 7 цифр.

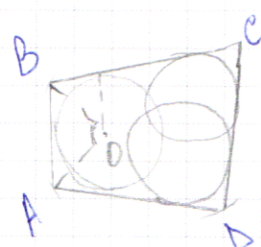
10 - "8"

$10 \times 10 \times 10 \times 45 \times 45$

0007777777
123456789
7777777777
0000000000
10(7-1)
10(7-2)
10(7-3)
10(7-4)
10(7-5)
10(7-6)
10(7-7)
10(7-8)
10(7-9)
10(7-10)
10(7-11)
10(7-12)
10(7-13)
10(7-14)
10(7-15)
10(7-16)
10(7-17)



a) $AD + BC - AB - CD = 12$
 $AD + BC = 12 + AB + CD$



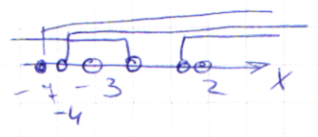
R - ? $AO \cdot BO = 58 = \triangle AOB, AB = ?$

5) $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$
 $x+7 \geq 0 \quad x \geq -7$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x \geq 1 \\ \sqrt{x+7} - x > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x+7} \neq 1+x \\ \sqrt{x+7} > x \\ x > -4 \end{cases} \begin{cases} x+7 \neq 1+x^2+2x \\ x+7-x^2 > 0 \\ x > -4 \end{cases} \begin{cases} x^2+x-6 \neq 0 \\ x^2-x-7 < 0 \\ x > -4 \end{cases}$$

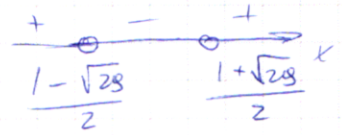
OD3: $(-4; -3) \cup (-3; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; 2) \cup (2; +\infty)$

$x^2+x-6 \neq 0 \quad D=1+24=5^2 \quad x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$



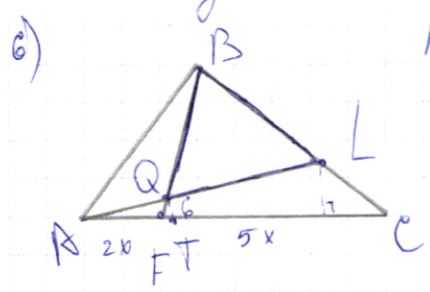
$x^2-x-7 < 0 \quad D=1+28=\sqrt{29}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$



$0,5 \pm \sqrt{\frac{29}{4}} = 0,5 \pm \sqrt{7,25} = 0,5 \pm \sqrt{6,25 + 2,25} = 0,5 \pm \sqrt{2,5^2 + 1,5^2}$

$\log \sqrt{3+7} - 3(7) \geq 1 \quad \log \sqrt{10} - 3 \geq 1 \quad \log \sqrt{10} - 3 \geq \log \sqrt{10} - 3$



$AF:BC = 2:5 \quad QT = 6$
 $S_{ABQL} : S_{ABAC} = 5:12 \quad LC = ?$

7)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5) \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ \sqrt{x+7}-x > 0 \\ x+4 > 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7 \neq 1+x^2+2x \\ x+7-x^2 > 0 \\ x > -4 \\ x \geq -7 \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы

$$x^2+x-6 \neq 0$$

$$y = x^2+x-6$$

$$x^2+x-6 = 0$$

$$\Delta = 1+24 = 5^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3 \quad x_{2,2} = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} \neq 1+x \\ \sqrt{x+7} > x \\ x > -4 \\ x \geq -7 \end{cases}$$

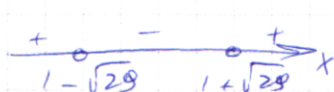
$$\begin{cases} x^2+x-6 > 0 \\ x^2-x-7 < 0 \\ x > -4 \\ x \geq -7 \end{cases}$$

Решим второе неравенство системы

$$y = x^2-x-7 \quad x^2-x-7 = 0 \quad \Delta = 1+28 = 29$$

$$x+7-x^2 > 0 \quad x^2-x-7 < 0$$

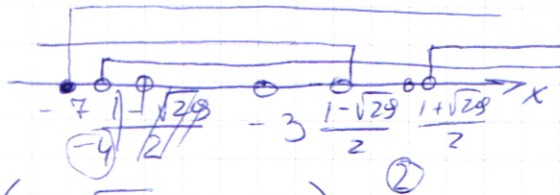
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$



Решим третье неравенство системы

$$x > -4$$

Общее решение:



$$ODZ: (-4; 3) \left(3; \frac{1-\sqrt{29}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty \right)$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-001
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)