

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

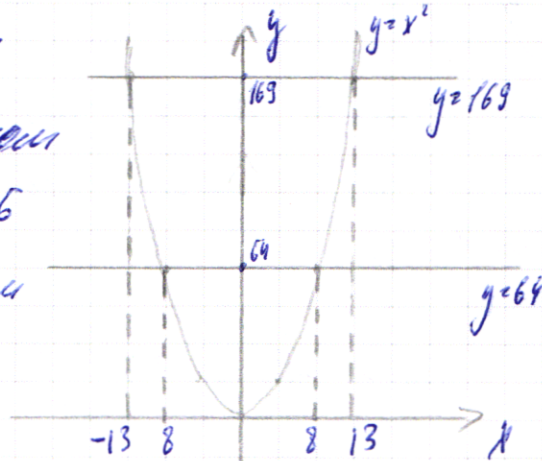
15-045

Заполняется ответственным секретарем

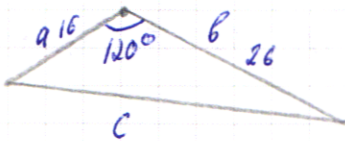
1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- №1
- 1) Интервал, образуемый графиками
 $y = 169$, равен $|-13| + |13| = 26$
- 2) Интервал, образуемый графиками
 $y = 64$, равен $|-8| + |8| = 16$



- 1) Первый случай, когда угол 120° лежит против стороны c .



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

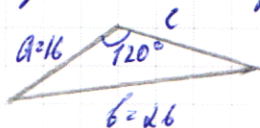
$$c^2 = 16^2 + 26^2 - 16 \cdot 26 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2$$

$$c = \sqrt{16^2 + 26^2 + 26 \cdot 16} = \sqrt{d^2 \cdot 8^2 + d^2 \cdot 13^2 + d^2 \cdot 4 \cdot 26}$$

$$= 2 \sqrt{16 + 169 + 104} = 2 \sqrt{289} = 34$$

Значит $y = \left(\frac{34}{2}\right)^2 = 289$ (по ~~обратному~~ причине, что начал)

- 2) Второй случай, когда угол 120° лежит против стороны b , равной 26.



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$

$$b^2 = 16^2 + c^2 + 16c$$

$$c^2 + 16c + 16^2 - 26^2 = 0$$

$$D_1 = 64 - 16^2 + 26^2$$

$$c = -8 + \sqrt{64 - 16^2 + 26^2}$$

$$c = -8 - \sqrt{64 - 16^2 + 26^2} - \text{так как } < 0$$

$$c = -8 + \sqrt{2^2 \cdot 16 - 2^2 \cdot 8^2 + 2^2 \cdot 13^2} =$$

$$= -8 + 2\sqrt{16 - 64 + 169} = -8 + 2 \cdot 2^2 = 14$$

Значит $y = \left(\frac{14}{2}\right)^2 = 49$

3) Третий вариант не рассматриваем, т.к. против большего угла, должна лежать большая сторона, а $b > a$, но цел.

Ответ: Параметр $a = 49$; ~~$a = 289$~~

№3

Пусть 6 человек пойдут $= x$, тогда
 у девяти 13 возможных путей
 у нуля — 12 т.к. им не может стоять на первом месте
 у $x - 13$.

Всего возможных вариантов

место 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

кол-во вар 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 1 (в любом

Значит всего: $3^{12} - 1$ (когда роль первой)

месте определенно
будет x и
выставят его
на той же роли
месте)

Ответ: $3^{12} - 1$

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$ODS: \sqrt{x+3} - x > 0$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) - 1 \geq 0$$

$$x+5 > 0$$

~~$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$$~~

$$\sqrt{x+3} - x \neq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x) \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x+5 - \sqrt{x+3} - x) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+3} - (x+3) + 2)(2(x+3) - \sqrt{x+3} - 1) \geq 0$$

Пусть $\sqrt{x+3} = t, t \geq 0$

$$(t - t^2 + 2)(2t^2 - t - 1) = 0$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9^2$$

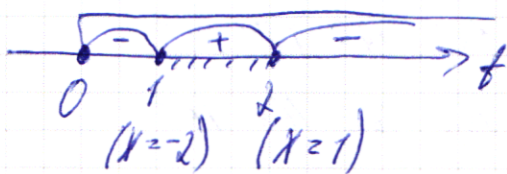
$$D = 1 + 8 = 9^2$$

$$t_1 = \frac{1+3}{2} = 2$$

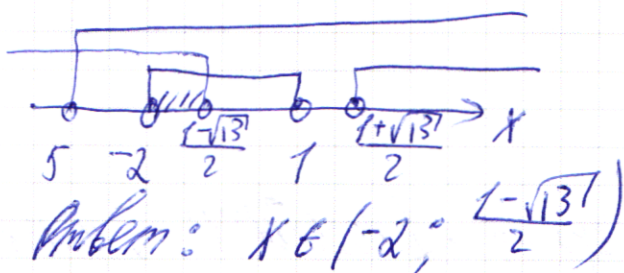
$$t_1 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{1-3}{2} = -1 - \text{отбрасываем}$$

$$t_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} - \text{отбрасываем}$$



знаки $x \in [-2; 1]$



ответ: $x \in (-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2})$

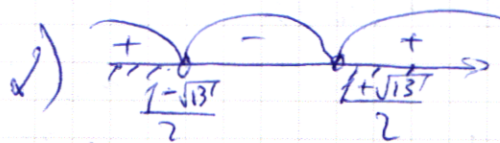
MS: 1) $x > -5$

$$\sqrt{x+3} = x$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$\sqrt{x+3} - x \neq 1$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

3) $x \neq -2, x \neq 1$

№4

Разности двух чисел не должны быть кратны 35.
 Минимальное значение будет если брать первые
 пять чисел каждого промежутка, но тогда
 между собой с соответ. порядковыми номер. каждой
 группы будет в разности давать число кратное 35,
 следовательно порядковые номера не должны
 повторяться, следовательно нам нужно идти от
 меньшей группы к большей и брать ~~числа~~ числа
 с соответ. порядковыми номерами:

1 гр. : 1, 2, 3, 4, 5	} ⇒	1	2	3	4	5
2 гр. : 6, 7, 8, 9, 10		41	42	43	44	45
3 гр. : 11, 12, 13, 14, 15		81	82	83	84	85
4 гр. : 16, 17, 18, 19, 20		121	122	123	124	125
5 гр. : 21, 22, 23, 24, 25		161	162	163	164	165

Когда их сумма будет равна:

2045

Ответ: 2045

№2

$$g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x -$$

$$- \sin^2 4x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} (1 - \sin^2 4x) - \sin^2 4x -$$

$$- \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3,5 = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x - 4$$

$$g'(x) = \cos 4x - 2 \sin 4x + \sin 2x = \sin 2x - 4 \cos 2x \cdot \sin 2x =$$

$$= \sin 2x (1 - 4 \cos 2x) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad \cos 2x = \frac{1}{4}$$

$$2x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad 2x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad x = \pm \frac{\arccos \frac{1}{2}}{2} + \pi n$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos 2\pi - \frac{1}{2} \cos \pi - 4 = \frac{1}{2} \cdot (+1) - \frac{1}{2}(-1) - 4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4 = -3$$

~~$$g\left(\pm \frac{\arccos \frac{1}{2}}{2} + \pi n\right) =$$~~

$$g(\pi) = \frac{1}{2} \cos 4\pi - \frac{1}{2} \cos 2\pi - 4 = \frac{1}{2} (+1) - \frac{1}{2} (+1) - 4 = -4$$

$$g\left(\pm \frac{\arccos \frac{1}{2}}{2} + \pi n\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - 4 = -4,5$$

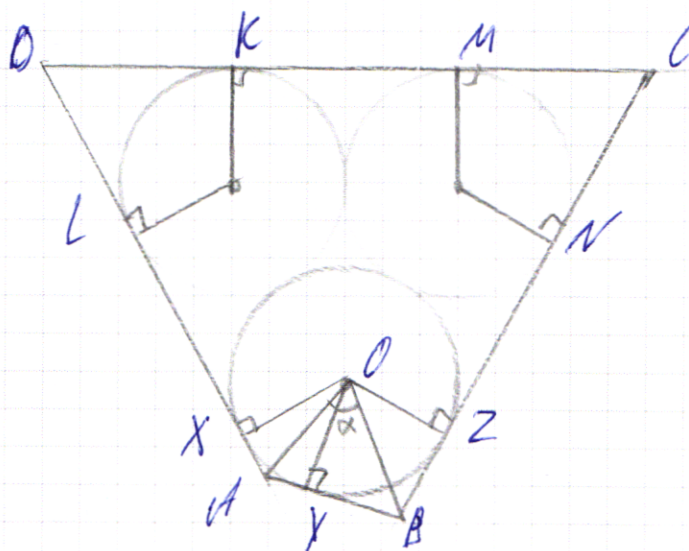
Наибольшее значение: -3

Наименьшее значение: -4,5

Ответ: Наибольшее: -3

Наименьшее: -4,5

№4



$$CM = CN$$

$$ZB = XB$$

$$AX = AY$$

$$DL = DK$$

$$DC = DK + KM + MC$$

$$CB = CN + NZ + ZB$$

$$AD = DL + LX + XA$$

$$AB = AY + YB$$

$$\begin{aligned} 1) \quad AD + BC - AB - CD &= DL + LX + XA + CN + NZ + ZB - AY - YB - \\ &\quad - DK - KM - MC = LX + KM + NZ = 10 \end{aligned}$$

$$LX = KM = NZ = 2r$$

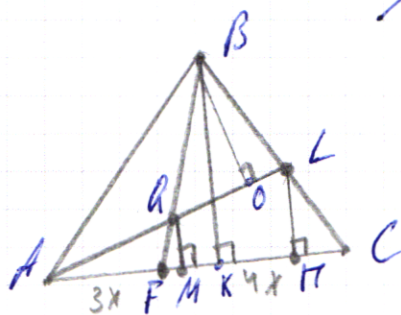
$$6r = 10$$

$$r = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \alpha$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot r$$

$$AB = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin \alpha}{r}$$



$\triangle ARM \sim \triangle ALN$ по двум углам
 $(\angle M = \angle N = 90^\circ)$ $\angle A$ - общ.

$RM = 9$ - по усл.

$$\frac{RL \cdot BO}{AL \cdot BK} = \frac{1}{16} \quad \text{т.к.} \quad \frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16} \text{ - по усл.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S = \sin \alpha \cdot OA \cdot BO \cdot \frac{1}{2}$$

$$S = AB \cdot \frac{1}{2} r$$

~~$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \alpha$$~~

$$OA^2 = r^2 + AY^2 \quad AY = \sqrt{OA^2 - r^2}$$

$$OB^2 = r^2 + YB^2 \quad YB = \sqrt{OB^2 - r^2}$$

$$(\sqrt{OA^2 - r^2} + \sqrt{OB^2 - r^2})^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \alpha$$

$$OA^2 - r^2 + \sqrt{(OA^2 - r^2)(OB^2 - r^2)} + OB^2 - r^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \alpha$$

$$-2r^2 + \sqrt{OA \cdot OB - AO^2 \cdot r^2 - OB^2 \cdot r^2 + r^4} = -2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \alpha$$

$$BO \cdot (BO - r) = \frac{r^2}{2} \quad -1 + 0$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x = \frac{1}{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \frac{1}{2} (2 \cos^2 2x - 1)$$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 4x = \frac{\cos^2 2x - 1}{2} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

№ 14
 № стороны разности 35 40 105 140 145
 1 2 3 4 5 ~~6~~ (15)

41 42 43 44 45 $5 \cdot 40 + 15 = 215$

81 82 83 84 85 $80 \cdot 5 + 15 = 405$

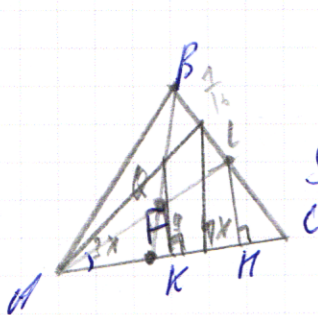
121 122 123 124 125 $120 \cdot 5 + 15 = 615$

161 162 163 164 165 $160 \cdot 5 + 15 = 815$
 $500 + 300 + 15 = 815$

$230 + 1030 + 815 = 1260 + 815 = 2075$

$1030 + 1030 + 15$

$2060 + 15 = 2075$



№ 6
 $\frac{S_{\triangle BKL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{1}{16}$

$\triangle BKL \sim \triangle BAC$ по 2 уг.

§ ~~14.11~~ $S_{\triangle BKL} =$

~~14.11~~

$\cos d = \frac{r}{OB}$

$\cos d = \frac{r}{r}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3x^2 - t^2 + 6t - 4x$$

Пусть $\sqrt{x+3} = t, t \geq 0$

~~$(x+1)$~~

$$(\sqrt{x+3} - (x+3) + 2)(2x+6-1-\sqrt{x+3}) = (t-t^2+2)(2t^2-t-1) = 0$$

$$t - t^2 + 2 = 0$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t_1 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$t_1 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{---}$$

$$t_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{---}$$

ОДЗ: $x+5 > 0$

$$\sqrt{x+3} = 2$$

$$\sqrt{x+3} = 1$$

$$x = 1$$

$$x = -2$$

$x > -5$ выполн.

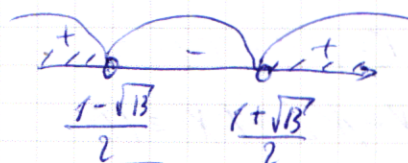
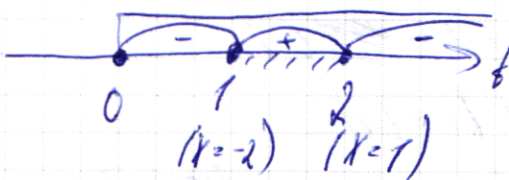
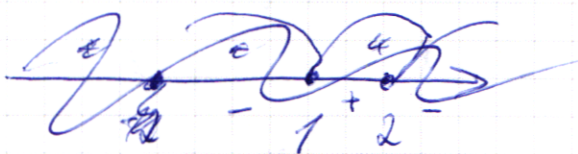
$$\sqrt{x+3} - x > 0$$

$$x+3 - x^2 > 0$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



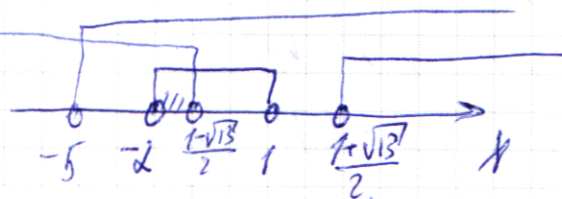
$$\sqrt{x+3} - x > 1$$

$$\sqrt{x+3} \leq 1+x$$

$$x+3 \leq x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$



$$x \in (-2, \frac{1-\sqrt{13}}{2})$$

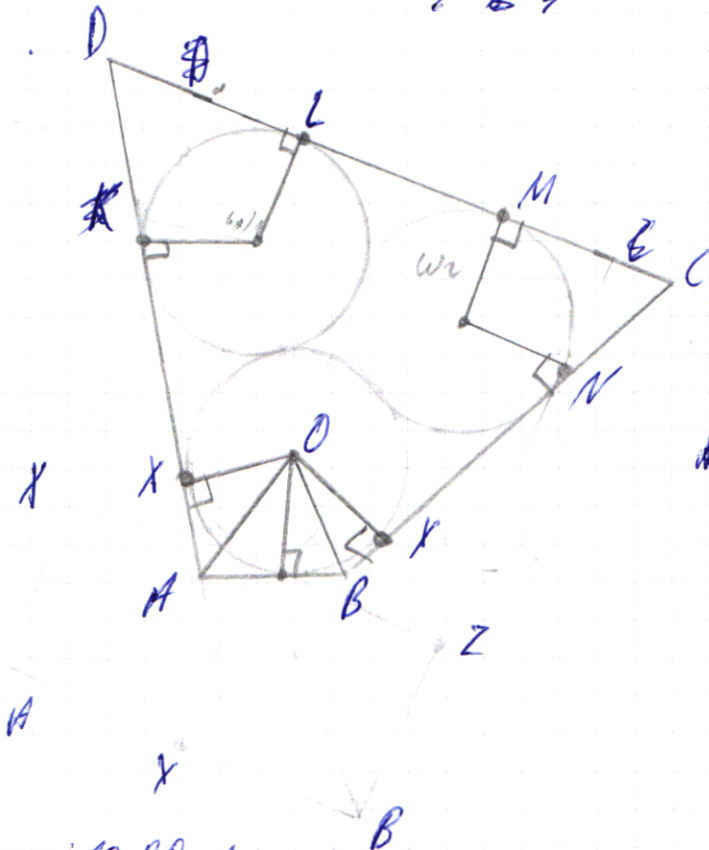
$$x = \frac{-1+3}{2} = -2$$

$$x = \frac{-1+3}{2} = 1$$

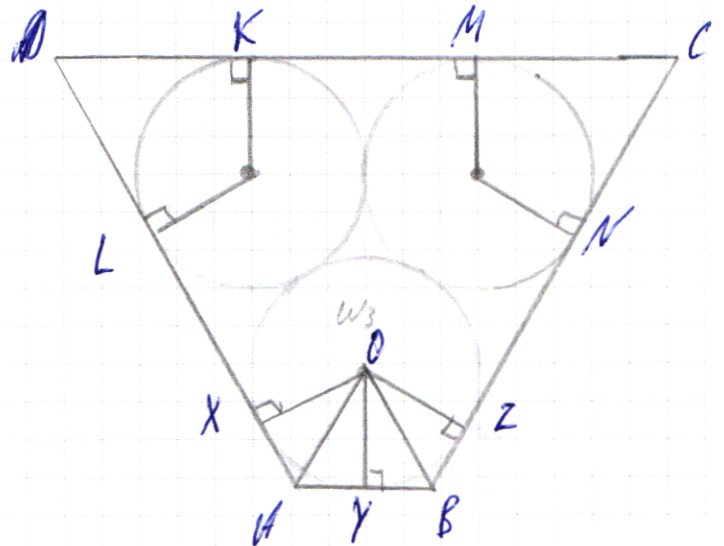
~~.....~~

$$x \neq 1 \quad x \neq -2$$

№ 4



$$AD + BC - AB - CD = 10$$



$$AO \cdot BO = 42$$

$$AD + BC - AB - CD =$$

$$= DL + LX + XA + CN + NZ + ZB - AY - YB -$$

$$- DK - KM - MC =$$

$$LX + NZ + LX = 10$$

$$LX = NZ = LX = 2r$$

$$6r = 10$$

$$r = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}$$

$$CM = \cancel{CN}$$

$$KD = LD$$

$$AY = AX \quad BY = \cancel{BZ}$$

$$AB = AY + YB$$

$$AD = DL + LX + XA$$

$$BC = CN + NZ + ZB$$

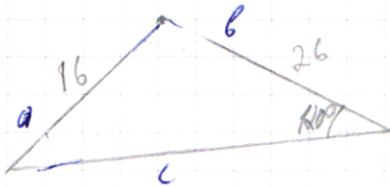
$$DC = DK + KM + MC$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 52 \\ 104 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$120 + 169 = 289$$

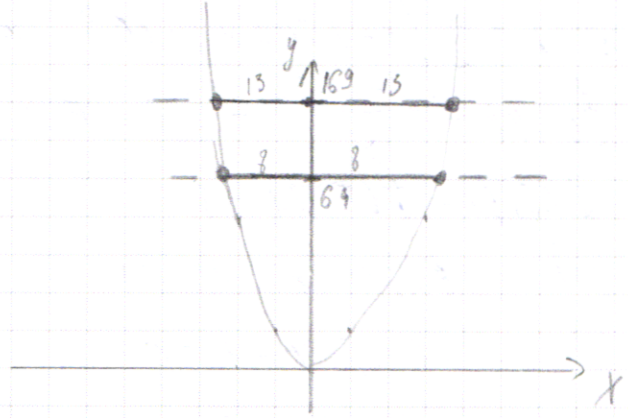
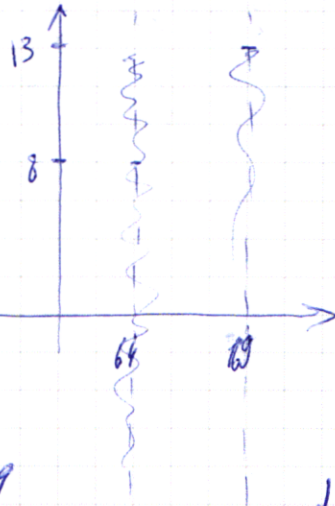


$$\begin{aligned} 1) \quad & \sqrt{16^2 + 26^2 + 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos \alpha} = \\ & = \sqrt{2^2 (8^2 + 13^2 + 8)} = \\ & = 2 \sqrt{64 + 169} = \\ & = 2 \sqrt{233} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \sqrt{4 \cdot 16 - 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 13^2} = \\ & = 2 \sqrt{16 - 64 + 169} = \\ & = 2 \sqrt{121} = 2 \cdot 11 = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & -13 + \sqrt{13^2 - 26^2 + 16^2} = \\ & = -13 + \sqrt{13^2 - 2 \cdot 13^2 + 16^2} = \end{aligned}$$

2



$$1) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$c = \sqrt{16^2 + 26^2 + 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{16^2 + 26^2 + 2 \cdot 16 \cdot 26}$$

$$2) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$

$$c^2 + 16c + 16^2 - 26^2 = 0$$

$$D_1 = 64 - (16^2 - 26^2) = 64 - 16^2 + 26^2$$

$$c_2 = \frac{-16 \pm \sqrt{64 - 16^2 + 26^2}}{2} \text{ - отриц. не подходит}$$

$$c = \frac{16 + \sqrt{64 - 16^2 + 26^2}}{2} = 8$$

$$3) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$c^2 + 26c + 26^2 - 16^2 = 0$$

$$D_1 = 169 - 26^2 + 16^2$$

$$c = -13 \pm \sqrt{169 - 26^2 + 16^2} \text{ - отриц. не подходит}$$

$$c = -13 + \sqrt{169 - 26^2 + 16^2}$$

№2

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \sin 8x (\cos(5x-9x) - \cos(5x+9x)) - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} \cos^2 2x + \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2 2x) - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3,5 = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x - 3,5 =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x - 4$$

$$g'(x) = -2 \sin 4x + \sin 2x$$

$$\sin 2x - 2 \sin 4x = 0$$

$$\sin 2x - 4 \sin 2x \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x (1 - 4 \cos 2x) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad \cos 2x = \frac{1}{4}$$

№3

13 пошуций. 6 метрков = x

- 1) у дубинки 13 пошуций
- 2) у метрков ~~17~~ пошуций
- 3) у курки 12 пошуций
- 4) у x 13 пошуций

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	3	3	2	1	2							
(-3)	(-1)	(-1)	(-2)		(-2)							
			(-4)		(-4)							

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	3	3										

$1 \cdot 3^{12} - 1$ (когда нет курки)

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) - 1 \geq 0$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x) = (\sqrt{x+3}-x-1) (x+5 - \sqrt{x+3}+x)$$

Пусть $\sqrt{x+3} = t$

$$= (t-x-1)(x+5-t+x) = (t-x-1)(2x+5-t) = 2tx+5t-t^2-5x-2x^2+x-$$

$$-2x-5+t = 2tx+5t-t^2-3x-2x^2+x+t$$