МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 9-6

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

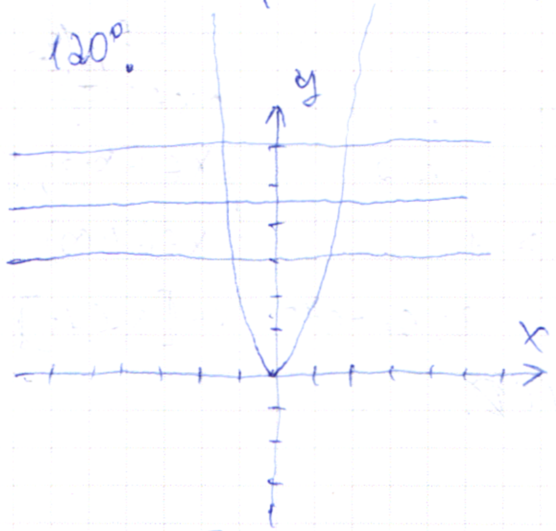
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№Задача 1

Дана парабола $y=2x^2$, пересекает прямые $y=98$; $y=18$, $y=a$. Найти при каких a, можно составить треугольник с углом 120°.



1) $2x^2=98$.

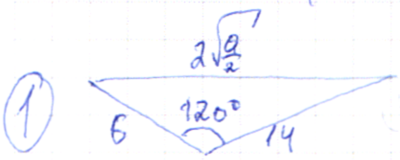
$x=\pm 7$, тогда длина ($l=14$).

$2x^2=18$

$x=\pm 3$, тогда длина ($l=6$).

$2x^2=a$

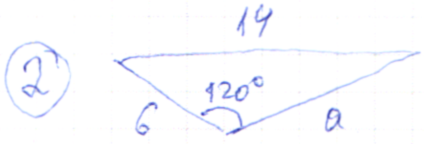
$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$, тогда длина ($l=2\sqrt{\frac{a}{2}}$



$2\sqrt{\frac{a}{2}}$ 2) Найдём a через теорему косинусов:

$\left(2\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2=196+36+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 6$.

$2a=316$; $a=\underline{158}$



3) Найдём 2-ое возможное значение a через теорему косинусов:

$196=36+2a+12\sqrt{\frac{a}{2}}$

Пусть $\sqrt{\frac{a}{2}}=t$, $t\geq 0$, $a=2t^2$, тогда

$160=4t^2+12t$.

$t^2+3t-40=0$. ; $D=169$; $t_1=\frac{-3-13}{2}<0$; $t_2=\frac{10}{2}=5$.

4) $\sqrt{\frac{a}{2}}=5$; $a=\underline{50}$. Ответ: 158 и 50.

Задача 5

Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1.$$

$$(1)\begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1. \\ x+4 > 0. \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1. \\ x+4 > 0. \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$$

1) Решим (1) систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0. \\ \sqrt{x+7}-x < 1. \\ x > -4. \\ 2x+4 \leq \sqrt{x+7} \\ x+7 \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-x-7 < 0. \\ x^2+x-6 > 0. \\ x > -4. \\ x > -1 \\ x \geq -7. \\ 4x^2+16x+16 \leq x+7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2} \\ x_3 = -3;\ x_4 = 2. \\ x > -1 \\ x_5 = -3;\ x_6 = -0{,}75 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right). \\ x \in (-\infty;-3) \cup (2;\infty) \\ x \in (-1;\infty) \\ x \in [-3;-0{,}75] \end{cases}$$

$x \in \varnothing.$

2) Решим (2) систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} > x+1 \\ x > -4 \\ 2x+4 \geq \sqrt{x+7} \\ 2x+4 \geq 0. \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x-6 < 0. \\ x > -4. \\ 4x^2+15x+9 \geq 0. \\ x \geq -2. \\ x \geq -7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-3;2) \\ x \in (-4;\infty). \\ x \in (-\infty;-3] \cup [-0{,}75;\infty) \\ x \in [-2;\infty) \\ x \in [-7;\infty) \end{cases}$$

$x \in [-0{,}75;2)$

3) $$\left[\begin{array}{l} x \in \varnothing. \\ x \in [-0{,}75;2) \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-0{,}75;2)$.

Задача 3

Найдём количество позиций, на которых может стоять семь „8“, сначала пронумеруем позиции от 1 до 17, получим что „8“ стоят на следующих позициях: с 1 по 7; с 2 по 8; с 3 по 9; с 4 по 10; с 5 по 11; с 6 по 12;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

С 7 по 13; С 8 по 14; С 9 по 15; С10 по 16, С11 по 17.

Всего имеем 11 вариантов расположения семи „8".

В каждом из этих вариантов на остальных 10 позициях можно ставить либо ~~цы~~ числа „7", либо „0" („0" – нельзя ставить на первую позицию).

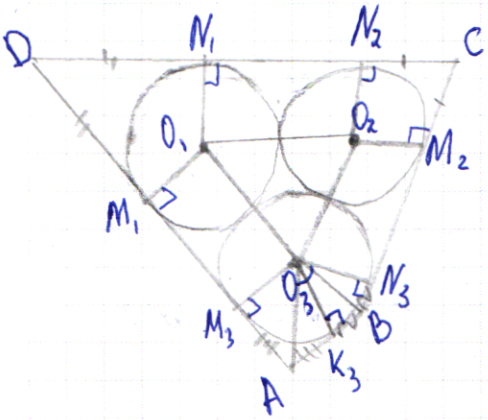
Тогда остаётся 9 позиций, на которые можно поставить числа „7" и „0", по два. Так как „0" нельзя ставить на первую позицию, наша конечная формула будет:

$11(2^9-2)=11(512-2)=11\cdot 510=5610.$

Ответ: 5610.

Задага 4

Дано: $ABCD$ – четырёхугольник.
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – окружности
равными радиусами;
ω_1 касается AB, DC;
ω_2 касается DC, CB;
ω_3 касается CB, BA, AD.
Найти: а) R, если
$AD+BC-AB-CD=12$.
б) ~~Найти~~ $\angle AOB$, где
O – центр ω_3.
в) $AO \cdot BO = 58$, AB – ?



Решение

а) 1) По условию дано, что окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ с равными радиусами, тогда $O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = 2r$.

2) ~~AB~~ Найдём радиусы этих окружностей.

Точки касания окружностей к сторонам обозначены, как показано на рисунке.

$AB = AK_3 + K_3B$. $\cancel{r+r=2r}$

$BC = BN_3 + N_3M_2 + M_2C = \cancel{r+2r+r=4r}$

$CD = DN_1 + N_1N_2 + N_2C = \cancel{r+2r+r=4r}$

$AD = AM_3 + M_3M_1 + M_1D = \cancel{r+2r+r=4r}$

$\cancel{AM_3} + M_3M_1 + \cancel{M_1D} + \cancel{BN_3} + N_3M_2 + \cancel{M_2C} - \cancel{AM_3} - \cancel{AK} \cancel{BN_3} - \cancel{DM_1} - N_1N_2 - \cancel{CM_2} = 12$

3) $M_3M_1 = N_3M_2 = N_1N_2 = 2r$.

$2r + 2r - 2r = 12$.

$2r = 12$; $r = \underline{6\text{ см}}$. Ответ: 6см.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-6

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$\cos 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\sin 10x + \sin 4x) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sin 7x \cdot \cos 3x$

$\frac{3}{2}\sin 10x + \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{7}{2}\sin 10x - \frac{7}{2}\sin 4x - 2\cos x - 10\sin 5x$

$5\sin 10x - 2\sin 4x - 2\cos x - 10\sin 5x$

$10\sin 5x \cdot \cos 5x - 10\sin 5x - 2\sin 4x - 2\cos x$

$10\sin 5x(\cos 5x - 1) - 2(\sin 4x - \cos x) = g'(x)$

№5.

$\begin{cases} 0 < \sqrt{x+3} - x < 1 \\ x+5 > 0 \\ x+5 \le \sqrt{x+3} - x \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x+3} > x \\ \sqrt{x+3} < x+1 \\ x > -5 \\ 2x+5 \le \sqrt{x+3} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x^2+2x+1 > x+3 \\ x > -5 \\ 4x^2+20x+25 \le x+3 \\ x > -1 \end{cases}$

$19 \cdot 19 = 361$

$16 \cdot 22 = 352$

$\begin{cases} D = 1+12 = 13 \\ \cancel{D} = x^2+x-2 > 0 \\ x > -5 \\ 4x^2+19x+22 \le 0 \\ x > -1 \end{cases}$

$\begin{cases} D = 13 \\ D = 9 \\ x > -5 \\ D = 361 - 352 = 9 \\ x > -1 \end{cases}$

$510 \cdot 11 = 5610$

5610

$11(2^9 - 2) =$

$= 11(512-2) =$

$11 \cdot 510 = \underline{5610}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

б) 1) Найдём $\angle AOB$.

Выразим AO:

$AO^2 = \sqrt{6^2 + AM_3^2} = \sqrt{36 + AM_3^2}$

чистовик

Страница № 5

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-6

ШИФР

(заполняется секретарём)

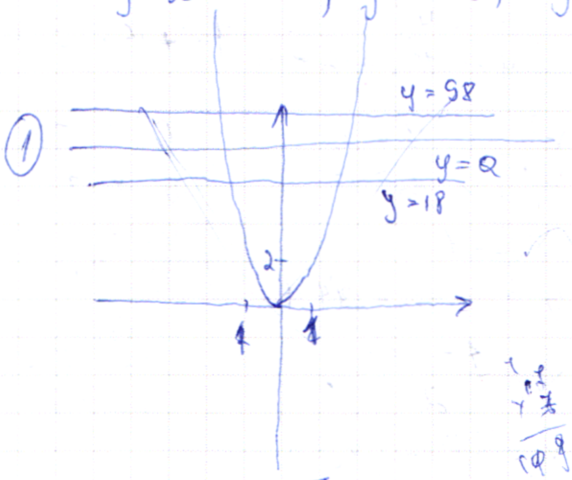
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y=2x^2$, $y=98$, $y=18$, $y=a$, $\angle=120°$.

$18 \times 18 = 324$

98×98: 784, 882, 9604



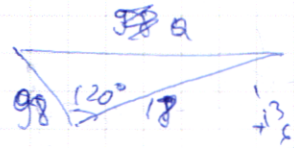
① $\cancel{98^2 = a^2+18^2+2\cdot a\cdot 18\cdot \frac{1}{2}}$.

$\cancel{9604 = a^2+324+18a}$

$\cancel{a^2+18a-9280=0}$

$\cancel{D = 324+37120=\sqrt{37444}}$ ⊖

$9280 \times 4 = 37120$



98×18: 784, 98, 1764

② $\cancel{a^2 = 9604+324+2\cdot 98\cdot 18\cdot \frac{1}{2}}$.

$\cancel{a^2 = 9928+1764}$.

$\cancel{a = \sqrt{11692} = \sqrt{2\cdot 5846} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2923}} =$

$\cancel{= 2\sqrt{2923} \approx 110}$

$\sqrt{37444} = \sqrt{4\cdot 9361} = \sqrt{4\cdot 11\cdot 851} = 2\sqrt{11\cdot} \approx 190$.

$a = \frac{-18+190}{2} = \frac{172}{2} = 86$.

№2.

$g(x) = \sin 3x\cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

$g'(x) = (\sin 3x\cdot \sin 7x)' - (\sin^2 x)' + (\cos^2 5x)' + (4)'$

$g'(x) = (\sin 3x)'\cdot \sin 7x + (\sin 7x)'\cdot \sin 3x - 2\sin x + 10\sin 5x$

$g'(x) = 3\cos 3x\cdot \sin 7x + 7\cos 7x\cdot \sin 3x - 2\cos x - 10\sin 5x$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$$

(1) $\begin{cases} 0 < \sqrt{x+7} - x < 1 \\ (x+4) > 0. \\ x+4 \leq \sqrt{x+7} - x \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 1 \\ (x+4) > 0 \\ (x+4) \geq \sqrt{x+7} - x \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \sqrt{x+7} > x+1 \\ x \geq -4. \\ 2x+4 \geq \sqrt{x+7} \\ 2x+4 \geq 0. \\ x+7 \geq 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x+7 > x^2+2x+1. \\ x \geq -4 \\ 4x^2+15x+9 \geq 0. \\ x \geq -2 \\ x \geq -7. \end{cases}$

$x \in (-3;2)$

$\begin{cases} \cancel{x^2+x-6>0.} \; \cancel{x \in (-\infty;-3) \cup (2;\infty)} \\ \cancel{x \geq -4.} \; x \in (-4;\infty) \\ x \in (-\infty;-3) \cup (-0{,}75;\infty) \\ x \in [-2;\infty) \\ x \in [-7;\infty) \end{cases}$

$x \in (-0{,}75;2)$.

N5.

(1) $\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0. \\ \sqrt{x+7} - x < 1. \\ x \geq -4 \\ 2x+4 \leq \sqrt{x+7} \\ x+7 \geq 0. \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x+7} > x. \\ \sqrt{x+7} < x+1. \\ x+1 \geq 0. \\ x+7 \geq 0. \\ x \geq -4. \\ 4x^2+16x+16 \leq x+7 \end{cases}$ $\begin{cases} x+7 \geq x^2 \\ x+7 < x^2+2x+1. \\ x > -1 \\ x \geq -7 \\ x \geq -4. \\ 4x^2+15x+9 \leq 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - x - 7 < 0. \\ x^2 + x - 6 > 0. \\ x \geq -1 \\ D = 225 - 144 = 81 \end{cases}$ $\begin{cases} D = 1+28. = 29 \\ D = 1+24 = 25. \\ x > 1 \\ D = 81. \end{cases}$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} \approx -2{,}2.$

$\frac{1+\sqrt{29}}{2} = 3{,}2.$

$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}. \\ x_3 = \frac{-1-5}{2} = -3;\ x_4 = 2. \\ x \geq -1. \\ x_5 = \frac{-15-9}{8} = -3;\ x_6 = -\frac{3}{4} = -0{,}75. \end{cases}$

$\begin{cases} x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x \in (-\infty;-3) \cup (2;\infty) \\ x \in (-1;\infty) \\ x \in (-3;-0{,}75) \end{cases}$

$\begin{cases} x \in (-1;-0{,}75) \\ x \in (-\infty;-3) \cup (2;\infty) \end{cases}$

$x \in \varnothing$

$121 \times 5 = 605$

4431

481×121

(1) $2x^2 = 98.$ $x = \pm 7$

(2) $2x^2 = 18.$ $b = \pm 3$

$2x^2 = a$

$x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

$l = 14.$

$l = 6$

$l = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$

N1

$49 \times 2 = 98$

$2\sqrt{\frac{a}{2}}$

14см

6

$49 \times 3 = 147$

(1) $196 = 36 + 2a + 12\sqrt{\frac{a}{2}}.$

$160 - 2a - 12\sqrt{\frac{a}{2}} = 0$ (2)

$80 - a - 6\sqrt{\frac{a}{2}} = 0.$

$\cancel{a^2 + 18a - 6400 = 0.}$

$\cancel{D = 324 + 25600 = 25924.}$

$\cancel{25924 = 4 \cdot 6481 =}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-6

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$l = 14$

$l = 6$

$l = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$

$\cancel{196 = 36 + a^2}$ $\left(2\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2 = 36 + 196 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 14$

$\left(2\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2 = 232 + 84$

$\cancel{a^2 = 316}$

$4 \cdot \frac{a}{2} = 316$

$2a = 316$

$a = 158$

$196 = 36 + 2a + 12\sqrt{\frac{a}{2}}$

$\sqrt{\frac{a}{2}} = t$; $a = 2t^2$, $t > 0$.

$160 = 4t^2 + 12t$

$4t^2 + 12t - 160 = 0$ $(:4)$

$t^2 + 3t - 40 = 0$

$D = 9 + 160 = 169$

$t_1 = \frac{-3-13}{2} = -8$; $\cancel{t_2 = \frac{5}{4} = 1,25}$ $\cancel{t_2 = \frac{15}{4}}$ $t_2 = \frac{10}{2} = 5$

$\sqrt{\frac{a}{2}} = 1,25 = \frac{5}{4}$

$\frac{a}{2} = 25$; $a = 50$

$\frac{a}{2} = \frac{25}{16}$

$16a = 50$

$a = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$

$\cancel{\frac{a}{2} = \frac{25}{4}}$

$\cancel{4a = 50}$

$\cancel{a = 12,5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

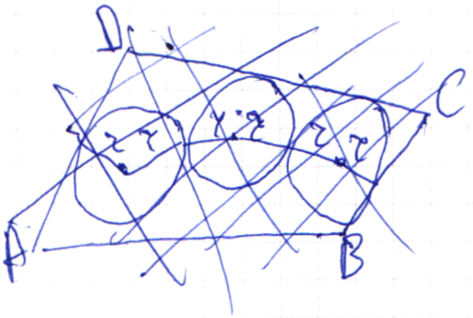
(Нумеровать только чистовики)

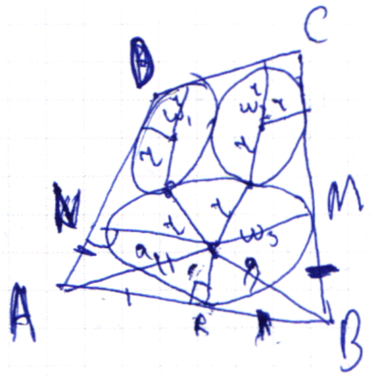
№3

0, 7, 8.

Есть 8 ок. подряд. на остальные 10 позиций надо поставить 0,7.

N 4





AD+BC−AB−CD=12.