МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-021

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

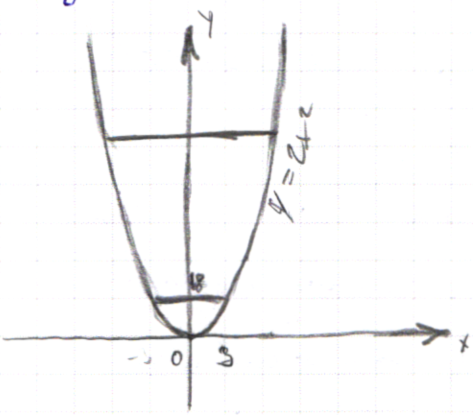
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

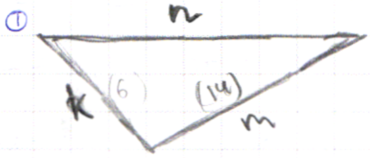
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

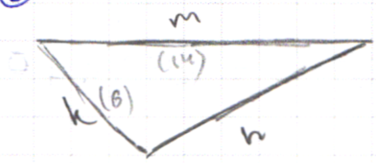


1. В задаче возможны два случая получения Δ-ка с углом 120°

①



②



где $k = 2x_1$; $2x_1^2 = 18$, откуда $x_1 = 3$

$m = 2x_2$; $2x_2^2 = 98$, откуда $x_2 = 7$

$k = 6$; $m = 14$

2. Далее применим теорему косинусов $(c^2 = a^2 + b^2 - 2a\cdot b\cdot\cos(\widehat{a,b}))$ для получения совокупности уравнений

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} 14^2 = 6^2 + n^2 + 6n \\ n^2 = 6^2 + 14^2 + 6\cdot 14 \end{array}\right.$$

решая эти уравнения получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n^2 + 6n - 160 = 0 \\ n > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} n^2 = 316 \\ n > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$n = 10$

$n = 2\sqrt{79}$

3. Искомая величина $a = y$, где $y = 2x^2$, где $x = \frac{n}{2}$

$y_1 = 158$ $y_2 = 50$

Ответ: при $a = 158$ и $a = 50$

Задание №3

В числе ровно 7 цифр "8" идущих подряд, поэтому мы можем заменить эту последовательность любой переменной (например a), также в числе обязательно присутствуют хотя бы один "0" и одна "7", заменим их на b и c

В нашем уже одиннадцатизначном числе вариантов расстановки a, b и c: $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$.

Далее в числе не хватает восьми цифр, ими могут быть только нули и семёрки, поэтому вариантов числа становится в 2^8 раз больше, поэтому всего вариантов $990 \cdot 2^8 = 253440$

Задание №7

Условие того, что ~~мы~~ никакие два числа при вычитании одного из другого не делятся на 45, говорит о том, что мы не можем брать числа с равным остатком от деления на 45.

Следовательно стоит брать числа с наименьшими остатками при этом не важно из какой группы число с каким остатком мы берём.

Запишем сумму чисел в каждой группе следующим образом:

① $S_1 = 6 \cdot 0 \cdot 45 + (1+2+3+4+5+6)$

② $S_2 = 6 \cdot 1 \cdot 45 + (7+8+9+10+11+12)$

③ $S_3 = 6 \cdot 2 \cdot 45 + (13+14+15+16+17+18)$

④ $S_4 = 6 \cdot 3 \cdot 45 + (19+20+21+22+23+24)$

⑤ $S_5 = 6 \cdot 4 \cdot 45 + (25+26+27+28+29+30$

$S_{общ} = 6 \cdot 10 \cdot 45 + 15 \cdot 31 = 3165$

Ответ: наименьшее значение суммы равно 3165

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-021
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание N 4

Дано:

четырёхугольник ABCD

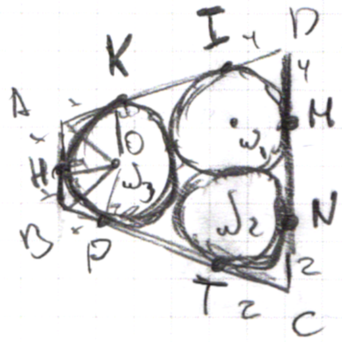
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ попарно касаются

$r(\omega_1) = r(\omega_2) = r(\omega_3)$

ω_1 касается AD и DC

ω_2 касается DC и CB

ω_3 касается CB, BA, AD



ⓐ $AD + BC - AB - CD = 12$

ⓑ O - центр ω_3

ⓑ $AO \cdot OB = 58$

Найти:

ⓐ r - ?

ⓑ $\angle AOB$ - ?

ⓑ AB - ?

Решение:

По св-ву касающихся окружностей: $KI = MN = PT = 2r$

По св-ву касательных: $AH = AK = BH = BP = x$

$DI = DM = y$

$CN = CT = z$

ⓐ $x + 2r + y + x + 2r + z - 2x - z - 2r - y = 12$

$2r = 12 \quad r = 6$

ⓑ $\left.\begin{array}{l} OH \perp AB \\ AH = HB \\ OH\text{-общ} \end{array}\right| \Rightarrow AO = OB$, $AO \cdot OB = 58 \Rightarrow AO = \sqrt{58}$

по теореме пифагора

$AH = \sqrt{\sqrt{58}^2 - 6^2} = \sqrt{23}$

$AB = 2AH = 2\sqrt{23}$

5 A1

Задание №5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} (x+4)>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\sqrt{x+7}-x \leq x+4$

$\sqrt{x+7} \leq 2x+4$

возведём в квадрат

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$

С учётом ОДЗ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

Ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-021
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

0 7 8 8 8 8 8 8 8 x x x x x x x x

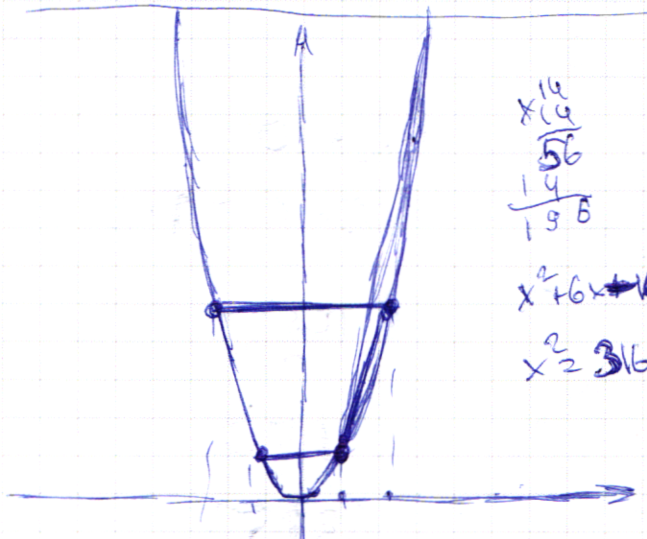
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2

$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2^8$

$256 \cdot 990 = 253440$

$2^8 = 256$



Задача №1

$14 \cdot 14 = 196$

$196 + 36 = 232$

$14 \cdot 6 = 84$

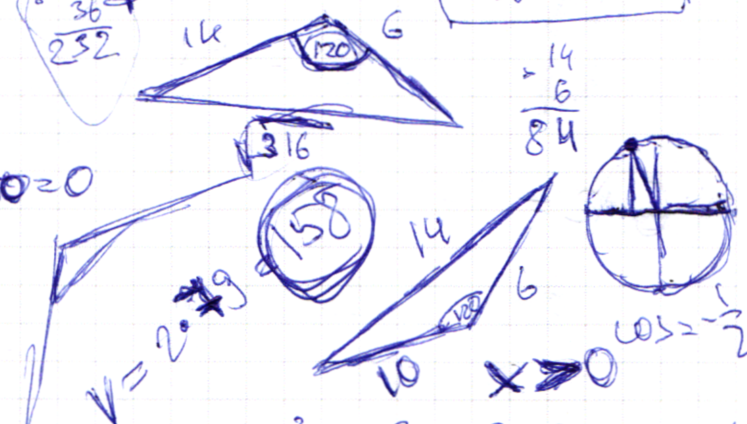
$x^2 + 6x - 160 = 0$

$x^2 = 316$

$\sqrt{316}$

158

$y = 2\sqrt{79}$



$x > 0$

$\cos = -\frac{1}{2}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac \cdot \cos x$

10

$16 \cdot 10$

$\left[\begin{array}{l} x^2 + 6x = 14^2 - 6^2 \\ x^2 = 6^2 + 14^2 + 6 \cdot 14 \end{array}\right.$

$14^2 = 6^2 + x^2 + 6x$

$x^2 = 6^2 + 14^2 + 6 \cdot 14$

636 | 4 → 159

$36 + 600 = 636$

$x = \frac{\sqrt{636}}{2}$

$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{636}}{4}\right)^2$

316 | 2
158 | 2
79 |

$\frac{2\sqrt{79}}{2}$

$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{79}}{2}\right)^2$

~~$2 \cdot 158$~~

$a = 158$

$a = 50$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~1; 47; 91; 157~~

1 2 3 4 5 6 7 8

$\frac{4\frac{2}{3}}{7} = \frac{14}{7\cdot 3} = \frac{2}{3}$

$6 \cdot 0 \cdot 45 + \text{ост}(1; 2; 3; 4; 5; 6)$

$6 \cdot 1 \cdot 45 + \text{ост}(7; 8; 9; 10; 11; 12)$

$6 \cdot 2 \cdot 45 + \text{ост}(13; 14; 15; 16; 17; 18)$

$6 \cdot 3 \cdot 45 + \text{ост}(18; 19; 20; 21; 22; 23)$

$6 \cdot 4 \cdot 45 + \text{ост}(29; 28; 27; 26; 25; 24)$

30 30 30 30 30 30

30 30 30 30 30 30

31 31 31

$30 \cdot 12 + 31 \cdot 3 + 90 \cdot (6+12+18+24)$

30

102 · 30

105 · 30 + 1 · 3

6 + 6 + 3 = 15 · 31

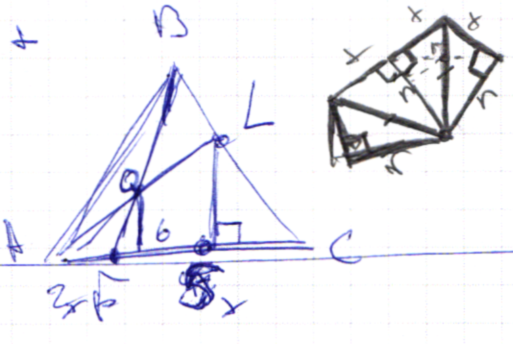
$\frac{105}{3}$

3150

3153

6 + 12 + 18 + 24

60 · 45 +



180 · 6

180 · 6 + 135 · 6 + 90 · 6 + 45 · 6 + 20 + ~~120 · 6~~

660 · 6

0 · 6 + 45 · 6 +

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

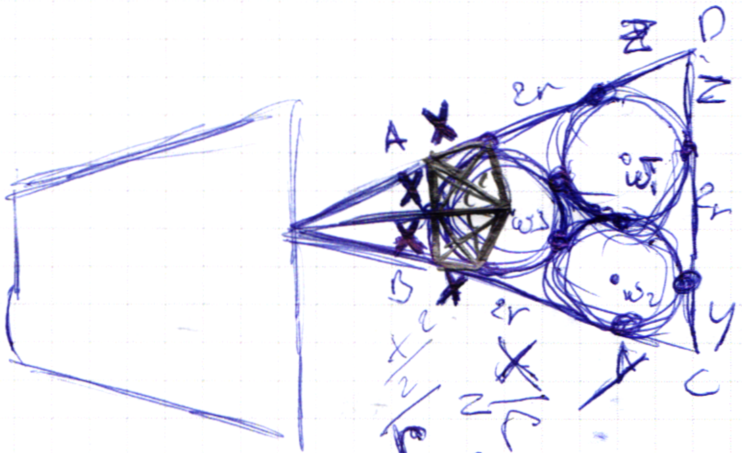
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-021

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x+7 = x^2+2x+1$

$x^2+x-6=0$

$x_1=2$

$x_2=-3$

$xr = \frac{x^2}{2}r$

$AD+BC-AB-CD=12$

$2x^2-x=0$

$x(2x-1)=0$

$x=0 \quad x=\frac{1}{2}$

$x+2r+z+x+2r+y-2x-y-2r-z=12$

$\frac{16}{9}$ 144

$AH=HB$

OH - общ $\Rightarrow AO=OB$

$a^c > a^x \quad \log_a b > x$

$b = a^x$

$\log_a b = c$

$a^c = b$

$\frac{-144}{8}$ $\frac{-15-9}{8}$ -3

$6 \quad \sqrt{58-36}=\sqrt{23}$

$\frac{-15+9}{8}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ: $x\in(-4;-3)\cup(-3;+\infty)$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\sqrt{x+7}-x \leq x+4$

$\sqrt{x+7}-x>0$

$1+28=29$

$x\leq\sqrt{x+7}$

$\sqrt{x+7}\leq 2x+4$

$x^2-x-7<0$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$4x^2+16x+16 \geq x+7$

$\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$4x^2+15x+9\geq 0$

$-\sqrt{29}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin 3x \cdot \sin(3x + 4x)$

$\sin 3x \cdot (\sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 3x \cdot \sin 4x)$

$\sin 3x \cdot \sin 7x + \cos 5x \cdot \cos 5x - \sin^2 x + 4$

$\cos 10x - \sin^2 x + 4$

$(\sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos x)(\sin 2x \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos 2x) +$

$+ \cos \cancel{5x \cdot \cos 5x - \sin x \cdot \sin x + 4}$

$\cancel{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА