МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 9-7

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

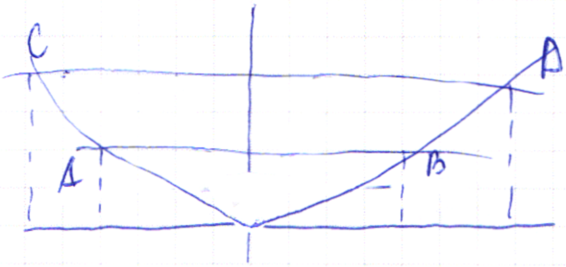
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.



Найдём отрезки заключённые в порабале

$y = 2x^2$

1) $198 = 2x^2$ знак „+", так как нас интересует величина по модулю

$x = 7$, тогда отрезок равен $7 \cdot 2 = 14$

$y = 2x^2$

2) $18 = 2x^2$ 3) $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$; отрезок $\sqrt{\frac{a}{2}} \cdot 2 = \sqrt{2a}$

$x = 3$, аналогично первому; отрезок равен $3 \cdot 2 = 6$

Составим теорему косинусов, зная, что $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ а так же, что сумма двух сторон Δ больше третьей и найдём a. $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha$

а) $14^2 = 6^2 + 2a + 6\sqrt{2a}$

б) $6^2 = 14^2 + 2a + 14\sqrt{2a}$

в) $2a = 6^2 + 14^2 + 6 \cdot 14$

а) $196 - 36 = 2a + 6\sqrt{2a}$ $\sqrt{2a} = t$

$160 = t^2 + 6t$

$t_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{160}}{2}$

$t_1 \approx 2{,}25$, при нахождении „a", ч на „a" будет маленькое и $a + 6 < 14$, т.е. это не подходит.

в) $2a = 36 + 196 + 84 \quad a = 316.$

$\sqrt{2a} < 14 + 6$; $6 < 14 + \sqrt{2 \cdot 316}$; $14 < 6 + \sqrt{2 \cdot 316}$

б) $36 = 196 + 2a + 14\sqrt{2a} \quad \sqrt{2a} = t$

$t^2 + 14t + 160 = 0 \quad t \in \varnothing$

Ответ: $a = 316$.

Задача 7

Для того чтоб сумма была min Пиноккио нужно выбирать из промежутков по возможности наименьшие числа идущие последовательно

Итак из промежутка $[1; 45]$ Пиноккио берёт 1, 2, 3, 4, 5, 6; для того, чтоб попарно разность двух чисел не делились, ~~раз~~ на 45, надо чтоб разница между наибольшим числом предыдущего промежутка и наименьшим последующего была 46, тогда цифры из второго промежутка – 52, 53, 54, 55, 56, 57

из третьего – 103, 104, 105, 106, 107, 108

из четвёртого – 154, 155, 156, 157, 158, 159

из пятого – 205, 206, 207, 208, 209, 210

~~из~~ сумма: $(1+2+3+4+5+6) + (52+53+54+55+56+57) + (103+104+105+106+107+108) + (154, 155, 156, 157, 158, 159) + (205+206+207+208+209+210) = 21 + 327 + 633 + 939 + 1245 = 1245 + 960 + 960 = 3165$

Ответ: 3165

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ ОДЗ: $x \geq -4$, $x \geq -7$

$$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1 \\ \log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \end{cases} \\ ② \begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1 \\ \log_{\sqrt{x+7}}(x+4) \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$① \begin{cases} \sqrt{x+7} > 1+x \\ \log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0 \end{cases}$$

УРП: $x+1 \geq 0$, $x \geq -1$

$x+7 > 1+2x+x^2$

$x^2+x-6<0$ $x_1 = 2$

$D = 25$ $x_2 = -3$

Из УРП отбор $x \in (-1;2)$.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0$

$\frac{x+4-\sqrt{x+7}+x}{\sqrt{x+7}-x} \geq 0$

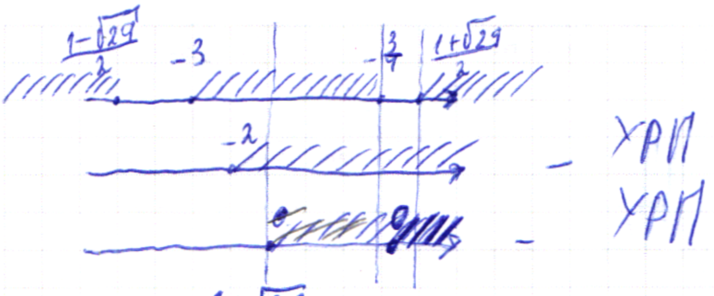
$(2x+4-\sqrt{x+7})(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$2x+4=\sqrt{x+7}$ УРП: $x>-2$ $\sqrt{x+7}-x=0$ УРП: $x>0$

$4x^2+15x+9=0$ $x^2-x-7=0$

$x_1 = -\frac{3}{4}$ $x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = -3$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$



$x \in \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right) \cup \{0\}$

Ответ: $\{0\} \cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$

Задача 2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = 3\cos 3x \cdot \sin 7x + 7\cos 7x \cdot \sin 3x - 2\sin x \cos x + 2\cos 5x \cdot \sin 5x \cdot 5$

$g'(x) = 3\cos 3x \cdot \sin 7x + 7\cos 7x \cdot \sin 3x - \sin 2x + 5\sin 10x = 0$

$x_1 = 0$

$g(0) = 5$ — точка экстремума

Задача 3

Распишем возможные места восьми

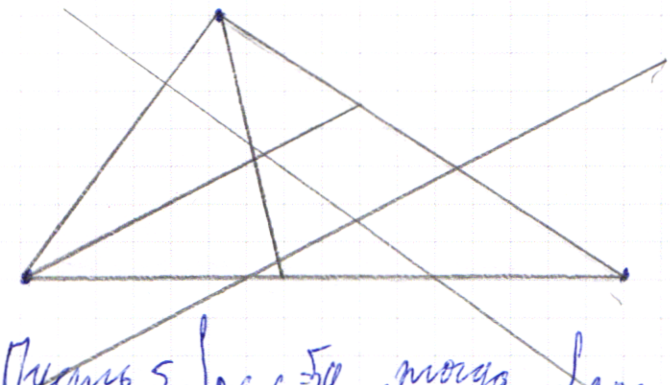
8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8

в этих случаях на первом месте должна стоять „9", т.к числа с „0" не начинаются, тогда кол-во способов разместить „0" и „9" в пустые клетки — 2^{10}, т.к. таких случаев у нас 10, то общее кол-во ~~в этом~~ способов размещения в этих рядах = ~~10~~

$= 10 \cdot 9 \cdot 2^8$, а в первом ряду $2^8 \cdot 9 \cdot 8$ $\Rightarrow$ общее кол-во способов $2^8 \cdot 9(10+8) = 2^8 \cdot 9 \cdot 18$ Ответ: $2^8 \cdot 9 \cdot 18$

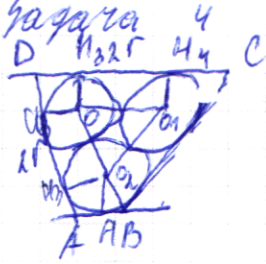
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть 5 $S_{BGC} = 5q$, тогда S_{ABC}

Задача 4



Решение:

$H_4C = CH_5$
$DH_3 = DH$
$AH_2 = AM$
$MB = BH_6$ } окр. + две касательные из одной точки

Так как $r_1 = r_2 = r_3$ ABCD - равнобок. трап.
Если соед центры окр. получим $O_1O_2O_3$ - равност.

Имеем

$AD = DH_1 + H_1H_2 + H_2A$

$AD = BC$

$DC = DH_1 + DH_1 + H_3H_4$

$AB = AH_2 + AH_2$

$O_1H_3 \perp DC$; $O_2H_4 = O_1H_3 \Rightarrow H_3H_4 = O_1O_2 = 2r$

Аналогично для H_1H_2

1) $AD + BC - AB - CD = 12$

$4r - 2r = 12$

$r = 6$

2) $\angle AOB$ вертик для $\angle O_1O_2O_3 = 60^\circ$

3) $S_{AOB} = OM \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle \cdot AO \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 58$

$OM = r$ $\quad 6 \cdot AB = \frac{\sqrt{3} \cdot 58}{2}$

$6AB = \frac{\sqrt{3} \cdot 29}{\cancel{2}}$

$AB = \frac{29\sqrt{3}}{6}$

Ответ: 1) 6 см
2) 60°
3) $\frac{29\sqrt{3}}{6}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-7

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8 8 8 8 8 8 8 . . . .
9 8 8 8 8 8 8 8 . . . . . . 1^{8}
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9 8 8 8 8 8 8 8
9

$\log_{\sqrt{x+7}} -x(x+4) \geq 1$

11

2^{10}

C_{10}

(0) $C^{1}_{17-7} = 10$

(7) $C^{1}_{17-7-1} = 9$

$10 \cdot 2^{7} \cdot 9$

$10 \cdot 9 \cdot 2^{17-7-1+1} = 10 \cdot 9 \cdot 2^{8}$

C^{1}_{9} 11 9

$$\begin{matrix}
9&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&9&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&9&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&9&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&9&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&9&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&9&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&9&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&9&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&9
\end{matrix}$$

$2^{9} \cdot 9 + 2^{10}$

$9 \cdot 2^{8} \cdot 11$

$2^{9}(9+2)$

$2^{9} \cdot 11 \cdot C$

$2^{8} \cdot 9 \cdot 8 + 2^{8} \cdot 10 \cdot 9$

$9 \cdot 8 \cdot 2^{7}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2 (Нумеровать только чистовики)

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ ОДЗ: $x \geq -4$

$x+7 \geq 0$ $x \geq -7$

$$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1 \\ \log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \end{cases} \\ ② \begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1 \\ \log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$1 \begin{cases} \sqrt{x+7} > 1+x \\ \log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\dfrac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0 \end{cases}$$

УРП: $x+1 > 0$

$x > -1$

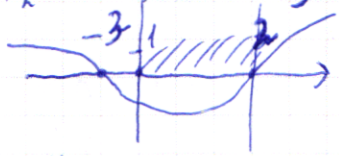
$x+7 > 1+2x+x^2$

$x^2+x-6 < 0$

$D = 1+24 = 25$

$x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$

$x_2 = \dfrac{1-5}{2} = -3$



Из УРП $x \in (-1; 2)$.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\dfrac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0$

$\dfrac{x+4-\sqrt{x+7}+x}{\sqrt{x+7}-x} \geq 0$

$(2x+4-\sqrt{x+7})(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$2x+4-\sqrt{x+7} = 0$

$2x+4 = \sqrt{x+7}$ УРП: $2x+4 > 0$

$x > -2$

$4x^2+15x+9 = 0$

$x_1 = \dfrac{-15+9}{8} = -\dfrac{3}{4}$

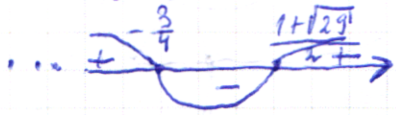
$x_2 = \dfrac{-15-9}{8} = -3$

$\sqrt{x+7}-x = 0$ УРП $x > 0$

$x+7 = x^2$

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$



нас интересует $x \in (-1; 3)$

Ответ: $x\,(-1; \frac{3}{4})$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-7

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. 0, 7, 8

8 - 7 цифр

5

$\times\begin{array}{r}16\\9\\\hline 144\end{array}$

$17-8=9.$

$-\begin{array}{r}225\\144\\\hline 81\end{array}$

0, 7

121

$\sqrt{x+7}-x$

$x+7-2\sqrt{x+7}x+x^2$

$(2x+7)^2=4(x+7)$

$4x^2+28x+49=4x+28$

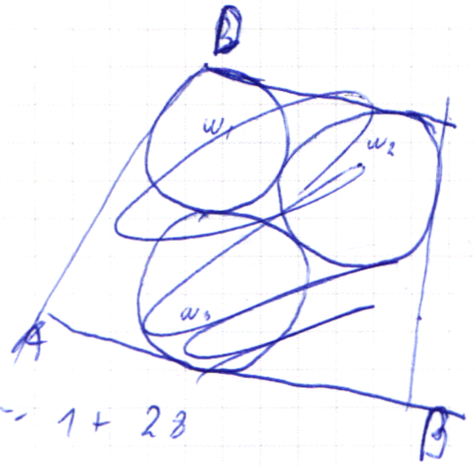
$4x^2+24x+21$

$\log_{\sqrt{x+4}-x}(x+4)\geq 1 \quad x\geq -4$

$x+4\geq 0$

$x\geq -7$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}\frac{(x+4)}{\sqrt{x+7}-x}\geq 0$



$\sqrt{x+7}-x>1$

$\sqrt{x+7}-x-1>0$

$D=1+28$

43936

$\sqrt{x+7}$ ~~...~~

$-2,4$

$\begin{array}{r|l}436 & 6\\-42 & 7\\\hline 16 &\end{array}$

$\begin{array}{r|l}436 & 4\\-4 & 109\\\hline 36 &\end{array}$

109

$\frac{x+4}{\sqrt{x+4}-x}\geq 1$

$\frac{x+4-\sqrt{x+7}+x}{\sqrt{x+7}-x}\geq 0$

$\sqrt{x+7}-\cancel{x}=0$

$\sqrt{x+7}=x$

$x+7=x^2$

$x^2-x-7=0$

$x_1=\frac{1+\sqrt{28}}{2}$

$x_2=\frac{1-\sqrt{28}}{2}=\frac{1}{2}-\sqrt{7}$

$(\sqrt{x+7}-x)(x+4-\sqrt{x+7}+x)\geq 0$

$2x+4=\sqrt{x+7}$

$4x^2+16x+16=x+7$

$4x^2+15x+9=0$

$\frac{1-2\sqrt{7}}{2}=\boxed{\frac{1}{2}+\sqrt{7}}$

$x_1=\frac{-15+9}{8}=-\frac{3}{4}$

$x_2=\frac{-15-9}{8}=-3$

$-3 \quad \frac{1}{2}-\sqrt{7} \quad -\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2}+\sqrt{4}$

+ − + − +

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{x+7} - x > 1$

$x+7 - 2\sqrt{x+7}\,x + x^2 - 1 > 0$

$x^2 - 2\sqrt{x+7}\,x + 6 > 0$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

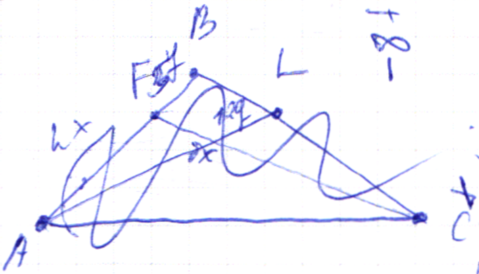
$2^{10} - 2^9$

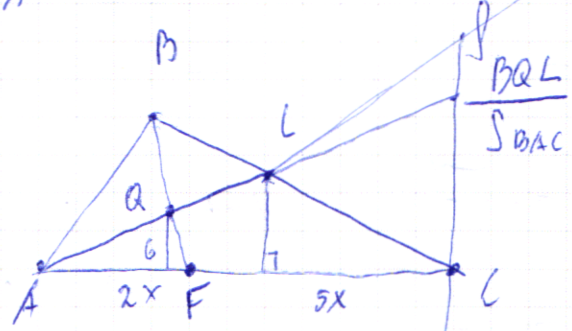
$1024 - 512 = 512$

1000000000

88888888

$D = 1$





$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-7

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $-\frac{1}{2}$

$14 \times 14 = 196$

$98 : 2 = 49$

$y = 2x^2$

$98 = 2x^2$

$x^2 = 49$

$x = \pm 7$

$y = 2x^2$

$18 = 2x^2$

$x = \pm 3$

$y = a$

$2x^2 = a$

$x = \sqrt{\frac{a}{2}}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120$

$196 - 36 = 160$

14 6 $2\sqrt{\frac{a}{2}}$

$\sqrt{2a}$

1) $14^2 = 6^2 + 2a - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2a}\cos 120^\circ$ $a \geq 0$

$14^2 = 36 + 2a + 6 \cdot \sqrt{2a}$

$\sqrt{2a} = t$

$100 = 2a + 6\sqrt{2a}$

$100 = t^2 + 6t$

$t^2 + 6t - 100 =$

$36 + 400$

436

$t_1 = \frac{-6+\sqrt{436}}{2}$

$t_2 = \frac{-6-\sqrt{436}}{2}$

$\sqrt{2a} = \frac{-6+\sqrt{436}}{2}$

$2a = \frac{\sqrt{436}-6}{2} = \sqrt{109} - 3$

$\times 14^2$ 14

$\frac{3}{4}; 2$ 2;

$\sqrt{8} - 1 \leq 5$

$\sqrt{x+7} \geq \cancel{x}$

① $14^2 = 6^2 + 2a + 6\sqrt{2a}$

② $6^2 = 14^2 + 2a + 14\sqrt{2a}$

③ $2a = 6^2 + 14^2 + 6 \cdot 14$

$2a = 36 + 196 +$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики) д) $196 - 36 = 2a + 6\sqrt{2a}$ $\sqrt{2a} = t$

$160 = t^2 + 6t$

$t^2 + 6t - 160 = 0$ $\sqrt{632}$

$t_1 = \frac{-6 + \sqrt{160}}{2}$ 1,6

$t_2 =$

144
169

316×2

$12,5 = 6,5$ 13

7   4,5

$\frac{6,5}{2}$

$58 : 4 = 14$, $58 - 4 = 18$

$196 + 84 = 280$ $280 : 2 = 140$

$56 + 46 = 102$

$196 - 36 = 160$

$14 \times 6 = 84$

$150 \times 6 = 900$

$67 + 46 = 52$

$57 + 46$

$84 + 36 = 120$

$120 + 196 = 316$ $316 : 2$

$\sqrt{316}$

$\sqrt{280}$ $\sqrt{870}$

$107 \times 46 = 753$

$157 + 46 = 203$

$\frac{5}{2}$

$300 + 27$

$159 + 46 = 5$ $600 +$

$10 + 9 +$ $28 + 5 = 33$

46

$960 \times 2 = 1920$

$1920 + 1245 = 3165$

21

$58 : 2 = 29$, $58 - 4 = 18$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)