МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 13-011

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

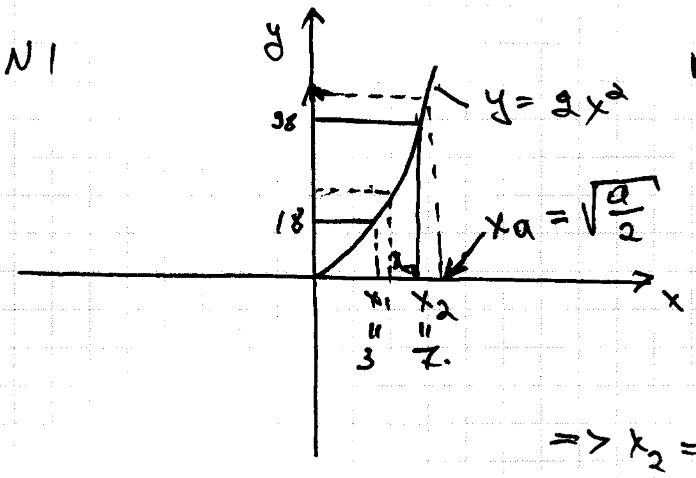
13-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1



Подставим вместо y 98 и 18.

$\begin{cases} 18 = 2x_1^2 \\ x_1 > 0 \text{ (т.к. отрезок} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$

$\begin{cases} 98 = 2x_2^2 \\ x_2 > 0 \text{ (т.к. отрезок)} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = 7$. Заметим, что возможно два случая: $a \in [18; 98]$ или $a \in (98; \infty)$.

(a не может быть < 18 т.к. тогда x_a (a проецируем на параболу, далее эту точку проецируем на Ox) меньше $x_1 = 3$. Значит $x_1 + x_a < 6 < x_2 = 7$ что противоречит неравенству треугольника.) Рассмотрим первый случай: $a \in [18; 98]$. Значит 7 — большая сторона в треугольнике. Используем теорему косинусов. $x_2^2 = x_1^2 + x_a^2 - 2x_1 \cdot x_a \cos 120^0$.

$49 = 9 + \frac{a}{2} + \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} - 80 = 0 \quad D = 18 + 320 = 338$.

Нас интересуют положительные a (т.к. a под корнем и длина отрезка). $\sqrt{a} = \frac{-\sqrt{18} \pm \sqrt{338}}{2}$. мы берем $a > 0$. $\sqrt{a} = \frac{-3\sqrt{2} + 13\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 50$.

Рассмотрим второй случай: $a > 98$. Используем теорему косинусов. $\cancel{\frac{a}{2} = 49 + 9 +}$ $x_a^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 \cos 120^0$

$\frac{a}{2} = 49 + 9 + 21 = 79 \Rightarrow a = 158$. Т.к. мы использовали теорему косинусов для угла 120^0, то только при $a = 158$ или $a = 50$ мы можем составить Δ из отрезков.

Ответ: ~~при~~ $a = 50$ или $a = 158$.

N5 $\log_{\sqrt{x+7} - x}(x+4) \geq 1$ ОДЗ $x > -4$

(1) $\sqrt{x+7} > x \rightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 7 > x^2 \end{cases} \end{array}\right.$ (!) $\quad \sqrt{x+7} - x > 0$ (1)

$\sqrt{x+7} - x \neq 1$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Решим (!) $x^2 - x - 7 \le 0$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

объединим с условием, что $x<0$ получим.
$x \in (-\infty, \frac{1+\sqrt{29}}{2}]$. Найдем другие ограничения.
$x+4>0 \Rightarrow x>-4$ $\quad \sqrt{x+7} \ne x+1$

$x+7 \geq 0$ $\quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+7 \ne x^2+2x+1 \end{cases} \to x \ne 2$

$x \geq -7$

Лемма: $\log_{a(x)} b(x) \vee 1 \quad (a(x)-1)(b(x)-a(x)) \vee 0$. На одз. Докажем её. ($\vee$ – какой-то знак $>, <$ и т.д.)

$\log_{a(x)} b(x) - 1 \vee 0 \Rightarrow \log_{a(x)} \frac{b(x)}{a(x)} \vee 0$

$t(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ $\quad \log_{a(x)} t(x) \vee 0$ ~~если $0<a(x)<1$~~

~~т.о. функция~~ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<a(x)<1 \\ t(x) \wedge 1 \end{cases} \text{(знак меняется т.к. функция убывает).} \\ \begin{cases} a(x)>1 \\ t(x) \vee 1 \end{cases} \text{(знак остаётся прежн. т.к. функция растёт).} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x)-1<0 \\ t(x)-1 \wedge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a(x)-1>0 \\ t(x)-1 \vee 0 \end{cases} \end{array}\right.$ перемножим (учитывая св-ва неравенств).

$(a(x)-1)(t(x)-1) \vee 0$ т.к. по ОДЗ $b(x)>0$, то $(a(x)-1)(b(x)-a(x)) \vee 0$

Используем лемму к задаче:

$(\sqrt{x+7} - x - 1)(x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0$

Рассмотрим знак первой скобки (посмотрим, когда она ≥ 0).

$\sqrt{x+7} \geq x+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 \geq x^2+2x+1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \\ x+1<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ x<-1 \end{array}\right. \Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-011
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+3)(x-2)\le 0\\ x\ge -1\end{cases}\\ x<-1\end{array}\right.$ т.е при допустимых x от $-\infty$; до 2 включая первая скобка больше 0, иначе — меньше.

Посмотрим, когда вторая скобка больше $\geq$ или равна 0.

$x+4-\sqrt{x+7}+x\ge 0 \quad 2x+4\ge\sqrt{x+7} \Rightarrow \begin{cases}x\ge -2\\ 4x^2+16x+16\ge x+7\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge -\frac{3}{4}\\ x\le -\frac{27}{8}\end{array}\right.\\ x\ge -2\end{cases} \Rightarrow x\ge -\frac{3}{4}.$

Заметим, что при $[-\frac{3}{4}; 2]$ обе скобки положительны (т.е нер-о выполняется). При $x<-\frac{3}{4}$ одна скобка положительна, другая отрицательна, аналогично при $x>2$. Также заметим, что $x=2$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $[-\frac{3}{4}; 2)$.

№3 Рассмотрим случай когда 7 восьмерок стоят в начале. У нас осталось 10 свободных позиций. Мы можем ставить на них 0 или 7.

1 7 11 ← вариантов. На первую позицию поставить два варианта (0 и 7).
2 0 7 12
3 0 7 0 7 14 На вторую 4
4 0 7 0 7 0 7 0 7 18 Аналогично, если мы ставим

вверх 0. На первой позиции у нас один вариант, на второй 2, на третьей 4 и т.д.

позиция	кол-во ~~втрч~~ комбинаций до неё
1	1
2	2
3	4
4	8
⋮	
9	256
10	512 − 1 (т.к. если мы ставим все семерки, то послед. должен быть 0).

таким образом, всего 511 расстановок, при условии, что число вида 88…8 7 * *…
Аналогично, если число вида 88…8 0 * * …
т.е если число начинается с 88…8 (7), то всего 1022 комбинации.

Рассмотрим случай, если 7 подряд идущих восьмерок стоят на другой позиции. Для них есть 10 мест (иначе против-ие в том, что они идут подряд). На первом месте обязана быть 7-ка.
Проведем аналогичное рассуждение, учитывая то, что позиций по одну меньше.

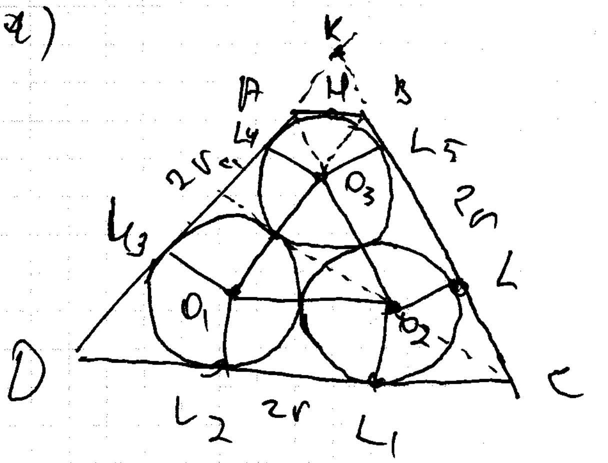
позиц.	кол-во комб. идущих до неё
1	1
2	2
3	4
4	8
⋮	⋮
8	128
9	256 − 1 = 255

Аналогично $255 \cdot 2 = 510$.
Это нужно умножить ~~на~~ 10 т.к. 10 вариантов расставить ~~восьм~~ 7-ки подряд

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

идущих восьмерок. т.е 5100 чисел вида 7 * * ... 8 ... 8 ... * сложим
$5100+1022=6122$ Ответ: 6122
и4.
а)



Дано:
$AD+BC-AB-CD=12$
три w касаются друг друга и сторон 4-ка.
$w_1=w_2=w_3$
$r-?$

Заметим, что $O_1O_2L_1L_2$ – прямоуг-ник. Значит $2r=O_1O_2=L_1L_2$ (радиусы $\perp$ касат).
Аналогично $O_1O_3=L_3L_4$ и $O_2O_3=LL_5=2r$
Как дано $AL_4+2r+L_3D+BL_5+2r+LC$
$-AH-HB-DL_2-CL_1-2r.=12$
Заметим, что $AH=AL_4$; $BH=BL_5$; $LC=CL_1$; $DL_2=DL_3$ (как отрезки касательных).
$2r=12 \Rightarrow \underline{r=6}$

б) $\angle AO_3B-?$
W_3 – вневписанная окружность для AKB. значит она лежит на точке пересечения биссектрис двух внешних углов. Докажем, что

$\triangle CKD$ — равносторонний. Проведем биссектрису CC_1. В силу паралл-ти $O_3O_2 \parallel CL$ и $O_1O_2 \parallel L_1L_2$ $\Rightarrow$ она также биссектриса для $\triangle O_1O_2O_3$. Но он равносторонний $\Rightarrow$ $CC_1 \perp O_1O_3$, но $O_1O_3 \parallel DK \Rightarrow CC_1 \perp DK$

CC_1 — биссектриса $\Rightarrow DC = CK$.

Аналогично доказываем попарное равенство всех сторон. Значит $\angle DKC = 60^\circ$.

Пусть $\angle KBA = \alpha$, тогда $\angle KAB = 120 - \alpha$.

$\angle ABO_3 = 90 - \frac{\alpha}{2}$; $\angle BAO_3 = 30 + \frac{\alpha}{2}$

$\angle AO_3B = 180 - 90 + \frac{\alpha}{2} - 30 - \frac{\alpha}{2} = 60^\circ$.

№ 7.

~~$S = 1+2+3+4+5+6+52+53+54+55+56+57+103+104+$~~
~~$+105+106+107+108+154+155+156+157+158+159+205+$~~
~~$+206+207+208+209+210$~~. Эти числа дают разные остатки при делении на 45. Если мы возьмем два числа, дающие один остаток при делении на 45, то получим противоречие.

$S = 181+182+183+184+185+186+142+143+144+$
$+145+146+147+103+104+105+106+107+108+$
$64+65+66+67+68+69+25+26+27+28+29+30$.

Покажем, что данное S — наименьшее. Вообще говоря, это один из примеров, главное брать числа, дающие разные остатки при делении на 45

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-011
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При том, чтобы они были минимально возможны. Покажем, что число меньше не получится. Пусть мы решили заменить одну цифру в любом из наших наборов (сначала уменьшить). Мы уменьшили её на α. Изначально она давала остаток β. Стала $\beta-\alpha$. Но тогда будет противоречие, ведь остатки упорядочены (если искать минимальное число). Значит какое-то число, ранее дававшее остаток $\beta-\alpha$ должно давать другой остаток (ближайший "свободный" остаток $=\beta$) $\Rightarrow$ и второе число нужно увеличить на α $\Rightarrow$ S не изменится.

№2

Возьмем ~~производную~~

$\cancel{g'(x) = 3 \cancel{\cos} 3x + 7\cos 7x - 2\sin x \cos x - 10}$

$\cancel{\cos 5x \sin 5x = 0}$ $\quad 3\cos 3x + 7 \cancel{\cos} 7x = \sin 2x + \sin 10x$

Заметим, что $\sin 7x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x$

$f(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3$

$f'(x) = \cancel{2\cos}\ 2\sin 4x - 5\sin 10x - 2\cos x \sin x -$

$- 10\cos 5x \sin 5x = 0$

$\cancel{2\sin 4x - 10}\sin 10x$

$f'(x) = 2\sin 4x - 10\sin 10x - \sin 2x = 0$

Положим $x = \pi k$.

$f'(\pi k) = 0$

$f''(x) = 8\cos x - 100\cos 10x - 2\cos 2x$

$f''(\pi k) = 8 - 100 - 2 < 0 \Rightarrow \pi k$ — точка локального максимума.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{x_1 = 7}$ $\quad \frac{a}{2} = 49+9+49\cdot 9$ $\quad x_3 = \sqrt{\frac{a}{2}}$ $\quad 490-49=441+9+49=499$

$a = 938$

$x_1 = 3$
$x_2 = 7$
$x_3 = \sqrt{\frac{a}{2}}$

$49 = 9 + \frac{a}{2} + \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$

$a + 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{a} - 80 = 0$

$D = 18 + 320 = 338$

$338 \mid 2$
$169 \mid$

$\sqrt{a} = \frac{-\sqrt{18}+\sqrt{338}}{2} = \frac{-3\sqrt{2}+13\sqrt{2}}{2} =$

$= \frac{10\sqrt{2}}{2} = \sqrt{a}$ $\quad a = 50$

$x_3 = 5$ $\quad \frac{a}{2} = 49+9+\cancel{49\cdot 9} = \cancel{499}$ $\quad 7\cdot 3 \quad 79$

$\cancel{x_3 = \sqrt{499}}$ $\quad x_3 = \sqrt{79}$.

$79 = 49+9-2\cdot 3\cdot 7\cdot \cos\alpha \cdot 2$ $\quad \cos 10x - \cos 4x =$

$21 = -3\cdot 7\cdot\cos\alpha\cdot 2$ $\quad -2\sin 3x \sin 7x$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

$\frac{a}{2} = 49+9+7\cdot 3 = 79$

$a = 79\cdot 2 = 158$

$\cos(90^\circ+30^\circ) =$

$= \cos 90^\circ \cdot \cos 30^\circ \mp \sin 90^\circ \sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$. $\quad \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x$

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\cos\alpha - \cos\beta = \cancel{-2\cos}\ -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

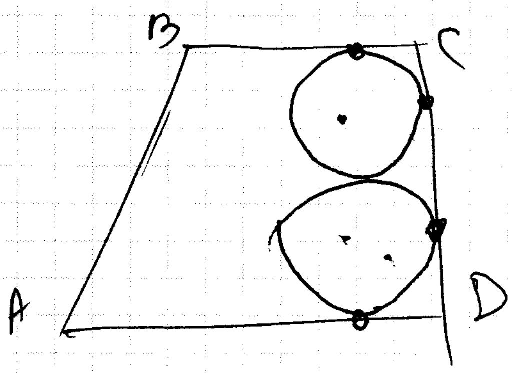
$\cancel{-\frac{1}{2}(\sin 10x + \sin 4x)}$

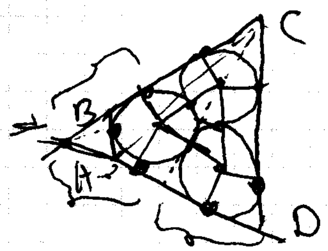
$-\frac{1}{2}(\cos 10x - \cos 4x) = \sin 7x \cdot \sin 3x$.

$\cancel{\log_{\sqrt{7}} 4\ 71}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)





$\left[-\frac{4}{3}; 2\right)$

ОДЗ

$\sqrt{x+7} - x \geq 0$

$\sqrt{x+7} \geq x$ если $x < 0$ то нер-о истинно

если $x \geq 0$ $x+7 \geq x^2$

$x^2 - x - 7 \leq 0$

0 $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x > -4$ $\left[-\frac{4}{3}; 2\right]$

$\left(\sqrt{x+7} - x - 1\right)\left(x + 4 - \sqrt{x+7} + x\right) \geq 0$

$\sqrt{x+7} = x+1$

$x+7 = x^2+2x+1$

$x^2+x-6=0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

$x \geq -\frac{3}{4}$ "+"

$x < -\frac{3}{4}$ "−"

если $x < -1$, то

$\sqrt{x+7} - x - 1 > 0$

$x > 2$, то это < 0.

$-$ $x > -1$ $\quad$ $-$ $x > 2$

$+$ $x < -1$ $\quad$ $+$ $x < 2$

$2x+4 = \sqrt{x+7}$

$4x^2+16x+16 = x+7$

$4x^2+15x+9=0$

$D = 225 - 144 = 81$

$x = \frac{-15 \pm 9}{8} = -\frac{3}{4}$

или $-\frac{24}{8}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-011
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ $\quad \log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$\sqrt{x+7}-x>0$ $\quad \sqrt{x+7}>x$ $\quad 16\cdot 9=$

$x+4>0$ $\quad x+7>x^2$ $\quad =160-16=144$

$x>-4$ $\quad \begin{cases} x^2-x-7<0 \\ x>0 \end{cases}$ $\quad 225-144=81$

$D=1+28=29$

$\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

$\cancel{\frac{1-\sqrt{29}}{2}}<x<\frac{1+\sqrt{29}}{2}$ $\quad 0<x<\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)-\log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)\geq 0$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\geq 0$ $\quad 17\cdot 17 = 119,\ 17,\ 289$

$(\sqrt{x+7}-x-1)\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}-1\right)\geq 0$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x)\geq 0$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(2x-\sqrt{x+7}+4)\geq 0$

$\sqrt{x+7}-x-1=0$

$\sqrt{x+7}=x+1$ $\quad 2x+4=\sqrt{x+7}$

$x+7=x^2+2x+1$ $\quad 4x^2+16x+16=x+7$

$x^2+x-6=0$ $\quad 4x^2+15x+9=0$

$D=225-4\cdot4\cdot9=\cancel{369}=9^2$

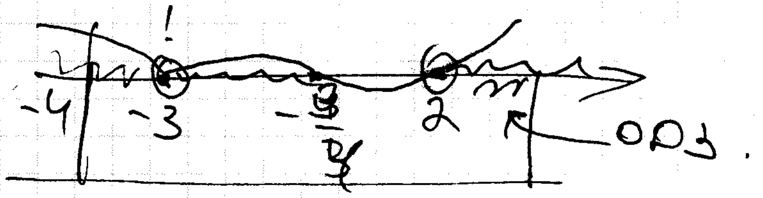
$(x+3)(x-2)=0$ $\quad x=\frac{-15\pm 9}{8}=-\frac{3}{4}$ или

$(x+3)(x-2)$ $\quad (4x+3)(x+3)=0$ $\quad \frac{-24}{8}=-3$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(x+3)(x-2)(4x+3)(x+3) \geq 0$



$\frac{1+\sqrt{29}}{2} > \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3$

~~Ответ: $x \in (-\infty; 3$~~

Отв: $(-4;-3) \cup$

$(-3; -\frac{3}{4}] \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$\sqrt{x+7} - x \neq 1$

$x + 7 \neq x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 6 \neq 0$

$x \neq -3$

$x \neq 2$

$\sqrt{7 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{28-3}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$

$18 = 2x^2 \quad x = 3$

$98 = 2x^2 \quad x = 7$

$a = 2x^2$

$x_1^2 = 9$

$x_2^2 = 49$

$x_3^2 = \frac{a}{2}.$

$490 - 49 =$

$441 + 9 + 49 =$

$= 499$

998

$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_2 \cdot x_3 \cdot \frac{1}{2}$

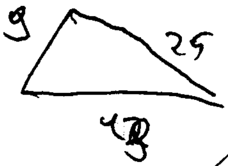
$9 = 49 + \frac{a}{2} + \frac{49a}{2}$

$-40 = 25a$

$a = -\frac{40}{25} = -1{,}6$ не имеет смысла.

$49 = 9 + \frac{a}{2} + \frac{3a}{2}$ $3\sqrt{a}$

$40 = \frac{10a}{2}$ $a = 8$



$\frac{a}{2} = 49 + 9$

$40 = \frac{a}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$

$a + 3\sqrt{a} - 80 = 0$

$\frac{a}{2} = 49 + 9 + 49 \cdot 9$

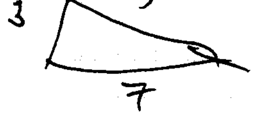
$D = 9 + 160 = 169 = 13^2$

$a = 898$ — противоречит нер-у Δ.

$\sqrt{a} = \frac{-3 \pm 13}{2} = 5$ или -8

но $a > 0 \Rightarrow a = 25$

$3 + a > 7$



$49 = 9 + 25 - 30\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ $\alpha = 120^\circ$

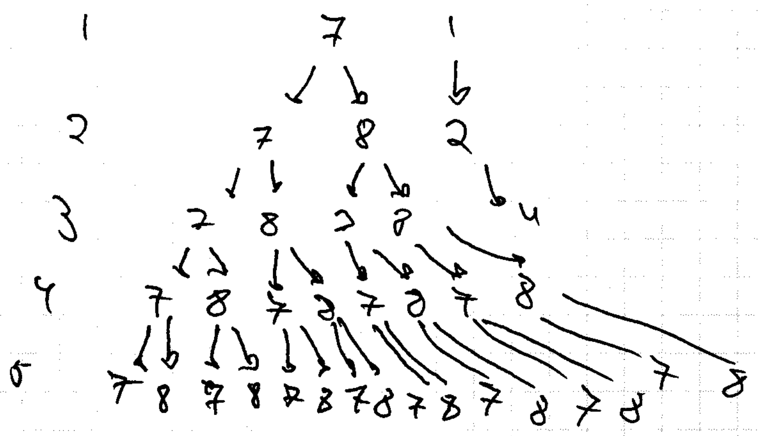
☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

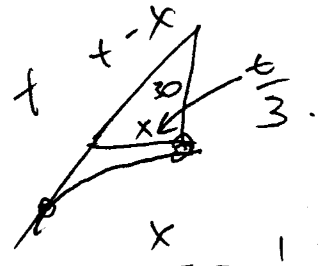
13-011
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512 − 1 = 511

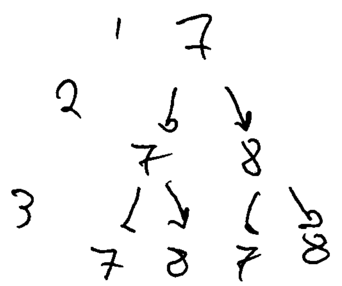
$511 \cdot 2 = 1022$



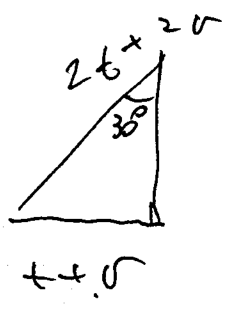
$$\frac{x}{t-x} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{t}{3}$$

10



1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256 − 1 = 255 · 2 = 510 · 10



~~$\frac{t}{3} + 2r + t + \frac{t}{3} + 2r + t$~~

$$\frac{t}{3} + 2r + t + \frac{t}{3} + 2r + t - \frac{t}{3} - \frac{t}{3} - t$$

$5100 + 1022 = \boxed{6122}$

$t - 2r = 12$

$r = 6$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= -\frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 4x$

$-5\cos 10x + 2\cos 4x$

$-2\cos x \sin x$

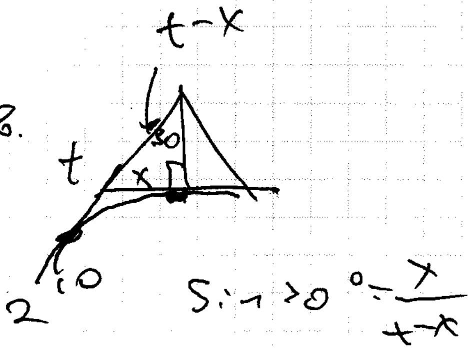
$-5\cos 10x$

7 8

0 7 8

1 − 7
2 − 8
3 − 9
4 − 10
5 − 11
6 − 12
7 − 13
8 − 14
9 − 15
10 − 16
11 − 17

11 способов.



$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$\sin 30° = \frac{x}{t-x}$

$t - x = 2x$

$x = \frac{t}{3}$

$10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

$S = 12 \cdot 2^9$

8 9 10 11

$10 \cdot 9 \cdot 2^8$

$\frac{2}{3}k = \frac{2}{7}k$

1 2 − 3

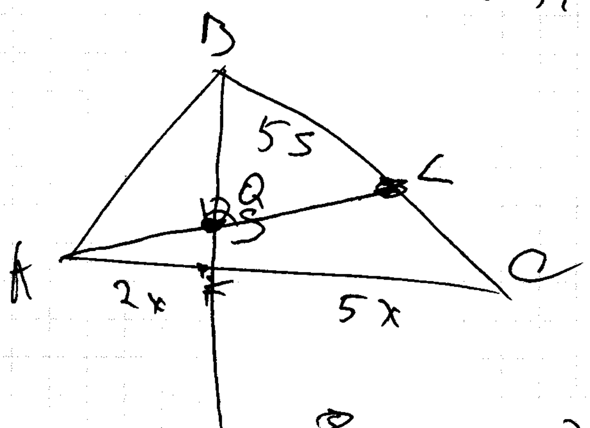
~~3 · 2~~

3!

$3 \cdot 2 \cdot 3$

$10 \cdot 9 \cdot$

$-4\sin 4x$



$\sin 3x = 1$

$3x = 2\pi k$

$7x = 2\pi l$

$\frac{2}{3}\pi k = \frac{2}{7}\pi l$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-011
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

идущих восьмерок. Т.е 5100 чисел вида 7**...8...8...*. Сложим 5100+1022= =6122 Ответ: 6122.

~~№3~~. №2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

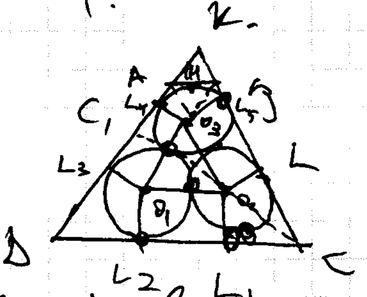
$(\sin 3x \cdot \sin 7x)' = 3\cos 3x + 7\cos 7x$

$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x$

$(\cos^2 5x)' = -10\cos 5x \cdot \sin 5x$

$g'(x) = 3\cos 3x + 7\cos 7x - \sin 2x - 5\sin 10x$

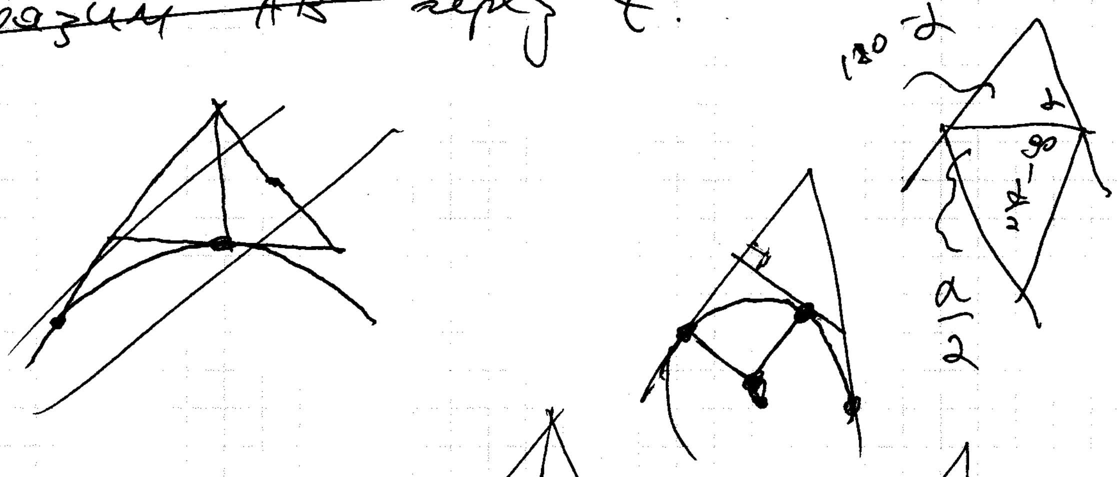
№4.



Заметим, что $\triangle O_1O_2O_3$ — равност. треугольник (все стороны равны т.к. r равны).

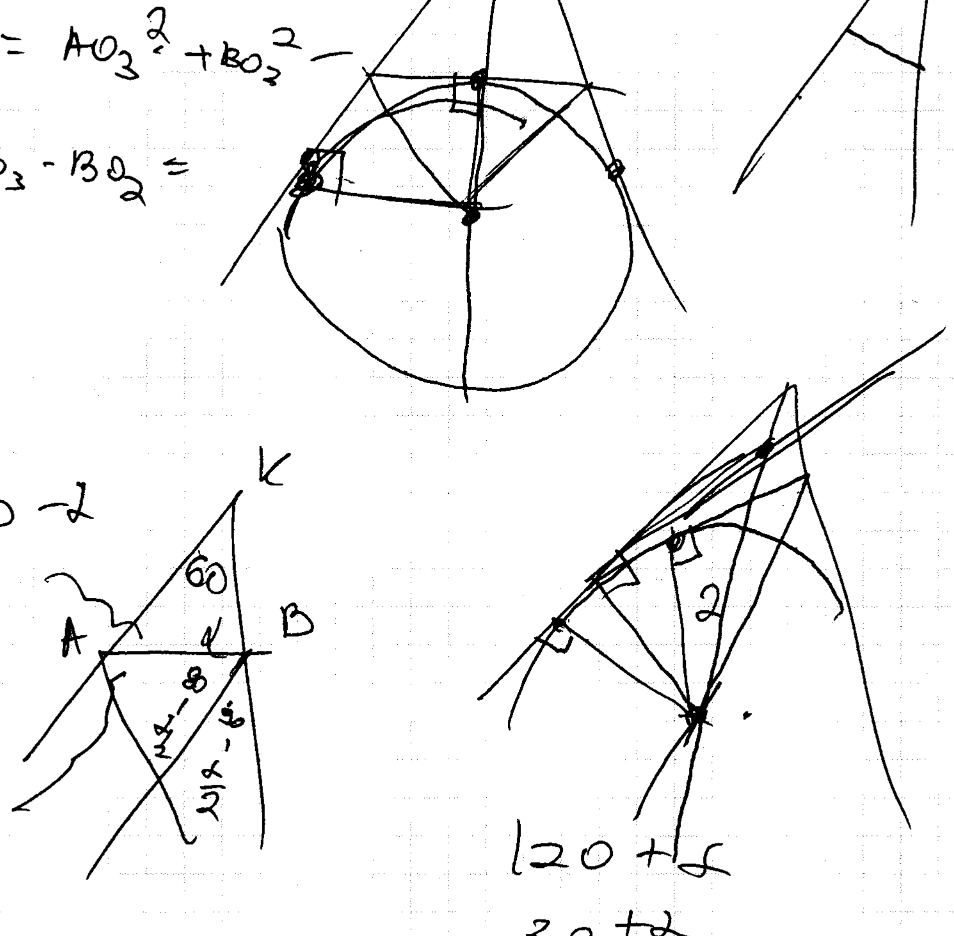
$\omega(r, O_2)$ вписана в угол DCK => оно лежит на его биссектрисе. $O_2O_3 \parallel BC$ т.к. BO_3O_2L — прямоуг (радиусы перпенд. касат). Аналогично $O_1O_2 \parallel CD$; $KD \parallel O_3O_1$ => биссектриса DCK есть биссектриса $\angle O_1O_2O_3$ => CC_1 проходит через точку касания ω; $\angle DCC_1 = \angle CC_1K$ (бисс + высота в равност. $\triangle$). (общая сторона и два равных угла). Аналогично проделовая такие рассужд

можно д-ть, что DCK – равносторонний.
Отсюда следует, что отрезки касательных ~~равна~~ проведенных из точек D, ~~K~~, C равны.
Пусть ~~KL_4 = KL_5~~ = CL = CL_1 = DL_2 = DL_3 = t
~~Выразим AB через t.~~



$AB^2 = AO_3^2 + BO_2^2 -$

$- AO_3 \cdot BO_2 =$



$120 + \alpha$

$30 + \frac{\alpha}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)