

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

15-027

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2$  пересекает прямые  $y = 98$ ,  $y = 18$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ .
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 12$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 58$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $5 : 12$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 45]$ ,  $[46; 90]$ ,  $[91; 135]$ ,  $[136; 180]$ ,  $[181; 225]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①  $y = 2x^2$ ;  $y = 98$   
 $y = 18$   
 $y = a$

$2x^2 = 98$   
 $x^2 = 49$   
 $x = \pm 7 \Rightarrow$  длина отсекаемого отрезка равна 14.

Т.к. против угла в  $120^\circ$  лежит большая сторона, то у нас 2 кандидата на нее: 14 и  $2\sqrt{2}a$

$2x^2 = 18$   
 $x^2 = 9$   
 $x = \pm 3 \Rightarrow$  длина отсекаемого отрезка равна 6.

$2x^2 = \frac{a}{2}$   
 $x = \pm \sqrt{\frac{a}{2}}$   $a > 0 \Rightarrow$  длина отсекаемого отрезка равна ~~2~~  $\sqrt{2}a$

По теореме косинусов в 1 случае:

$$14^2 = 6^2 + a^2 - \cos 120^\circ \cdot 6 \cdot \sqrt{2}a$$

$$196 - 36 - 2a = 3\sqrt{2}a$$

$$180 - 2a = 3\sqrt{2}a, a > 0$$

$$60 - \frac{3}{2}a = \sqrt{2}a$$

$$3600 - 80a + \frac{4}{3}a^2 - 2a = 0$$

$$\frac{4}{9}a^2 - 82a + 3600 = 0 \quad \sqrt{D} = 18$$

$$a = \frac{82+18}{\frac{4}{9}} = 9 \cdot 12,5 = 112,5$$

$$a = \frac{82-18}{\frac{4}{9}} = 72, \text{ не угод. условию.}$$

Во 2 случае:

$$2 = 196 + 36 + 3 \cdot 14$$

$$a^2 = 274$$

$$a = \sqrt{274}, a = -\sqrt{274} \text{ не угод. усл.}$$

Ответ: 112,5;  $\sqrt{274}$

③ Позиции, в которые может встать первая '8' всего 11.

Рассмотрим случаи, когда они идут сначала.

Тогда у нас 2<sup>10</sup> - расставить цифры и -2, чтобы исключить случаи, когда у нас все '4' или все '0'

В остальных случаях число будет начинаться с '7', а остальные 9 позиций:  $2^9 - 1$ , исключая все '7'.

Получаем:  $2^{10} - 2 + 10 \cdot (2^9 - 1) = 1022 + 10 \cdot 511 = 5110 + 1022 = 6132$ .

⑦ У нас есть такая форма  $45(n-1) + r$ , где n - номер группы, а  $r \in [1; 45]$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ . Получаем сумму 30 чисел:

$$(6 \cdot 45 \cdot 0 + r_1 + \dots + r_6) + (6 \cdot 45 \cdot 1 + r_7 + \dots + r_{12}) \dots$$

Заметим, что  $r_1, \dots, r_{30}$  - различные, т.к. там же остатки при делении на 45 были равны  $\Rightarrow$  условие о разности не выполнялось.

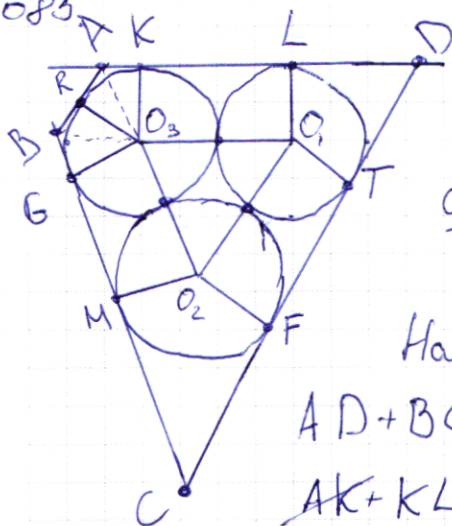
$$\begin{aligned} \text{Получаем, } & 45 \cdot 6 + 45 \cdot 6 \cdot 2 + 45 \cdot 6 \cdot 3 + r_1 + \dots + r_{30} = \\ & = 45 \cdot 6 \cdot 6 + r_1 + \dots + r_{30} - \text{минимум, при } r_1 + \dots + r_{30} - \end{aligned}$$

-минимумом. Из данного набора, это очевидно числа  $1, \dots, 30$ . Получаем:  $1620 + \frac{1+30}{2} \cdot 30 = 1620 + 465 = 2085$ .

Пример очевидно строится:  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, \dots$

Ответ: 2085

(N4)



Введем обозначения, как показано на рисунке.

а)  $AR = AK; LD = DT; FC = CM;$   
 $GB = BR$ , (отрезки кас. равны)

Напишем равенство:

$$AD + BC - AB - CD = 12$$

$$\begin{aligned} AK + KL + LD + \cancel{GB} + GM + MC - \cancel{BR} - \cancel{AR} - \\ - \cancel{CF} - \cancel{FT} - \cancel{TD} = 12 \end{aligned}$$

Получаем  $KL + GM - FT = 12$ .

Рассмотрим  $KLO_3O_3$ , он прямоугольный, т.к.  $(KO_3 \perp AD$  и  $LO_1 \perp AD$  и  $KO_3 = LO_1)$ : (Сначала из этих первых 2 условий следует, что  $KO_3 \parallel LO_1$ , затем из этого уб-я и 3 условия, что он параллелограм, а затем из-за того что его смежные углы прямые, то этот пар-мн-прямог.) Аналогично это доказывается и для  $FO_2O_1T$  и  $MO_2O_3G$ .

Получаем, что  $KL = O_1O_3 = O_1O_2 = O_2O_3 = TF = GM = 2r$  - радиусы окружностей. Подставим в равенство (1), получим:

$$2r + 2r - 2r = 12 \Rightarrow \underline{r = 6}$$

Ответ: 6.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

д)  $O_1 O_3 = O_1 O_2 = O_2 O_3 = 2x \Rightarrow \triangle O_1 O_2 O_3 - \text{р/к.т.} \Rightarrow \angle O_2 O_3 O_1 = 60^\circ$

Т.к. из доказанного ранее следует, что  $\angle G O_3 O_2 = 90^\circ$  и  $\angle K O_3 O_1 = 90^\circ$ , то  $\angle G O_3 K = 120^\circ$

Рассмотрим  $\triangle O_3 R A$  и  $\triangle O_3 K A$ .  $\angle R = \angle K = 90^\circ$  (радиусы, проведенные в точку касания)

$\angle R A O_3 = \angle O_3 A K$ , т.к.  $A R$  и  $A K$  - отрезки касательных, проведенных из одной точки  $A$  к  $O_3$  - общая сторона  $\Rightarrow \triangle O_3 R A = \triangle O_3 K A$ .

Значит  $\angle A O_3 K = \angle R O_3 A$ . Аналогично доказывается, что  $\angle G O_3 B = \angle B O_3 R$ . Получаем  $\angle G O_3 K = 2 \cdot \angle B O_3 R + 2 \cdot \angle A O_3 R = 120^\circ$

$\angle B O_3 R + \angle A O_3 R = 60^\circ = \angle A O_3 B$ . Ответ:  $\angle A O_3 B = 60^\circ$ .

в)  $A O \cdot B O = 58$ . Рассмотрим  $\triangle A O_3 B$ .  $\angle A O_3 B = \frac{AB \cdot O_3 R}{2}$ , т.к.  $O_3 R$  - высота.

Также  $S_{\triangle A O_3 B} = A O_3 \cdot B O_3 \cdot \sin \alpha$  получаем.  
 $AB = \frac{2 \cdot A O_3 \cdot B O_3 \cdot \sin 60^\circ}{2 O_3 R} = \frac{58 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{29\sqrt{3}}{3}$ .

Ответ:  $AB = \frac{29\sqrt{3}}{3}$ .

15)  $\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$   $D(y): (1) x > -4$

1. Если  $\sqrt{x+7}-x > 1$ , т.е.

$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ , упр.  $D(y)$ , то

$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x} (\sqrt{x+7}-x)$

$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$

$\sqrt{x+7} \leq 2x+4, x \geq -2$ .

$x+7 \leq 4x^2+16x+16$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

2)  $\sqrt{x+7}-x > 0$

$\sqrt{x+7} > x$

$x > -7$

$x+7 > x^2$

$x^2-x-7 \leq 0$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\sqrt{x+7}-x \neq 1$

$\sqrt{x+7} \neq x+1$

$x+7 \neq x^2+2x+1$

$x^2+x-6 \neq 0$

$\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$

$D(y): x \in (-4; -3) \cup (-3; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$$D = 225 - 144 = 81$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{3}{4}; +\infty)$$

$$x \in [-2; -3) \cup [-\frac{3}{4}; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$$

2. Если  $\sqrt{x+7} - x < 1$ , то при  $x \in (-3; 2)$

$$\sqrt{x+7} - x < 1$$

$$x+4 \leq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$$

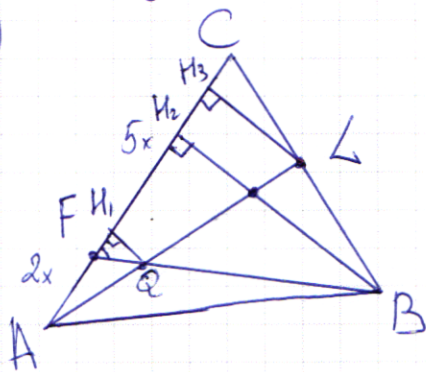
$$x+7 \geq 4x^2 + 16x + 16$$

$$4x^2 + 15x + 9 \leq 0$$

$$x \in [-3; -\frac{3}{4}]$$

Получаем ответ:  ~~$(-2; -3)$~~   $x \in [-2; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

(16)



Введём обозначения как показано

на рисунке.

$$1. FQH \sim FBH_2 = \frac{S_{\Delta FQH}}{S_{\Delta FBH_2}} = k^2 = \frac{36}{BH_2^2}$$

$$2. \frac{S_{\Delta ALC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{LH_3}{BH_2}; LH_3 = BH_2 \cdot \frac{S_{\Delta ALC}}{S_{\Delta ABC}} =$$

$$= BH_2 \cdot \frac{S_{\Delta ALC}}{S_{\Delta ALC} + S_{\Delta ALB}}$$

$$\frac{S_{\Delta FQA}}{S_{\Delta AQB}} = \frac{FQ \cdot AQ}{LQ \cdot QB}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-027

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



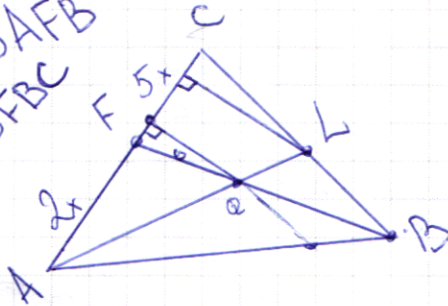
черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{FBC} + S_{AFB}$   
 ~~$\frac{4}{15} S_{FBC}$~~



$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$

~~$S_{FCB} - S_{FLQ}$~~

$\frac{S_{FCB} - S_{FLQ}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$

$\frac{S_{FCB}}{S_{ABC}} = \frac{5}{7}$      $\frac{5}{7} - \frac{S_{FLQ}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$

$\frac{S_{FLQ}}{S_{ABC}} = \frac{25}{84}$

$\frac{S_{ACL} - S_{AFQ}}{S_{ABC}} = \frac{25}{84}$

$\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin 5x + \cos 2x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

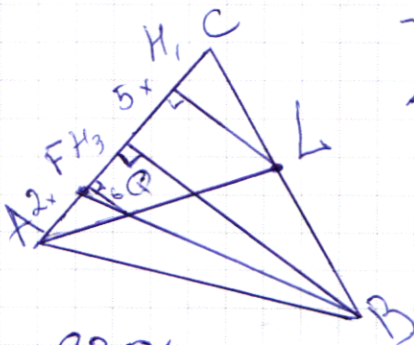
$\sin 5x + \cos^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x - \sin^2 5x + 3 = 0$

$-3\sin^2 x + \sin 5x(\sin 5x + 1) + \sin 5x - \sin^2 5x + 2 = 0$

$g'(x) = -6\sin x + 5\sin 5x - 10\sin 5x + 5\cos 5x - 10\cos 5x = 0$

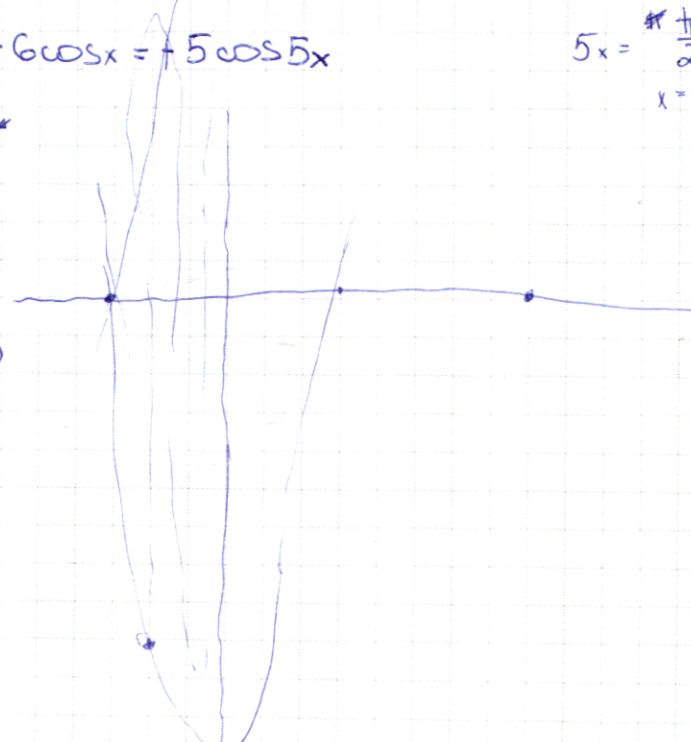
$-6\cos x = 5\cos 5x$

$5x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{10}$



$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$

$\frac{S_{ACL}}{S_{ABC}} = \frac{BH}{CH}$



$$\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$$

$$D(y): \begin{cases} x > -4 \\ x > -7 \\ \sqrt{x+7} - x > 0 \\ \sqrt{x+7} > x \end{cases} \quad \begin{matrix} \times 49 \\ 7 \\ x^2 + x + 4 < 0 \\ x+7 < -x^2 \end{matrix}$$

$$\sqrt{x+7} - x > 0 \quad 1$$

$$\sqrt{x+7} > 1+x; \quad 1+x < 0$$

$$x+7 > x^2+2x+1 \quad x < -1$$

$$x^2+x-6 < 0$$

$$D = 1+24=25$$

$$x \in (-3; 2)$$

$$x \in \left( \frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right) \quad \text{X3}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \quad \sqrt{f(x)} > g(x)$$



$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > g(x)^2 \\ g(x) < 0 \\ f(x) < -g(x)^2 \end{cases}$$

$$x+7 > x^2$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 1+28=29$$

$$x \in \left( \frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right)$$

$$U[-7; 0)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad 3 < \frac{1-\sqrt{29}}{2} < -2$$

$$\sin \alpha < \alpha \quad 3 < \frac{1+\sqrt{29}}{2} < 4$$

$$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

$$4x^2+16x+16 \geq x+7$$

$$4x^2+15x+9 \geq 0$$

$$D = 225 - 144 = 81$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$$

$$x \in (-4; -3) \cup \dots$$

$$D = 82 \cdot 82 - \frac{3600 \cdot 4 \cdot 4}{9}$$

$$\begin{array}{r} \times 82 \\ 82 \\ \hline 656 \\ \times 82 \\ 656 \\ \hline 6400 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 31 \\ \hline 45 \\ \times 15 \\ 45 \\ \hline 675 \end{array}$$

$$D(y): x \in \left( \frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right)$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 3 \\ \hline 42 \\ \times 36 \\ 42 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ \times 18 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 31 \\ \hline 45 \\ \times 15 \\ 45 \\ \hline 675 \end{array}$$

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x$$

$$\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$$

$$x+4 > 0 \quad x \in (-7; \dots)$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

$$\sqrt{x+7} - x > 0$$

$$\begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+7} > x$$

$$\begin{cases} x+7 > x^2 \\ x+7 > x^2 \end{cases}$$

$$x^2 - 7 - x > 0 \quad D = 49 + 28 = 29$$

$$x \in \left( \frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right)$$

$$x^2 + x + 7 < 0$$

[1; 45], [46; 90]; [91; 135], [136; 180]

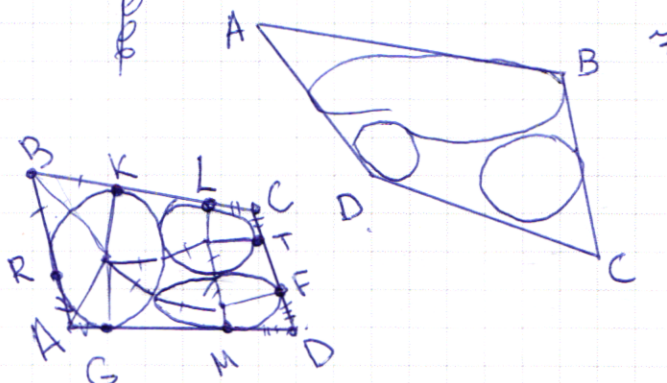
Вписать 30 чисел с разным остатком при делении на 45.

~~45n + r + 45m~~, где  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $r \in \{1, \dots, 45\}$   
 $\Rightarrow 6(45 \cdot 0 + r_1 + r_2 + r_3 + 45 + r_1 + \dots + 90 + 135)$

$135 \cdot 2 \cdot 6 + 465 \cdot 6 = 1620 + 2790 = 4410$

$\frac{4410}{6} = 735$   
 $\frac{735}{15} = 49$   
 $\frac{49}{7} = 7$

$\frac{1+30}{2} \cdot 30 = 31 \cdot 15 = 465$   
 $\frac{1+31}{2} \cdot 31 = 31 \cdot 15.5 = 480.5$   
 $\frac{1+32}{2} \cdot 32 = 31.5 \cdot 32 = 1008$



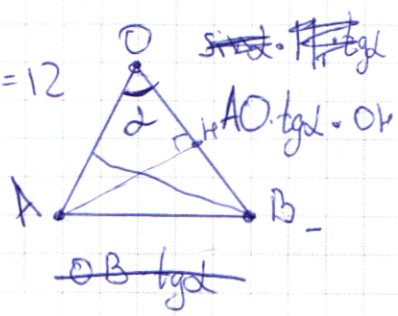
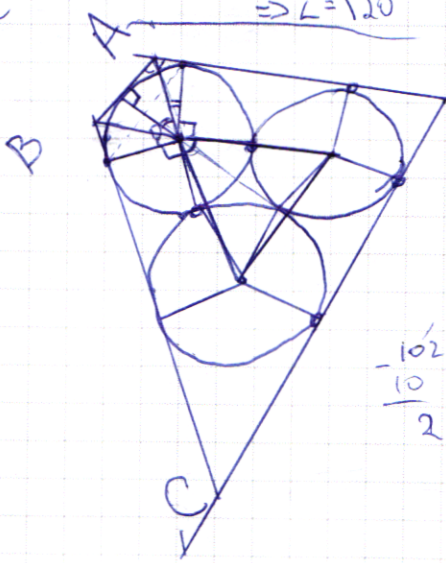
$1+2+3+4+KL+GM-1-2-3-4-TF=12$   
 $LL+GM=12+TF$

$360 = 60 + 180 = 240$   
 $\Rightarrow \angle L = 120^\circ$

$2r + 12 = KL + GM$

$2r + 12 = 2r + 2r$   
 $r = 6$

$AO \cdot BO = 58; AB = ?$



$S = \frac{AB \cdot H}{2}$

$\frac{102412}{24} = 4267.166$

$\frac{AB \cdot 6}{2} = \frac{58 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{26}}$

$\frac{58 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{29\sqrt{3}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 2x^2$     $y = 9x$  ;  $y = 18$  ;  $y = a$ .

$9x = 2x^2$   
 $x^2 = 4.5$

$x = \pm 2.12 \Rightarrow AB = 14$

$18 = 2x^2$   
 $9 = x^2$

$x = \pm 3 \Rightarrow BC = 9$

$$\begin{array}{r} \times 45 \\ 36 \\ \hline 270 \\ + 35 \\ \hline 1620 \end{array}$$

$2x^2 = a$   
 $x^2 = \frac{a}{2}$  ,  $a > 0$

$x = \pm \sqrt{\frac{a}{2}}$

$\frac{2\sqrt{2a}}{2} = \sqrt{2a}$

По т. косинусов:  $14^2 = 9^2 + 2a + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{2a}$

$\frac{9}{2} \sqrt{2a} = 196 - 81 = 115$   
 $\left(\frac{230}{9}\right)^2 = 2a$

①  $a = \frac{230^2}{81} = 298$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 14 \\ \hline 196 \\ + 81 \\ \hline 277 \end{array}$$

$2a = 14^2 + 9^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 14 \cdot 9$

$a = 277 + 21 = 298$

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = 3 \cos 3x \cdot \sin 7x + 7 \sin 3x \cdot \cos 7x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos 5x \sin 5x = 0$

11-ноз граф-8'

$2^{10} - 2$

$11 \cdot (2^{10} - 2) = 1024 - 22 = 1022 \cdot 11 = 103222$

$$\begin{array}{r} \times 1022 \\ 11 \\ \hline 1022 \\ + 1022 \\ \hline 1022 \\ \hline 103222 \end{array}$$

Реш:  $(-4; -3) \cup (-\frac{3}{2}; 2) \cup (2; +\infty)$

$\log_a \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$

$\sqrt{x+7} - x > 1$   
 $\sqrt{x+7} > x+1$

$x+7 > x^2 + 2x + 1$   
 $x^2 + x - 6 < 0$

$D = 1 + 24 = 25$   
 $x = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2$   
 $x = \frac{-1 - 5}{2} = -3$

$x > -4$   
 $x > -7$

$a^b = c$

$\log_2(x+4) \geq \log_2 4$

$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$

$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$   
 $2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$4x^2 + 16x + 16 - x - 7 \geq 0$

$x \in (-3; 2) \Rightarrow \log_2 \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq \log_2 \sqrt{x+7} - x \sqrt{x+7}$

$(x+4) \leq \sqrt{x+7} - x$

$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$   
 $4x^2 + 16x + 16 \leq x+7$

$\sqrt{x+7} > x$   
 $x^2 - x - 7 < 0$   
 $D = 1 + 28 = 29$   
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-6; +\infty)$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 225 \\ - 144 \\ \hline 81 \end{array}$$

$D = 225 - 144 = 81$   
 $x = \frac{-15 \pm 9}{4} = -\frac{3}{2}$   
 $x = \frac{-15 - 9}{4} = -6$

$x \in (-3; -\frac{3}{2}]$