

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

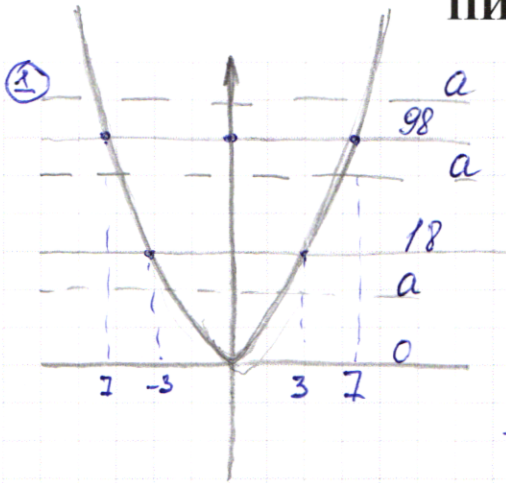
10-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2$  пересекает прямые  $y = 98$ ,  $y = 18$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ .
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 12$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 58$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $5 : 12$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 45]$ ,  $[46; 90]$ ,  $[91; 135]$ ,  $[136; 180]$ ,  $[181; 225]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Узнаём пересечение с прямыми

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 98 \\ x^2 &= 49 \\ x &= \pm 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 18 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= a \\ x^2 &= a/2 \\ x &= \pm \sqrt{a/2} \end{aligned}$$

Возможны 3 ситуации для  $a$

1)  $a \in (0, 18)$ , 2)  $a \in (18, 98)$  3)  $a \in (98, +\infty)$

Знаем что 2 стороны треугольника  $ABC \Rightarrow AB=6$   
 $BC=14$

проверяем при каких значениях ~~бывает~~ можно построить  
треугольник  $ABC$ .

$$\begin{aligned} AB + BC &> AC \\ AB + AC &> BC \\ BC + AC &\geq AB \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 6 + 14 > 2\sqrt{a/2}$$

$$\Rightarrow 6 - 14 > -2\sqrt{a/2}$$

$$200 > a$$

$$14 - 6 > -2\sqrt{a/2}$$

$$32 < a$$

$$10 > \sqrt{a/2}$$

$$10 > \sqrt{a/2}$$

$$-8 > -2\sqrt{a/2}$$

$$4 \geq \sqrt{a/2}$$

$$8 > -2\sqrt{a/2}$$

$$4 > -\sqrt{a/2}$$

всегда, чтобы построить  $\triangle ABC$

$a \in (32, 200) \Rightarrow$  2 ситуации. 1)  $a \in (32, 98)$

2)  $a \in (98, 200)$

сторона  $\triangle ABC \Rightarrow AB=6$

$$BC=14$$

$$AC = 2\sqrt{a/2}$$

1)  $a \in (32, 98)$  - самая большая сторона  $\rightarrow BC \Rightarrow \angle A = 120^\circ$

$$14^2 = 36 + 2a^2 \rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{a/2} \cdot \cos 120^\circ$$

2)  $a \in (98, 200)$  - самая большая сторона  $AC \rightarrow \angle B = 120^\circ$

$$2a^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos 120^\circ$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

③ "8" = 7+k ; "7" = w ; "0" = z ;

$k+w+z+7=17 \Rightarrow k+w+z=10$ . При этом "8"

уже появилось ;

Возникают 2 ситуации :

1) 8888888 ...

2) 8888888 - замечается что слово не может начинаться с "0".

количество слов равно:  $3^7 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) - (1 \text{ ситуация})$

$3^6 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1) (2 \text{ ситуация})$

$\Rightarrow 3^7 (2 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = 10 \cdot 3^7$

②  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$   
 $= \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3 =$   
 $= \cos 2x + \cos 5x + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3 =$

$\cos \varphi \in [-1, 1]$

Заметим что при  $\cos 3x = -1 \Rightarrow \cos^2 5x = 1$   
 $\Rightarrow \cos 2x = -1 = \cos^2 x = 1$

а минимальное значение = 3  
 а максимальное значение = 7 когда все три единицы

$g'(x) = \cos x - \frac{2 \sin 2x}{2} + \frac{2 \cos 10x}{5} = 2 \sin x - \frac{2 \sin 5x}{5} =$

$-\frac{3 \sin 5x}{5} - 2 \sin x - \frac{\sin 2x}{2} = 0$

$6 \sin 5x + 20 \sin x + 5 \sin 2x = 0$

мин = 3

макс = 7.

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$⑤ \log_{(\sqrt{x+7}-x)}(x+4) \geq 1$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x \neq 1 \\ \log_{(\sqrt{x+7}-x)}(x+4) \geq \log_{(\sqrt{x+7}-x)}(\sqrt{x+7}-x) \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7 \neq x^2 + 2x + 1 \\ (x+4) \geq \sqrt{x+7} - x \\ x \geq -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \neq 0 \\ x+4 + x \geq \sqrt{x+7} \\ x \geq -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)(x+3) \neq 0 \\ x \geq -7 \\ 2(x+2) \geq \sqrt{x+7} \end{cases}$$

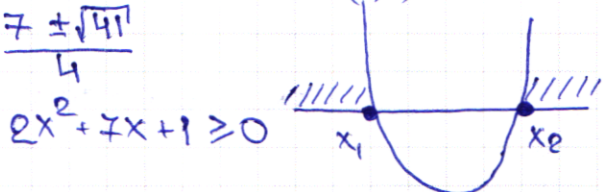
$$\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \\ x \geq -7 \\ x \neq -4 \\ 2(x+2) \geq \sqrt{x+7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq -3 \\ x \neq 2 \\ x \geq -7 \\ 2(x^2 + 4x + 4) - x - 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq -3 \\ x \neq 2 \\ x \geq -7 \\ 2x^2 + 8x - x + 8 - 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-7 + \infty) \setminus \{-4, -3, 2\} \\ 2x^2 + 7x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

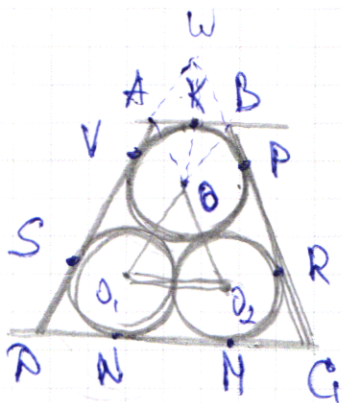
$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 1 &= 0 \\ \Delta &= 49 - 4 \cdot 2 = 49 - 8 = 41 \approx (6,6)^2 \\ x_{1,2} &= \frac{7 \pm \sqrt{41}}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x \in [-7 + \infty) \setminus \{-4, -3, 2\} \\ x \in (-\infty; \frac{7-\sqrt{41}}{4}] \cup [\frac{7+\sqrt{41}}{4}; +\infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in [-7; \frac{7-\sqrt{41}}{4}] \cup [\frac{7+\sqrt{41}}{4}; +\infty) \setminus \{-4, -3\};$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$VA = AK \quad PC = MC$$

$$AKB = BP \quad ND = SD$$

$$AB = AK + KB \quad DC = DK + NM + MC$$

$$O_1O_2 = NN \quad QD = PR \quad ; \quad OO_1 = VS$$

$$AD = AV + VS + SD \quad BC = BP + PR + RC,$$

$$\text{если } \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \Rightarrow 2\omega_1 = 2\omega_2 = 2\omega_3$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 2\omega_1 = 6\omega_2 = 6\omega_3 = PR + VS + NM = 12$$

$$\omega_2 = \omega_1 = \omega_3 = 2$$

$$AD + BC - AD = CD = 12 \Rightarrow VS + PR - NM = 12$$

$$\text{и } PR + VS - 2\omega_1 = 12$$

$$2\omega_1 = 12$$

$$\omega_1 = 6.$$

$$PR = VS = NM = 12$$

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{AO \cdot BO}{2} \quad d_1 = 12 \quad d_2 = ?$$

$$d_2 = \frac{AO \cdot BO}{d_1} = \frac{58}{12} = \frac{29}{6} = AB$$



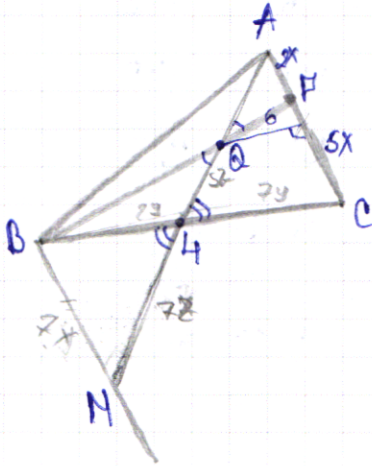
черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



$$\frac{S_{BQK}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$$

расстояние  $[Q, [AC]] = 6$

$$m(\angle A_1 C) = m(\angle B_1 M)$$

$$m(\angle A Q F) = m(\angle B Q M)$$

$$\triangle A_1 C \sim \triangle B_1 M$$

$$\triangle A P Q \sim \triangle Q B M$$

$$\Rightarrow \text{еще } BM \parallel AC \Rightarrow BM = 7x$$

$$\frac{BM}{AC} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{AC} = 1$$

$\triangle A_1 C \equiv \triangle Q B M \Rightarrow$  а имеет одну высоту.

$$\Rightarrow \frac{S_{BQK}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{QK}{AM} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{QK}{QM} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{LM}{OK} = \frac{7}{5}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{6}{AC}$$

$$LC = \frac{25 \cdot 6}{24} =$$

$$LC = \frac{25 \cdot 75}{2} =$$

7) Замечаем что в каждой интервале 49 чисел.

т.е. чтобы сумма была наименьшей. - заметки

~~181 182 183 184 185 186~~

Заметим что для разности  
не должно быть разности  
с собой.

~~175 176 177 178 179 180~~

k boxes + 6

~~92 93 94 95~~

142 143 144 145 146 147

$$136 + 6 = 142$$

103 104 105 106 107 108

$$91 + 12 = 103$$

→ 64 65 66 67 68 69

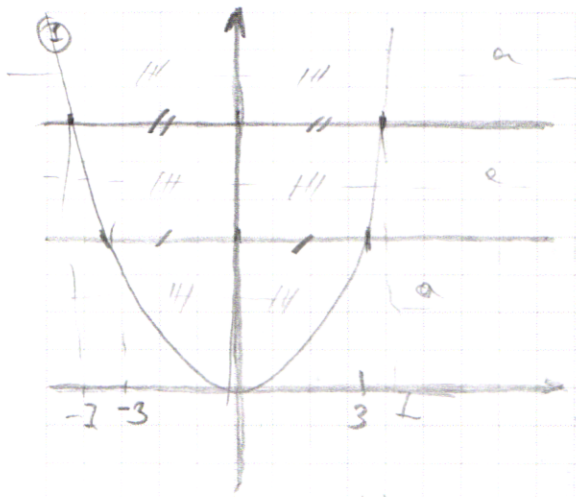
$$46 + 18 = 64$$

→ 25 26 27 28 29 30

$$1 + 24 = 25$$

$$S = 515 + 520 + 525 + 530 + 535 + 540$$

$$\underline{S = 3175} \text{ - минимально}$$



$$2x^2 = 98$$

$$x^2 = \pm \sqrt{7}$$

$$2x^2 = 18$$

$$x = \pm 3$$

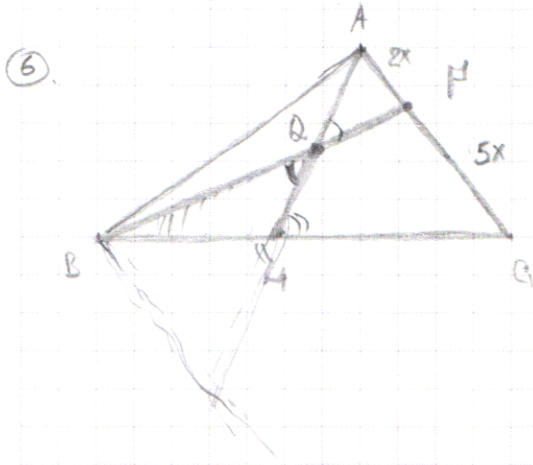
$$180 - 120 = 60^\circ$$

$$\frac{OP}{R} = \frac{1}{2}$$



$$2x^2 = a$$

сначала галочку  
зачеркнуть

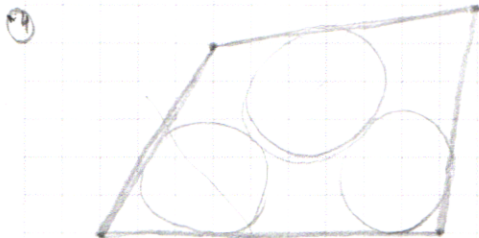


$$\frac{S_{BQK}}{S_{BCQ}} = \frac{5}{12}$$

$$[Q; AC] = 6$$

расстояние

4 52



$$W_1 = W_2 = W_3$$

$$AN + DE = AC = 12$$

$$AD^2 = AR^2 + BR^2 - 2AR \cdot BR \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{AR^2 + BR^2 + AC - AD^2}{2AR \cdot BR}$$

$$\frac{AD \cdot BO}{2} = \frac{AB \cdot W}{2} =$$

$$\Rightarrow AD \cdot BO = AB \cdot W \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot W}{W}$$

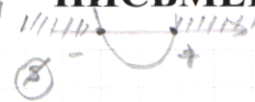
$$AB = \frac{58}{2} = 29$$

$$14 - 6 = 8$$

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 = 49 - 8 = 41$

③  $\log_{\sqrt{x+7}} - x (x+4) \geq 1$



$\log_{\sqrt{x+7}} - x (\sqrt{x+7} - x) = \log_{\sqrt{x+7}} \frac{1}{1} = 1$

$\log_{\sqrt{x+7}} - x$   
 $\sqrt{x+7} - x \neq 1$

$\sqrt{x+7} - x \leq x+4$   
 $\sqrt{x+7} \leq 2(x+2)$   
 $4(x^2 + 4x + 4) \geq x+7$   
 $x+7 \geq 0$

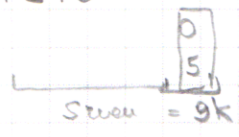
- ④ [1, 45]; [46, 90]; [91, 135]; [136, 180]; [181, 225]  
[225, 270]

по 6  
5: 45 =  
9: 9: 5

6 5 = 30 номеров

5 = 7 8	1	2	3	4	5	6
5 = 26 31	46	47	48	49	50	51
5 = 96 97 2	91	92	93	94	95	96
5 = 131	136	137	138	139	140	141
5 =	181	182	183	184	185	186

розньность индикатор  
 $\frac{6-7}{2} = 37.5$   
 $\frac{51-52}{2} = 20.5$   
: 45.



②  $g(x) = \sin 3x - \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$   
 $4(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$   
 $\cos \alpha + \cos \beta = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos^2 5x = \frac{1 + \cos 10x}{2}$   
 $\sin 3x \cdot \sin 7x + 3 \sin^2 x + \cos^2 5x + \cos^2 x + 3 \cos^2 5x + 3 \sin^2 5x$   
 $\sin 3x \cdot \sin 7x + 4 \cos^2 5x + \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin^2 x + 3 \sin^2 5x$

③: 17 чисел "0", "7", "9"  
2 варианта 1) 8888  
2) 8888

181	515
142	516
103	517
64	518
25	519
515	2585

8 + 2 + k  
5 - W  
0 - Z  
k + W + Z + 7 = 17  
k + W + Z = 10

$3^{10} + 2 \cdot 3^9 = 69 \cdot 3^9$

7 2 0 78 0 79

12  
519  
520  
525  
530  
535  
540  
96 + 18 = 64  
1 + 24 = 25

$\frac{3^7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3}{3^6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3^7 \cdot 2 \cdot 3}{3^6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 3$   
 $3^7 - (2 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = 2635 + (5) = 2680$

$\sin 3x - \sin 7x + \cos^2 x + \cos^2 5x + \cos^2 x$