МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 4 - 009

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “7” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “8” ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

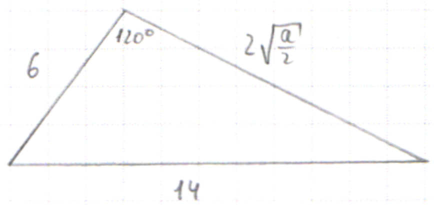
I) Найдем координаты пересечения графиков $y=2x^2$; $y=98$ и $y=18$ и $y=a$

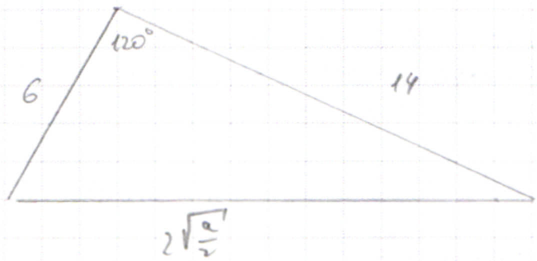
$98=2x^2$, т.е. $x=\pm 7$ $\qquad x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

$18=2x^2$, т.е. $x=\pm 3$

II) Длины „высеченных" отрезков равны $l=x_Б-x_м$, $\underbrace{}_{}$ (т.к. отрезки параллельны O_x) где $x_Б$ - большая координата x, а $x_м$ - меньшая. Таким образом, длины отрезков равны 14; $2\sqrt{\frac{a}{2}}$ и 6.

III) Используя то, что против большего угла лежит бо́льшая сторона, получим два треугольника:





IV) Применим т. косинусов.

1) $14^2=6^2+2a-2\cdot 6\cdot 2\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\cos 120°$

$14^2=6^2+2a+12\sqrt{\frac{a}{2}}$

$2a+12\sqrt{\frac{a}{2}}-160=0$ $\qquad \sqrt{\frac{a}{2}}=t;\ t>0$ $\qquad t^2=\frac{a}{2} \Leftrightarrow a=2t^2$

$4t^2+12t-160=0$

$t^2+3t-40=0$

$D=9+160=13^2$

$t_1=\frac{-3+13}{2}=5 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{2}}=5$, т.е. $a=50$

t_2 - пост.

2) $2a=36+196+14\cdot 6$

$a=158$

Ответ: 50; 158

№5

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$$

I) D: $\begin{cases} x > -4 \\ \sqrt{x+7} - x > 0 \\ x > -7 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x > -4 \\ \frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases}$

II) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4 > 1 \\ \sqrt{x+7} - x > 1 \\ (x+4) \geq \sqrt{x+7} - x \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x+4 < 1 \\ 0 < \sqrt{x+7} - x < 1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7} - x \end{cases} \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4 > 1 \\ \sqrt{x+7} - x > 1 \\ 4x^2 + 15x + 9 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x+4 < 1 \\ 0 < \sqrt{x+7} - x < 1 \\ 4x^2 + 15x + 9 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -3 \\ x \geq -\frac{3}{4} \\ -3 < x < 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq -\frac{3}{4} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} -4 < x < -3 \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -3 \end{array}\right. \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \end{array}\right.$

Итого: $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

Ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$.

№2

$$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot (-\sin 10x) \cdot 10 + 2\sin x \cdot \cos x + 2 \cdot 5 \cdot \cos 5x \cdot (-\sin 5x) = 0$$

$$-2\sin 4x + 5\sin 10x + \sin 2x - 5\sin 10x = 0$$

$$\sin 2x = 4\sin 2x \cos 2x$$

$$\sin 2x (4\cos 2x - 1) = 0$$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ 4\cos 2x = 1 \end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l} 2x = \pi n \\ \cos 2x = \frac{1}{4} \end{array}\right.; n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} n \\ 2x = \pm \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi n \end{array}\right.$

$\left(\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{1}{4} \\ 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{4} \\ 2\cos^2 x = \frac{5}{4} \\ \cos^2 x = \frac{5}{8} \end{array}\right)$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} n \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + \pi n \end{array}\right.$

$$\begin{cases} n = 0 \\ \left[\begin{array}{l} g(x) = \sin 0^\circ \cdot \sin 0^\circ - \sin 0^\circ + \cos^2 0^\circ + 4 \\ g(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(2\arccos\frac{1}{4}\right) - \cos\left(5\arccos\frac{1}{4}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{5}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) + 4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 0 \\ \left[\begin{array}{l} g(x) = 5 \\ g(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(2\arccos\frac{1}{4}\right) - \cos\left(5\arccos\frac{1}{4}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{5}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) + 4 \end{array}\right. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

1) Тк семь „8" должны идти подряд, то кол-во возможных вариантов размещения их в число равно 11.

2) Рассмотрим случай, когда они в начале числа. Тогда все возможные варианты имеют вид $\overline{8888888abcdefghi}$...

Существует лишь 56 способов заменить часть $\overline{abcdefghi}$ на кусок, содержащий только „7" и „0", т.е. общее чисел будет равно ($56 \cdot 11 = 616$)

Ответ: 616

№7

Пронумеруем каждое число в каждом интервале от 1 до 45. Разность, кратную 45 будут давать числа только с одинаковыми номерами (для первого промежутка номер равен самому числу; для второго $(a-45)$ и т.д.). Общая формула номера будет выглядеть как $n = a - 45\cdot(k-1)$, где n - номер, a - число, k - номер промежутка. Тогда $a = n + 45(k-1)$

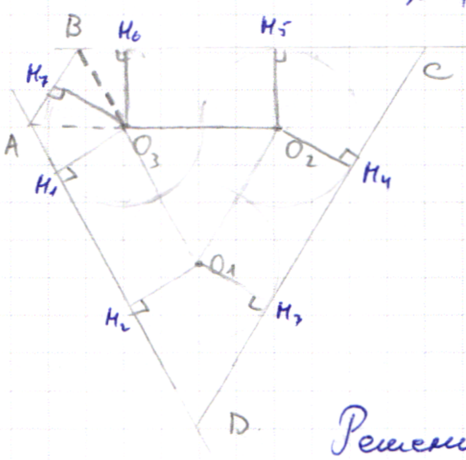
Для того, чтобы получить минимальную сумму, надо взять из первого промежутка числа с номерами от 36 до 31, из второго - от 30 до 25, из третьего - от 24 до 19, из четвертого - от 18 до 13, из пятого - от 12 до 7, а из шестого - от 6 до 1.

Тогда сумма равна $\Sigma = 45\cdot 6\cdot(5+4+3+2+1) + 45\cdot 5\cdot(7+8+9+10+11+6) +$

$+ 45\cdot 4\cdot(13+14+15+16+17+18) + 45\cdot 3(24+23+22+21+20+19) + 45\cdot 2(24+25+26+27+28+29) +$

$+ 45(35+34+33+32+31+30)$

№4



Дано

$r_1 = r_2 = r_3$

а) $AD + BC - AB - CD = 12$

в) $AO \cdot BO = 58$

Найти: r

$\angle AO_3B$

AB

Решение

а) 1) проведем радиусы в точки касания

2) Используя свойство касательных, получаем

$AH_1 = AH_7$; $BH_7 = BH_6$; $CH_5 = CH_4$; $DH_3 = DH_2$, т.е., используя

выражение из „Дано" и то, что $H_1H_2 = H_3H_4 = H_5H_6 = 2r$ (тк $O_3H_1H_2O_1$ - прямоугольник и т.д.)

$AH_1 + 2r + H_2D + BH_6 + 2r + CH_5 - AH_1 - BH_6 - DH_2 - 2r - CH_5 = 12$

$r = 6$

б Т.к. все окружности попарно касаются, имеют одинаковые радиусы и ω_3 касается трёх сторон, то $O_3 \in BO_1$; $O_3 \in AO_2$, т.е. $\angle BO_3A = \angle O_2O_3O_1 = 60°$, тк $\Delta O_1O_2O_3$ - равносторонний ($O_3O_1 = O_1O_2 = O_2O_3 = 2r$)

в) ΔBO_3A: $\angle BO_3A = 60°$; $BO_3 = O_3A$ (по той же причине, что и $O_3 \in BO_1$),

т.е. O_3H_7 - высота и медиана. Тогда $\begin{cases} AB = 2x \\ x^2 = 58 \end{cases}$ $AB = 2\sqrt{58}$

Ответ: 6; 60°; $2\sqrt{58}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-009

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

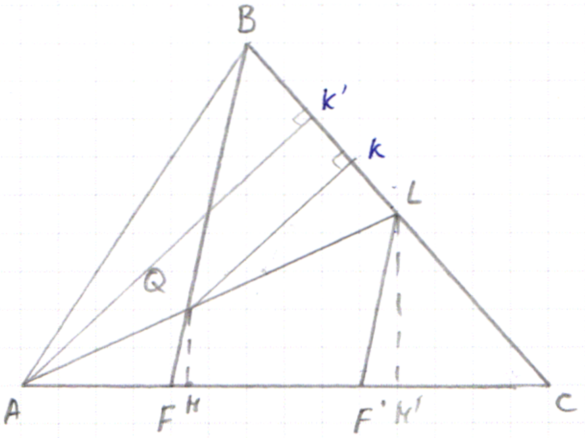
Дано:

$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$

$BF \cap AL = Q$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

$QH = 6$



Решение

1) $QH \perp AC$; $LH' \perp AC$; $BF \parallel LF'$

2) $\triangle AQF \sim \triangle ALF'$ ($QF \parallel LF'$ и $\angle A$ - общий), т.е. $\frac{QH}{LH'} = \frac{AF}{AF'}$

~~3) Пусть $\triangle BQL \sim \triangle BAC$ с $k = \sqrt{\frac{5}{12}}$ (т.к. $\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$)~~

3) $\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{BL \cdot QK}{BC \cdot AK'} = \frac{5}{12} \iff 12\, BL \cdot QK = 5\, BC \cdot AK'$

$BL = \frac{5}{12} BC \cdot \frac{AK'}{QK}$

4) По т. Фалеса

$\frac{BL}{LC} = \frac{FF'}{CF'} = \frac{5 \cdot BC \cdot K'A}{12 \cdot LC \cdot KQ}$

$\frac{LK}{KK'} = \frac{LQ}{AQ} \Rightarrow QL = AQ \cdot \frac{LK}{KK'}$

5) $\frac{AQ}{AL} = \frac{AF}{AF'} \iff \frac{AL}{AQ} = \frac{AF'}{AF} = \frac{AQ + QL}{AQ} = \frac{AF'}{AF} = 1 + \frac{LK \cdot AQ}{KK' \cdot AQ} = \frac{AF'}{AF}$

$1 + \frac{AQ(LC + KK')}{KK' \cdot AQ} = 1 + \frac{LC}{KK'} + \frac{AQ}{AQ} = 2 + \frac{LC}{KK'}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-009

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

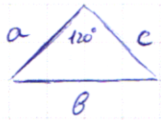
№1

$y=2x^2$

$y=98 \quad x=\pm 7 \qquad a=14$

$y=18 \quad x=\pm 3 \qquad b=6$

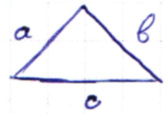
$y=d \quad x=\pm\sqrt{\frac{d}{2}} \qquad c=2\sqrt{\frac{d}{2}}$



$b^2 = a^2+c^2-2ac\cdot\cos 120°$

$36 = 196+2d^2+14\cdot 2\sqrt{\frac{d}{2}}$

нет корней



$c^2 = b^2+a^2-2ab\cdot\cos 120°$

$2d = 36+196+14\cdot 6$

$d = 60+98 = 158$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$+\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) = \sin\alpha\sin\beta$

№2

~~$f(x)=\sin 3x$~~

~~$f'(x)=\cos 3x\cdot 3$~~

$\sin 3x\cdot\sin 7x - 1+\cos^2 x+\cos^2 5x + 4$

$\frac{1}{2}((\cos 4x)-\cos 10x) + \cos^2 x+\cos^2 5x+3 =$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(-\sin 4x)\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot(-\sin 10x)\cdot 10 + 2(\sin x)\cdot\cos x + 2\cdot\cos 5x\cdot(-\sin 5x)\cdot 5 + 0 = 0$

$-2\sin 4x + 5\sin 10x - 2\sin x\cos x - 10\sin 10x + 0 = 0$

~~$-2\sin 4x - \sin 2x = -3$~~

~~$\begin{cases}\sin 4x = 1\\ \sin 2x = 1\end{cases} \quad \begin{cases}4x=\frac{\pi}{2}+2\pi n\\ 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases} \quad n\in Z,\ k\in Z \quad \begin{cases}4x=\frac{\pi}{2}+2\pi n\\ 4x=\pi+4\pi k\end{cases}$~~

~~$1+4k=\frac{1}{2}+2n$~~

~~$2+8k=1+2n$~~

~~$2n=1+8k$~~

~~$n=\frac{1}{2}+4k$~~

$-2\sin 4x - \sin 2x - 5\sin 10x + 0 = 0$

$2\sin 4x + \sin 2x + 5\sin 10x = 0$

$4\sin 2x\cdot\cos 2x + \sin 2x + 10\sin 5x\cos 5x = 0$

$\sin 2x(4\cos 2x+1) + 5\sin 10x = 0$

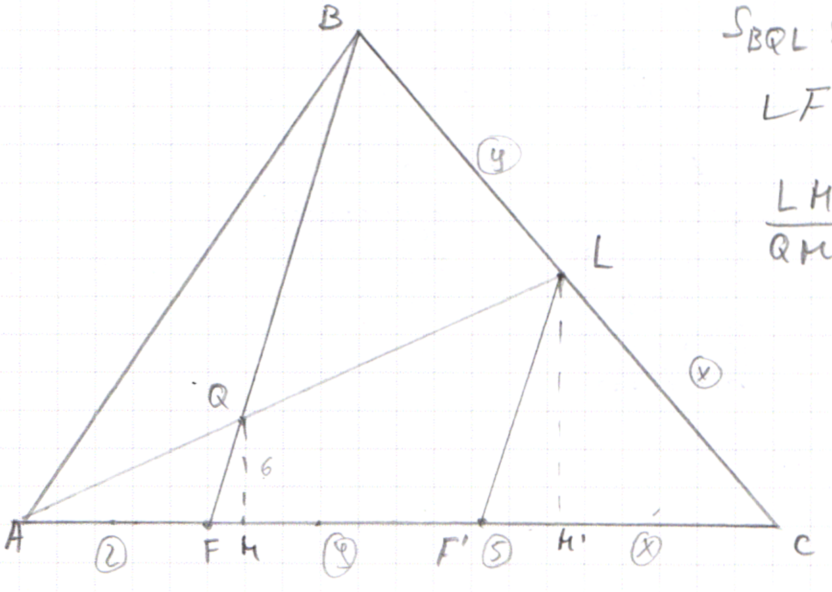
$\sin 2x(4\cos 2x+1) = -5\sin 10x$

$2\sin 4x + \sin 2x = -5\sin 10x$

$2\sin x\cos x(4\cdot\cos^2 x+4+1) = -5\sin 10x$

$2\sin x\cos x(4\cos^2 x+5) = -5\sin 10x$

$4\cos^2 x+5 = -\frac{5\sin 5x\cos 5x}{\sin x\cos x}$



$S_{BQL} : S_{BAC} = 5 : 12$

$LF' \parallel BF$

$\frac{LH'}{QH} = \frac{AF'}{AF}$

$x+y=5$

$\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

№35

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$D = 1 + 28 = 29$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0$

$\sqrt{x+7} \neq x$ $\qquad x+7 \neq x^2$ $\qquad x^2 - x - 7 \neq 0$

$x > -4$ $\qquad \sqrt{x+7} > x$

$\begin{cases} x \in (-4; 0) \\ x > -7 \end{cases}$ $\qquad x > 0$ $\qquad x + 7 > x^2$

$x > \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\cancel{x < \frac{1-\sqrt{29}}{2}}$

$\cancel{0 < \sqrt{x+7} - x < 1}$

$\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} = 0$ $\qquad x = -4$

$\begin{array}{r} 225 \\ -144 \\ \hline 81 \end{array}$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$x > -4$

$\sqrt{x+7} > x$

$\sqrt{x+7} \neq x+1$

$\left\{\begin{array}{l} x > -4 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ \cancel{x+7 \neq x^2+2x+1} \\ x^2 + x - 6 \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{array}\right.$

$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$

$\begin{cases} x+4 > 1 \\ \sqrt{x+7} - x > 1 \\ x + 4 \geq \sqrt{x+7} - x \end{cases}$ $\qquad \cancel{x > -3}$

$\begin{cases} 0 < x + 4 < 1 \\ 0 < \sqrt{x+7} - x < 1 \\ x + 4 \leq \sqrt{x+7} - x \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} 2x + 4 \geq \sqrt{x+7} \\ 4x^2 + 16 + 16x \geq x + 7 \\ 4x^2 + 15x + 9 \geq 0 \\ \\ 2x + 4 \leq \sqrt{x+7} \\ 4x^2 + 16 + 16x \leq x + 7 \\ 4x^2 + 15x + 9 \leq 0 \end{array}\right.$

$D = 225 - 144 = 9^2$

$x_1 = \frac{-15-9}{8} = -3$

$x_2 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}$

$\cancel{x > -3}$

$\cancel{x < -3}$

$\cancel{x > -\frac{3}{4}}$

$\cancel{-3 < x < 2}$

$\cancel{-4 < x \leq -3}$

$\cancel{x > 3}$

$\begin{cases} x > -3 \\ x \geq -\frac{3}{4} \\ -3 < x < 2 \\ x \leq -3;\ x \geq -\frac{3}{4} \end{cases}$ $\qquad -\frac{3}{4} \leq x < 2$

$\left\{\begin{array}{l} -4 < x < -3 \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -3 \end{array}\right. \\ -3 \leq x < 2 \end{array}\right.$ $\qquad —$

$\sqrt{x+7} > x + 1$

$\begin{cases} x \geq -7 \\ x < -1 \end{cases}$

$\cancel{x > -7}$

$x \geq -1$

$x + 7 > x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 6 < 0$

$\begin{cases} x = +2 \\ x = -3 \end{cases}$

70888888 abcdefghi

8

0 1 2 3 4 5 6 7 $\boxed{8\ 9}$

8

abcdefgh igklmnopq

1) 888888

```
0 000000000
0 000000007
0 000000077
0 000000777
0 000007777
00 0 0077777
00 0 0777777
00 0 7777777
00 7 7777777
0 7 7 7777777
777 7777777
```

$11 \cdot 11 = 121$

$11 + \cancel{10} + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

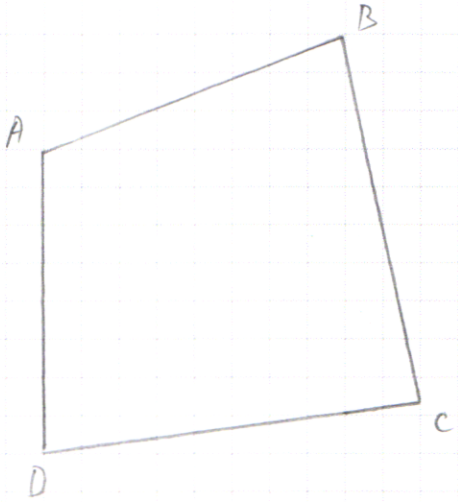
$5 \cdot 12 + 6 = 66$

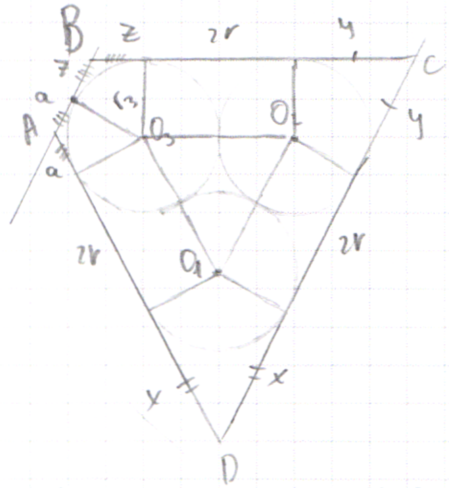
```
x 0000000000
 0000000070
 0000000770
 0000007770
 0000077770
 0000777770
 0007777770
 0077777770
 0777777770
 7777777770
```

```
x 0000000000
 0000000700
 0000007700
 000
```

$\begin{array}{r} 56 \\ \times 11 \\ \hline 56 \\ +56 \\ \hline 616 \end{array}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$a+x+2r+z+2r+y-a-z-x-2r-y=12$