

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

11-013

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2$  пересекает прямые  $y = 98$ ,  $y = 18$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ .
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 12$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 58$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $5 : 12$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 45]$ ,  $[46; 90]$ ,  $[91; 135]$ ,  $[136; 180]$ ,  $[181; 225]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

задача № 5

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

О.Д.З

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ \sqrt{x+7}-x > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$$

$$x+4 > 0$$

$$x > -4$$

$$x \in (-4; +\infty)$$

$$\sqrt{x+7}-x \neq 1$$

$$x^2 - x - 6 \neq 0$$

$$(x-2)(x+3) \neq 0$$

$$x \neq 2 \quad x \neq -3$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$\sqrt{x+7}-x > 0$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$\left(x - \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) < 0$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

$$x \in (-4; +\infty) \cap \left[(-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; +\infty)\right] \cap \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

О.Д.З

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

1 случай

когда  $\sqrt{x+7}-x > 1$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$$

$$4x^2 + 16x + 16 \geq x+7$$

$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)(x+3) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$$

$$\sqrt{x+7}-x > 1$$

$$(x+3)(x-2) < 0$$

$$x \in (-3; 2)$$

$$x \in (-3; 2)$$

$$x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right) \rightarrow \text{это когда}$$

$$\sqrt{x+7}-x > 1$$

$$\sqrt{x+7}-x > 1$$

2 случай

когда

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x < 1 \\ \sqrt{x+7}-x > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+7}-x < 1$$

$$(x+3)(x-2) > 0$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$$

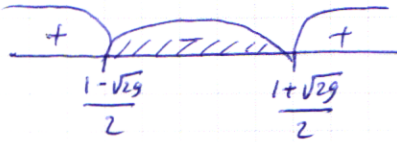
$$\sqrt{x+7} - x > 0$$

$$\sqrt{x+7} > x$$

$$x+7 > x^2$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$\left(x - \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) < 0$$



$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

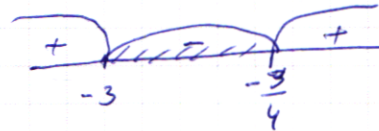
$$x+4 \leq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$$

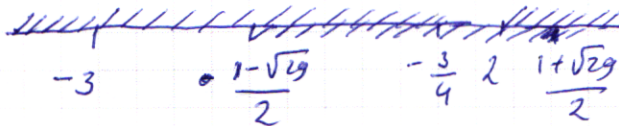
$$4x^2 + 16x + 16 \leq x+7$$

$$4x^2 + 15x + 9 \leq 0$$

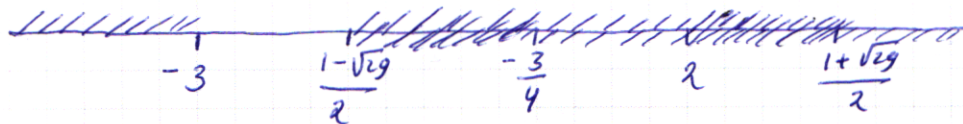
$$\left(x + \frac{3}{4}\right) (x+3) \leq 0$$



$$x \in \left[-3; -\frac{3}{4}\right]$$



$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; -\frac{3}{4}\right] \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$



$$\text{ОТВЕТ: } x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; -\frac{3}{4}\right] \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

Задача №7. Так как на условии задачи сказано

это, разность каких-либо двух выбранных чисел не

делится на 45, то ~~тыкокино~~ из пер 4

эти числа должно бы минимальными. Потому что

тыкокино надо найти ~~сумму~~ из наименьшую

сумму из из них. Тыкокино из первой про-

между ними может быть любые все 6 чисел

но так как надо найти минимально

сумму он должен выбрать минимальные числа

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

по этому из первой промежутке он должен  
брать ; 1, 2, 3, 4, 5, 6 и из второго про-  
межутка он должен брать 52, 53, 54, 55, 56, 57,  
так как ~~разность их разность~~ эти числа  
являются ~~линейными~~ из второй промежутка  
которые их разность с первой ~~разности~~  
равна на 45. А из ~~этого~~ первого  
промежутка он должен выбрать 103, 104,  
105, 106, 107, 108, ~~по~~ следовательно этого хотим  
чтобы найти наименьшую сумму 13 чисел

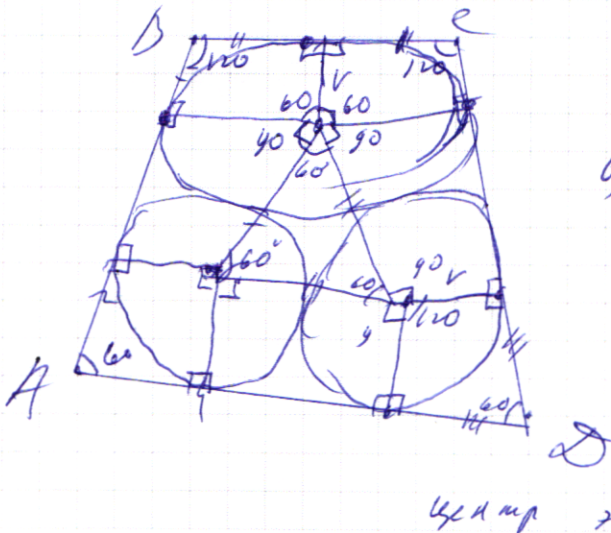
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 = 327$$

$$21 + 327 + 103 = 451$$

Ответ ; Сумма тринадцати выбранных  
чисел точно равно 451

4)



на условие задачи очевидно  
это  $V_1 = V_2 = V_3$

а) Како найти  $V$

если  $AD + BC - AB - CD = 12$ .

так как радиусе все-  
гда перпендикулярно к

тогда ~~какими~~ ~~то~~

мы докажем что

центр этих окружностей об

разуголь равно ступенчатую триугольник, ~~найти~~  
найти по заданной для этой четырехугольника

$\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$  на доказали что  
 $\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$  это из четырехугольнике  
ABCD является равно-  
бедренным трапецией. Высота этой трапеции.  
и на основании  $CH$  боковой стороне  $2V$ .  
и большая оскобаки равняется  $4V$   
маленькая оскобаки равна  $2V$ .

$$4V + 2V - 4V = 12$$

$$V = 6$$

Отсюда радиус этих  
окружностей равно 6.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7)  $[1; 45] \cup [46; 90] [91; 115], [136; 180] [181; 225]$

так как в условии сказано что требуется написать сумму  
выбранных чисел не делится на 45. то мы можем  
из второй проследить выбрать любое в числе, еще  
в первом сказано что сумма кор. поделится <sup>на 45</sup>  
~~из выбранных~~ так  
сумма из выбранных чисел. на 45 не делится  
поэтому выбраны наименьшие число. итак мы  
мы из первой по числу выбрали ~~1, 2, 3, 4, 5, 6~~

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; 2) она не могла выбрать в  
первых числах; 42, 53, 54, 55, 56, 57, 0 и 4  
3) она не могла выбрать 12 чисел тогда она  
выбрала числа 103, 104, 105, 106, 107, 108.

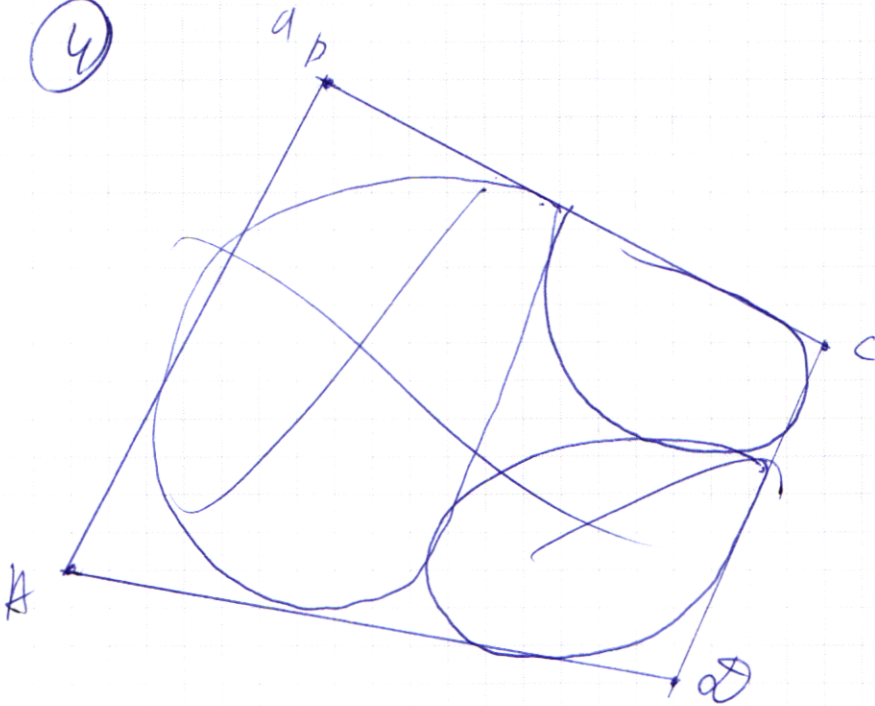
$$1+2+3+4+5+6 = \frac{1+6}{2} \cdot 6 = 21$$

$$52+53+54+55+56+57 = \frac{1+6}{2} \cdot 6 = 109$$

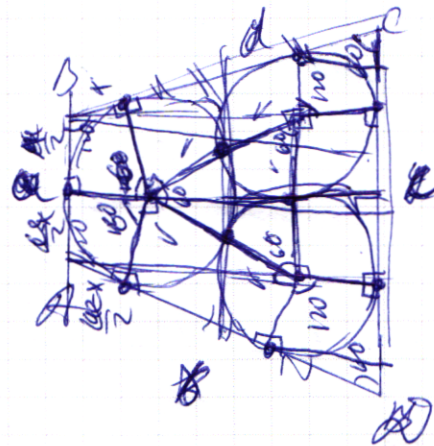
$$21 + 327 + 103 = 451$$

$$\begin{array}{r} 348 \\ + 103 \\ \hline 451 \end{array}$$

4



$$r_1 = r_2 = r_3$$



$$v = ?$$

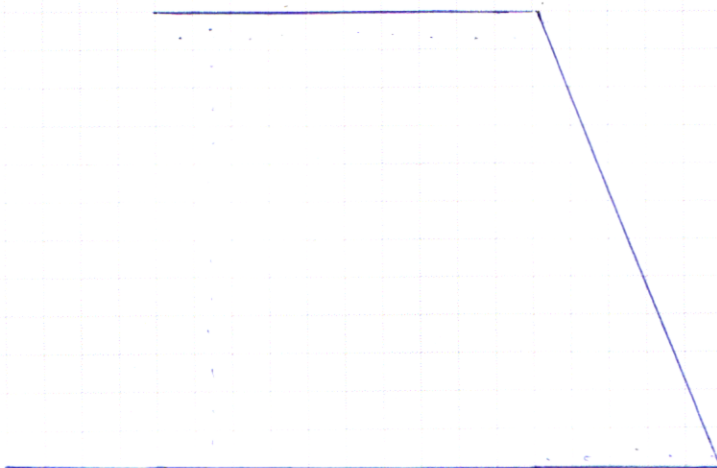
$$a) \quad b + d - a - c = 12$$

$$b = d$$

$$h = 4r$$

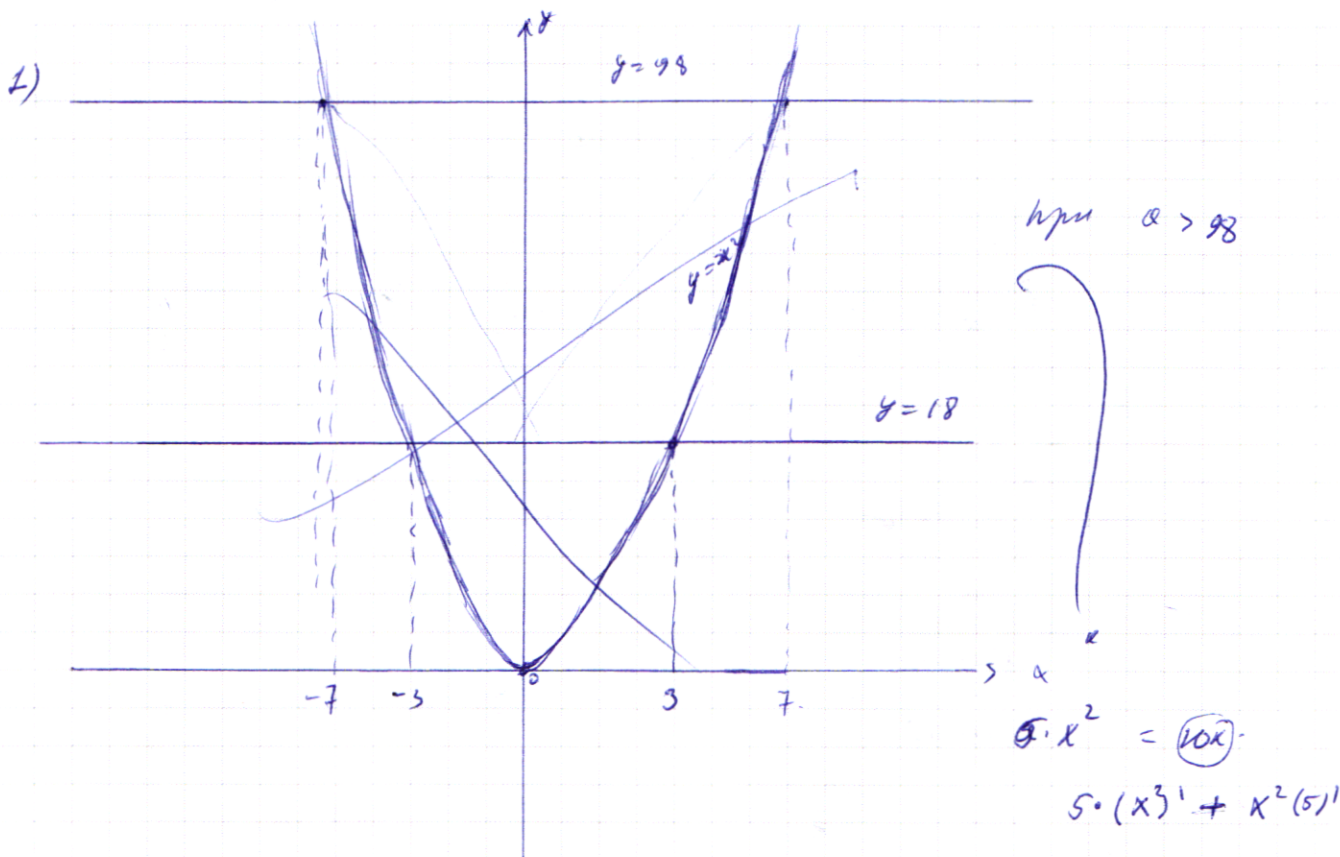
$$2d - a - c = 12$$

$$\frac{c-a}{2}$$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



2)

$$f(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$f'(x) = (\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4)'$$

$$= 7 \sin 3x \cos 7x - 3 \cos 3x \sin 7x - 2 \sin x \cos x + 10 \cos 5x \sin 5x = 0$$

$$7 \sin 3x \cos 7x - 3 \cos 3x \sin 7x - 2 \sin x \cos x + 10 \cos 5x \sin 5x = 0$$

$$= 7 \sin 3x \cos 7x - 3 \cos 3x \sin 7x - \sin 2x + 5 \sin 10x = 0$$

$$7 \sin 3x \cos(3x+4x) - 3 \cos 3x \sin(3x+4x) - \sin 2x + 5 \sin 5x = 0$$

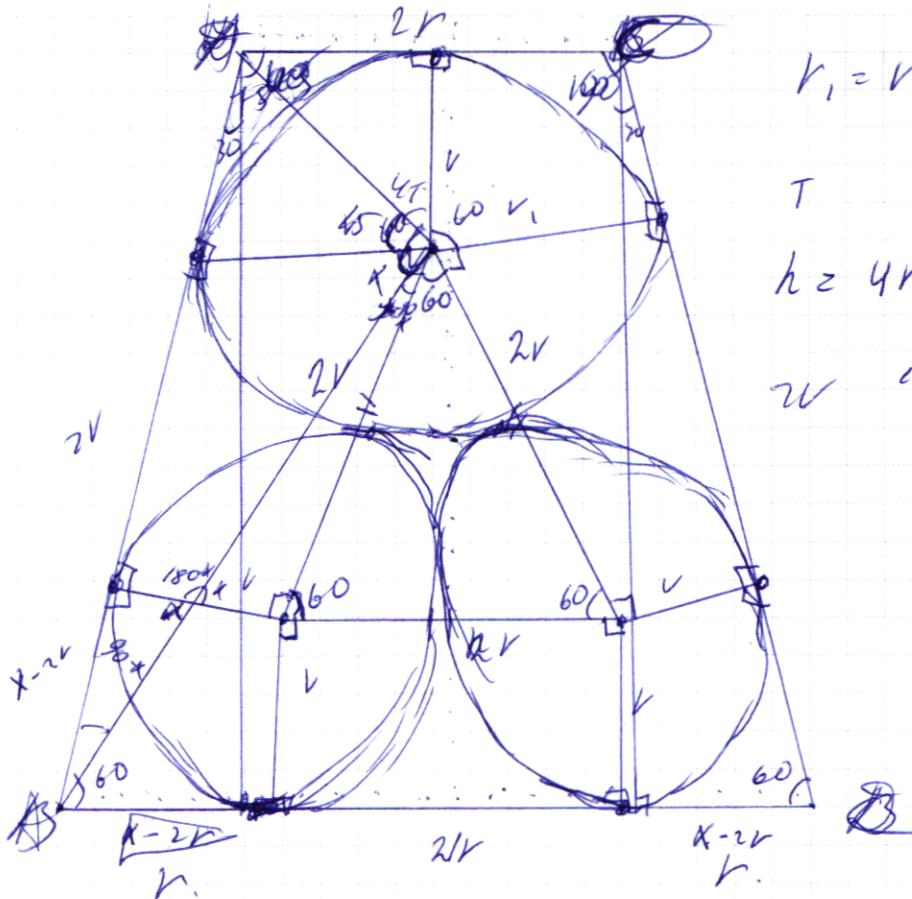
$$7 \sin 3x (\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x) - 3 \cos 3x (\sin 3x \cos 4x + \cos 3x \sin 4x) - \sin 2x + 5 \sin 5x = 0$$

$$7 \sin 3x \cos 3x \cos 4x - 7 \sin^2 3x \sin 4x - 3 \cos 3x \sin 3x \cos 4x - 3 \cos^2 3x \sin 4x - \sin 2x + 5 \sin 5x = 0$$

$$4 \sin 3x \cos 3x \cos 4x - 7 \sin^2 3x \sin 4x - 3 \sin 3x \cos 4x + 3 \sin^2 3x \sin 4x - \sin 2x + 5 \sin 5x = 0$$

$$4 \sin 3x \cos 3x \cos 4x - 4 \sin^2 3x \sin 4x - 3 \sin 4x - \sin 2x + 5 \sin 5x = 0$$

4)



$$r_1 = r_2 = r_3$$

T

$$h = 4r$$

$$2r = 45 + r + 45 + 60 + 90$$

$$\frac{k-2r}{\sin 30} = 2r$$

$$2r = \frac{2(k-2r)}{2}$$

$$r = k - 2r$$

$$2r + 4r - 4r = 12$$

$$2r = 12$$

$$r = 6$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

0, 2, 3

$$\sqrt{x+7} - x \neq 1$$

$$x+4 > 0$$

$$\sqrt{x+7} - x > 0$$

$$x > -7$$

$$\sqrt{x+7} \neq 1+x$$

$$\sqrt{x+7} - x > 0$$

$$x+4 > 0$$

$$x > -4$$

$$x+7 \neq 1+2x+x^2$$

$$\sqrt{x+7} > x$$

$$x^2 + x - 6 \neq 0$$

$$x+7 > x^2$$

$$x_{1,2} \neq \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$x_1 \neq 2 \quad x_2 \neq -3$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2}$$

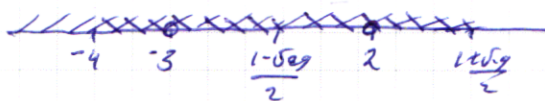
$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{29}}{2} \quad \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$$

$$x \in \left( \frac{1 + \sqrt{29}}{2}, +\infty \right)$$

$$x \in \left( -\infty; \frac{1 - \sqrt{29}}{2} \right) \cup \left( \frac{1 - \sqrt{29}}{2}; \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \right)$$



$$x \in (-4; -3) \cup (-3; \frac{1 - \sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1 - \sqrt{29}}{2}; 2) \cup (2; \frac{1 + \sqrt{29}}{2})$$

2) случаи.

$$\sqrt{x+7} - x > 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 < 0$$

$$x_1 = -3 \quad (x+3)(x-2) < 0$$

$$x_2 = 2$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$x \in (-3; 2)$$

$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 144}}{8} \quad x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$$

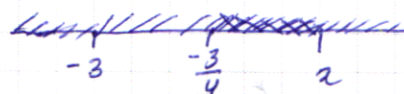
$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{81}}{8} \quad 2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} \quad 4x^2 + 16x + 16 \geq x+7$$

$$x_1 = -\frac{3}{4} \quad x_2 = -3$$



$$x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$$



$$x \in [-\frac{3}{4}; 2)$$

2 - cызы

$$\sqrt{x+7} - x > 0 \Rightarrow x^2 - x - 7 < 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) < 0$$

$$\sqrt{x+7} - x < 1 \Rightarrow x^2 + x - 6 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) > 0$$

cos  $\sqrt{x+7} - x (x+4) \geq 1$

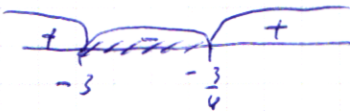
$$x+4 \leq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$$

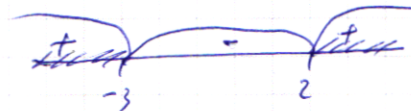
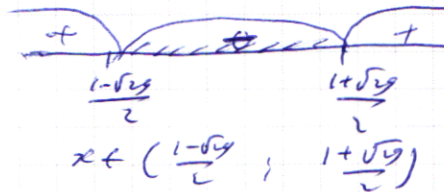
$$4x^2 + 16x + 16 \leq x+7$$

$$4x^2 + 15x + 9 \leq 0$$

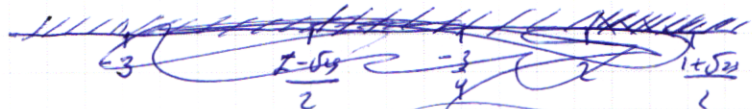
$$\left(x + \frac{3}{4}\right)(x+3) \leq 0$$



$$0 \in [-3; -\frac{3}{4}]$$

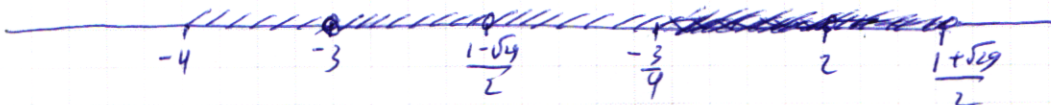


$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$$



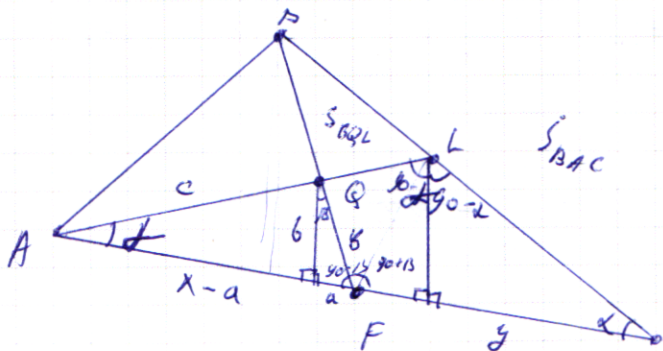
$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

$$x \in \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$



$$\text{OTBET: } \left[-\frac{3}{4}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

6)



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{12}$$

$$S_2 = \frac{12S_1}{5}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{2}{5}$$

$$5x = 2b$$

$$8 = \frac{6}{\cos B}$$

$$y = \frac{5x}{2} = 2.5x$$

$$36 + a^2 = \frac{36}{\cos^2 B}$$

$$Ac = 3.5x$$

$$a^2 = \frac{36 - 36 \cos^2 B}{\cos^2 B}$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$$

$$a^2 = \frac{b \sin B}{\cos^2 B}$$

$$a^2 = \frac{36(1 - \cos^2 B)}{\cos^2 B}$$