МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-053

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое наименьшее значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-053

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Решение:

Для △ с углом в $120°$ по теореме cos верно следующее равенство (если стороны A, B, C): $C^2=A^2+B^2-2AB\cos 120° = A^2+B^2-2AB\cdot(-\frac{1}{2}) = A^2+B^2+AB$

Найдем абсциссы точек пересечения:

а) гр-ка $y=2x^2$ и гр-ка $y=98$

$2x^2=98 \Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=\pm 7 \Rightarrow y=2x^2$ отсекает отрезок ~~7-(-7)=14~~ равный $7-(-7)=14$

б) гр-ков $y=2x^2$ и $y=18$

$2x^2=18 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow$ парабола отсекает отрезок длиной $3-(-3)=6$

в) гр-ков $y=2x^2$ и $y=a$

$2x^2=a \Rightarrow x^2=\frac{a}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ и парабола отсекает отрезок, равный $\sqrt{\frac{a}{2}}-(-\sqrt{\frac{a}{2}})=2\sqrt{\frac{a}{2}}$

Возможны несколько случаев:

1) $A=14$, $B=6$, $C=2\sqrt{\frac{a}{2}}$

2) $A=14$, $B=2\sqrt{\frac{a}{2}}$, $C=6$

~~3) $A=6$, $B=14$, $C=2\sqrt{\frac{a}{2}}$~~

~~3) $A=2\sqrt{\frac{a}{2}}$, $B=14$, $C=6$~~

3) $A=6$, $B=2\sqrt{\frac{a}{2}}$, $C=14$

~~$A=2\sqrt{\frac{a}{2}}$, $B=6$, $C=14$~~

другие сл. не рассматриваются, т.к. выражение A^2+B^2+AB не зависит от расстановок A и B.

1) $4\cdot\frac{1}{2}\cdot a = 196+36+84$

$2a=216 \Rightarrow a=158$

2) $36=289+2a+28\sqrt{\frac{a}{2}}$

$2a+28\sqrt{\frac{a}{2}}+160=0$

$4\frac{a}{2}+28\sqrt{\frac{a}{2}}+160=0$

Отн. $\sqrt{\frac{a}{2}}$ $D<0$ -

~~2) 36=...~~

3) $196=36+4\frac{a}{2}+12\sqrt{\frac{a}{2}}$

$160=4\cdot\frac{a}{2}+12\sqrt{\frac{a}{2}}$

$4\cdot\frac{a}{2}+12\sqrt{\frac{a}{2}}-160=0$

$\frac{a}{2}+3\sqrt{\frac{a}{2}}-40=0$

$D=13^2$ (Отн. $\sqrt{\frac{a}{2}}$)

$\sqrt{\frac{a}{2}}=-8$ или $\sqrt{\frac{a}{2}}=5 \Rightarrow \frac{a}{2}=25 \Rightarrow a=50$

Итак, $a=\{158;50\}$

Ответ: $\{50;158\}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики)

№2

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

Решение:

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - (1 - \cos^2 x) + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\frac{1}{2}\cos 10x} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}\cos 10x} + 4$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + 4 = \frac{1}{2}(2\cos 3x \cos x) + 4$

$g(x) = \cos 3x \cos x + 4$

$g'(x) = 3\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$

$g'(x) = -(\sin 2x + 2\sin 3x \cos x) = -(\sin 2x + \sin 4x + \sin 2x)$

$g'(x) = -(2\sin 2x + 2\sin 2x \cos 2x)$

$g'(x) = -2\sin 2x(\cos 2x + 1)$

Найдем критические точки. $g'(x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ 2x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{array}\right.$

(2) серия содержится в (1)

$x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$ - критические точки

Т.к. функция периодическая на $[0; 2\pi]$, то исследуем ее на этом отрезке:

$g(0) = 5$; $g(2\pi) = (1)(1) + 4 = 5$; $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 4 = 4$

$(g(0) = 1 \cdot 1 + 4)$

$g(\pi) = (-1)(-1) + 4 = 5$; $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{9\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2} + 4 = (0)(0) + 4 = 4$

Итак, максимум на $[0; 2\pi]$ достигается в 0 и $2\pi, \pi$, а минимум в $\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ и они соотв. равны 5 и 4

Макс. и мин. на $[0; 2\pi]$ есть наиб. и наим. знач. функ.

Ответ: наибольшее значение: 5

наименьшее: 4

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

Решение:

Всего цифр 17, 7 из них занимают "8", остальные 10 "7" или "0", причем в первом разряде "0" недопустим.

Всего возможных расположений подряд идущих "8" 11: (1-7 разряд, 2-8, 3-9 … 10-16, 11-17)

Случай, где 1-7 разряд "8": 9 разрядов занимает какая угодно цифра ("7" или "0") и 1 разряд обязательно занимает ~~"7"~~ одна из цифр;

~~Выбора~~ Остальные случаи: "7" или "0" занимают 8 разрядов, первый обязательно "7" и оставшиеся одна из цифр.

Итак, всего комбинаций $2^9 + 10 \cdot 2^8 = 2^9(1+5) =$
$= 3 \cdot 2^{10} = 3 \cdot 1024 = 3000 + 60 + 12 = 3072$

Ответ: 3072

№4

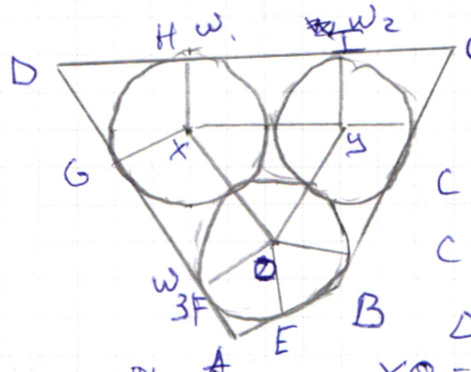
Дано: чет-к ABCD, попарно касающ. окр. радиуса R, $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ вписанные в чет-к (см. рис.)

Найти: а) R - ? $AD + BC - AB - CD = 12$

б) $\angle AOB$ - ? O - ц. окр. ω_3, $AD + BC - AB - CD = 12$

в) $AO \cdot BO = 58$; AB - ?

Решение:



а) Пусть радиусы окр. R, X, Y, O - центры $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ~~Нужна~~ H, G точки касания ω_1 с DC и DA, F и E точки касания ω_3 с прямыми DA и AB, I - т. касания ω_2 с DC

ΔXYO - равнобедренный, т.к. $XO = XY = OY = 2R$, $\angle YXO = 60°$, также $XG \perp DA$, $OF \perp DA \Rightarrow XO \parallel GF$, $\angle GXO = \angle XOF = 90°$, также $XH \perp DC$, $YI \perp DC \Rightarrow XY \parallel HI$, $\angle HXY = \angle IYX = 90°$ (при условии, что $HX = IY = R$, $XG = OF = R$),

$\angle GXH = 360° - \angle HXY - \angle GXO - \angle YXO = 120°$,

GH по теореме cos из $\Delta GHX = R\sqrt{3}$,

$\angle GDH = 360° - \angle DHX - \angle XGD - \angle GHX = 60° \Rightarrow$

Если $DH = DG$ (кас. из 1 точки), то $DH = HG = DG = R\sqrt{3}$.

Аналогично $\angle ICB = 120°$, и учитывая, что $\angle GDH = 120°$, $\angle DAB = \angle ABC = 120°$. $\angle FOE = 360° - \angle OFA - \angle OEA - \angle FAE =$ $= 60°$, аналогично $\angle EOB = 60°$, ~~так~~ ΔFOE - равност.

$FE = FO = OE = R \Rightarrow$ из ΔAEF: $AF^2 + AE^2 + AF \cdot AE = R^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3AF^2 = R^2 \Rightarrow AF = \frac{1}{\sqrt{3}}R \Rightarrow AD = DG + GF + FA =$ $= R\sqrt{3} + 2R + \frac{1}{\sqrt{3}}R = R(2\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})$. $AB = 2AE = \frac{2}{\sqrt{3}}R$,

$DC = DH + IC + HI = 2R + 2\sqrt{3}R = R(2 + 2\sqrt{3}) \Rightarrow$

$AD + BC - AB - CD = 2R(2 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{2}{\sqrt{3}}R - (2 + 2\sqrt{3})R =$ $= R(\cdot 2) = 12 \Rightarrow R = 6$. (проделовая ~~подо~~ рассужд., подобные ранним выходит, что $DA = BC$)

б) $\angle AOB$ – ?

$OE = 6$, ~~OA~~ $AE = \frac{1}{\sqrt{3}}6$. $AO =$ ~~$\frac{36}{3}$~~ $\sqrt{OE^2 + OA^2} = \sqrt{\frac{36}{3} + 36} =$ $= 6 \cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}$. $\sin\angle AOE = \frac{AE}{AO} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 12} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\angle AOE = 30° \Rightarrow \angle AOB = 60°$.

в) $AO \cdot BO = 58$. AB – ? $OA = BO$ $(OX^2 + AX^2 = XB^2 + OB^2)$

$AO = \sqrt{58}$. $AB^2 = 2AO^2 - 2AO^2\cos 60° \Rightarrow (\angle 60° = \angle AOB)$

$\Rightarrow AB^2 = 2 \cdot 58 - 2 \cdot 58 \cdot \frac{1}{2} = 58 \Rightarrow AB = \sqrt{58}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: а) 6 б) 60° в) $\sqrt{58}$

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+4>0 \end{cases}$

$\dfrac{\lg(x+4)}{\lg(\sqrt{x+7}-x)} \geq 1$; $\dfrac{\lg(x+4)-\lg(\sqrt{x+7}-x)}{\lg(\sqrt{x+7}-x)} \geq 0$

Метод рационализации:

$\dfrac{(x+4-\sqrt{x+7}+x)(\cancel{10-1})}{(\sqrt{x+7}-x-1)(\cancel{10-1})} \geq 0$

$\dfrac{2x+4-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}-x-1} \geq 0$

(Для $x>-4$: $\sqrt{x+7}>\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{x+7}-x>\sqrt{3}+4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x+7}-x-1>\sqrt{3}+3>0$)

$2x+4-\sqrt{x+7} \geq 0$

$\sqrt{x+7} \leq 2x+4$

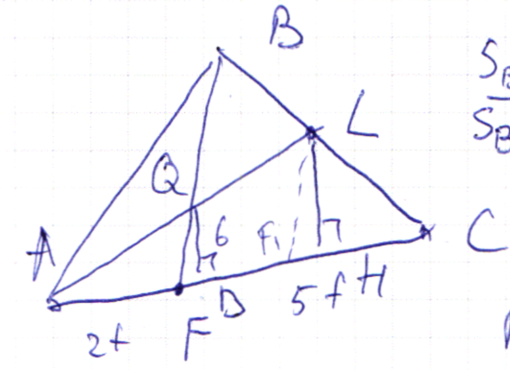
$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 2x+4 \geq 0 \\ x+7 \leq 4x^2+16+16x \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -7 \\ x \geq -2 \\ 4x^2+15x+8 \geq 0 \end{cases}$

$D = 225-16\cdot 8 = 225-128 = 97$

$\begin{cases} \cancel{x \leq \frac{-15-\sqrt{97}}{8}} \\ x \geq -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{-15+\sqrt{97}}{8} \\ x \geq -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \frac{-15+\sqrt{97}}{8} \\ \text{и уч. ОДЗ } x \neq 2 \end{cases}$

Ответ: $x \in \left(\frac{-15+\sqrt{97}}{8}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

№6



Дано: $\triangle ABC$, $F \in AC$, $L \in BC$, $AF : FC = 2:5$, $QD = \rho(Q; AC) = 6$; $LH - ?$ $(LH \perp AC)$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$;

Решение:

т. Менелая для $\triangle BFC$ и AL: $\frac{FQ}{QB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CA}{AF} = 1$

$\cancel{\triangle AQ}$ $\frac{7}{2} \cdot \frac{FQ}{QB} \cdot \frac{BL}{LC} = 1 \cancel{\Rightarrow \frac{FQ}{QB} = \frac{LC}{BL}}$

$LF_1 \parallel BF$ $(F_1 \in AC)$, тогда $\triangle AQF \sim \triangle ALF_1$

($\angle A$-общ. $\angle AQF = \angle ALH$ (паралл.), $\angle AFQ = \angle AHL$ (паралл.))

Также по III призн. $\triangle FQD \sim \triangle F_1LH$ $\frac{QD}{LH} = \frac{AQ}{QL}$

$\frac{QF}{LF_1} = \frac{QD}{LH} = \frac{AQ}{QL}$

$\cancel{\frac{S_{AQF}}{S_{ABC}} = \frac{2}{7}}$, $\cancel{\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}}$, $\cancel{\frac{S_{ALC}}{S_{ABC}} = \frac{LH}{h_{ABC}}}$

$\parallel$

$\frac{\cancel{AF}}{AC}$ $\frac{S_{AQF}}{S_{ABC}} = \frac{6 \cdot 2\cancel{f}}{h_{ABC} \cdot 7\cancel{f}} = \frac{12}{h \cdot 7}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-053

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

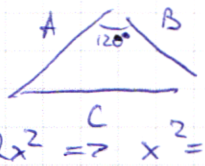
1

$y=2x^2$ $\quad a-?$

$y=98$ $\quad \Delta c\ \angle 120^\circ$

$y=18$

$y=a$



$C^2=A^2+B^2-2AB\cos 120^\circ=$

$=A^2+B^2+AB$

$98=2x^2 \Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=\pm 7$ $\quad l_1=14$

$18=2x^2 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$ $\quad l_2=6$

$a=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{a}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ $\quad l_3=2\sqrt{\frac{a}{2}}$

2) $l_2^2=l_1^2+l_3^2+l_1l_3$

$36=196+4\cdot\frac{a}{2}+28\sqrt{\frac{a}{2}}$

$0=160+4x^2+28x$

$x^2+7x+40=0$

$D=49-<0$

3) $l_3^2=l_1^2+l_2^2+l_1l_2$

$4\cdot\frac{a}{2}=196+36+60+24$

$2a=196+120$

$a=98+60$

$a=158$

$14 \times 14 = 56 + 14 = 196$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

1) $l_1^2=l_2^2+l_3^2+l_2l_3$

$196=36+4\cdot\frac{a}{2}+12\sqrt{\frac{a}{2}}$

$160=4\cdot\frac{a}{2}+12\sqrt{\frac{a}{2}}$

$a>0$

$4x^2+12x-160=0$

$x^2+3x-40=0$

$D=9+160=13^2$

$x=\frac{-3\pm 13}{2}$

$\left[\begin{array}{l}x=-8\\x=5\end{array}\right.$ $\quad \sqrt{\frac{a}{2}}=5$

$\frac{a}{2}=25$, $\boxed{a=50}$

2

$g(x)=$

$=\sin 3x\cdot\sin 7x-$

$-\sin^2x+\cos^2 5x+4$

$\sin\alpha\sin\beta=$

$\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

$\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$

$\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$g(x)=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 10x)-(1-\cos^2x)+\cos^2 5x+4$

$g(x)=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 10x+\cos^2x+\cos^2 5x+3$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos^2 5x-\sin^2x=(\cos 5x-\sin x)(\cos 5x+\sin x)$

$g(x)$ – функ. периодич. $\quad g'(x)=3\cos 3x\sin 7x+7\cos 7x\sin 3x-$

$-2\sin x\cos x+2\cos 5x(-\sin 5x)5$ $\quad -10\sin 10x$

$\cos^3\alpha=$

$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$g'(x)=3\sin 10x+4\cos 7x\sin 3x-\sin 2x-10\sin 10x=$

$=-7\sin 10x+4\cos 7x\sin 3x-\sin 2x=$

$=-7\sin 10x+4\cdot\frac{1}{2}(\sin 10x+\sin(-4x))-\sin 2x=$

$=-5\sin 10x-2\sin 4x-\sin 2x=0$

$-7\sin 3x\cos 7x-7\sin 7x\cos 3x+4\cos 7x\sin 3x-\sin 2x$

$5\sin 10x+2\sin 4x+\sin 2x=0$

$\ldots -3\sin 3x\cos 7x-7\sin 7x\cos 3x-\sin 2x$

$-3\sin 10x-4\sin 7x\cos 3x-\sin 2x$

$5\sin 10x+4\sin 2x\cos 2x+\sin 2x$

$5\sin 8x\cos 2x+5\sin 2x\cos 8x+4\sin 2x\cos 2x+\sin 2x$

$\sin 2x(5\cos 8x+1)+\cos 2x(5\sin 8x+4\sin 2x)=0$

$\sin 8x=3\sin 2x-4\sin^3 2x=2\alpha-4\alpha^3$ $\quad |\cos 2x|=\sqrt{1-\alpha^2}$

$(10\alpha-20\alpha^3)(\pm\sqrt{1-\alpha^2})+5\alpha$ $\quad 4\alpha\beta+\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

③ 17 чисел, 7 чисел − 8, остается 10

0, 7, 8

Вариантов подряд 8

1−7	$2^9 \cdot 1$
2−8	$1 \cdot 2^8 \cdot 1$
3−9	$1 \cdot 2^8$
4−10	$1 \cdot 2^8$
5−11	$1 \cdot 2^8$
6−12	$1 \cdot 2^8$
7−13	$1 \cdot 2^8$
8−14	$1 \cdot 2^8$
9−15	$1 \cdot 2^8$
10−16	$1 \cdot 2^8$
11−17	$1 \cdot 2^8 \cdot 1$

$2^8(10)+2^9=$

$=2^9 \cdot 5+2^9=6 \cdot 2^9=3 \cdot 2^{10}$

④ а) R − ?

$AD+BC-AB-CD=12$

$2AD$

$HE^2=R^2+R^2+R^2=3R^2$

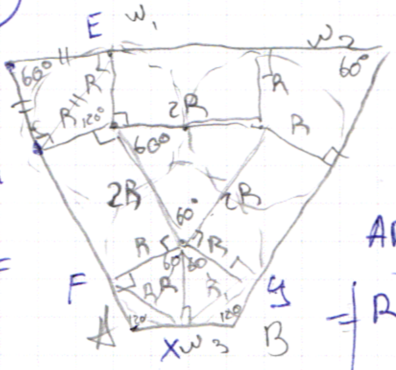
$HE=R\sqrt{3}$

$DH=R\sqrt{3}$

$R^2=FA^2+AX^2+$
$+FA \cdot AX=$
$=2FA^2+FA^2=$
$=3FA^2$

$FA=\frac{1}{\sqrt{3}}R$

$60^\circ+180^\circ=240^\circ$



$AD=2R+R\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}R=$

$=R\left(2+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$\parallel$
AD

$2R\left(2+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}R-(2+2\sqrt{3})=$

$=R\left(4+\cancel{2\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}-2-\cancel{2\sqrt{3}}\right)=$

$=2R=12$ $\boxed{R=6}$ а

$AB=2AX=2FA=\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}R=AB}$

$CD=2R+2DE=2R+2DH=$

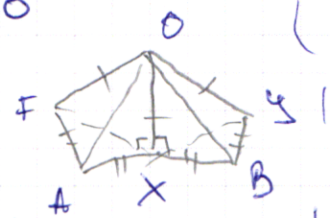
$=2R+2\sqrt{3}R=$

$\boxed{=R(2+2\sqrt{3})=CD}$

~~б) ∠AOB = 120°~~ б) ∠AOB − ?

~~б) AO·BO = 58~~

~~AB − ?~~



в) AO·BO = 58

AB − ?

$AO^2=58$

$AB=\sqrt{58}$

$58|2$
$29|$

$OX=6,\ AX=\frac{1}{\sqrt{3}}6$

$AO=\sqrt{\frac{36}{3}+36}=\sqrt{36\left(\frac{1}{3}+1\right)}=6 \cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\sin\angle AOX=\frac{AX}{AO}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\angle AOX=\frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOX = 30^\circ$

б) $\boxed{\angle AOB=60^\circ}$

$\frac{12}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{144}{3}}$ $144|3$ $48|$ $=\sqrt{48}$

② $(10\alpha-20\alpha^3)\beta+5\alpha(4\beta^3-3\beta)+4\alpha\beta+\alpha$

$\alpha=0$ ~~подходит~~ вып. усл.

Для $\alpha \neq 0$ $(10-20\alpha^2)\beta+5(4\beta^3-3\beta)+4\beta+1=0$

$-20\alpha^2\beta+10\beta+20\beta^3-15\beta+4\beta+1=0$

$20\beta^3-20\alpha^2\beta-\beta+1=0$

$\alpha^2=1-\beta^2$

$20\beta^3-20(1-\beta^2)\beta-\beta+1=0$

$20\beta^3$ ~~−20β+2~~ $-20\beta+20\beta^3-\beta+1=0$

$40\beta^3-21\beta+1=0$

~~$D=21^3-4 \cdot 40 \cdot 1 = 281$~~

$21 \times 21 = 441$, $441-160=281$

$40\beta^3-20\beta-\beta+1=0$

$20\beta(2\beta^2-1)+(\cancel{2}\beta+1)=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{\lg(x+4)}{\lg(\sqrt{x-7}-x)} \geq 1$

$\frac{\lg(x+4)-\lg(\sqrt{x-7}-x)}{\lg(\sqrt{x-7}-x)} \geq 0$

$\frac{(x+4-\sqrt{x-7}+x)}{\sqrt{x-7}-x} \geq 0$

$\frac{x+4-(\sqrt{x-7}-x)}{\sqrt{x-7}-x} \geq 0$

$\frac{x+4}{\sqrt{x-7}-x} \geq 1$

$\sqrt{x-7}-x>0 \Rightarrow$

$x+4 \geq \sqrt{x-7}-x$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$x+4>0$

$4x^2+16+16x \geq x+7$

$4x^2+15x+8 \geq 0$

$D=225-16\cdot 8=97$

$x=\frac{-15\pm\sqrt{97}}{8}$

$x>-4$

$x+7>3$

$\sqrt{x+7}>\sqrt{3}$

$x>-4$

$\sqrt{x+7}-x>\sqrt{3}+4$

$\frac{-15+\sqrt{97}}{8}>-2$

$-2-\frac{\sqrt{97}+15}{8}=$

$=\frac{-16-\sqrt{97}+15}{8}=\frac{-1-\sqrt{97}}{8}$

$-2+\frac{\sqrt{97}+15}{8}=$

$=\frac{-16+\sqrt{97}+15}{8}>0$

$16\cdot 8=128$, $225-128=97$

$\log_{t-(t^2-7)}(t^2-7+4)\geq 1$

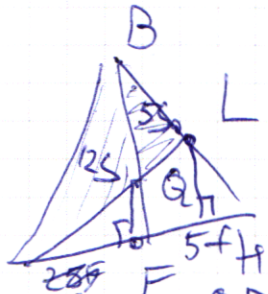
$\log_{-t^2+t+7}(t^2-3)\geq 1$

$\frac{\lg(t^2-3)-\lg(-t^2+t+7)}{\lg(-t^2+t+7)}$

$\frac{(t^2-3+t^2-t-7)}{(-t^2+t+7-1)}\geq 0$

$\frac{2t^2-t-10}{-t^2+t+6}$

-2-



LH-?

QD=6

$D=1+4\cdot 7=29$

$x=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$-4<x<\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x^2-3x-8=0$

$D=1+24=25$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\frac{\lg(x+4)}{\lg|\sqrt{x+7}-x|} - 1 \geq 0$

$\frac{\lg(x+4) - \lg(\sqrt{x+7}-x)}{\lg(\sqrt{x+7}-x)} \geq 0$

м. р. $\frac{(x+4-\sqrt{x+7}+x)(10-1)}{(\sqrt{x+7}-x-1)(10-1)} \geq 0$

$\frac{2x+4-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}-x-1} \geq 0$

$\sqrt{x+7} = t \;/\; 2(t^2-7) = 2x$

$\frac{2t^2-14-t}{t-t^2+7} \geq 0$ $\quad \frac{2t^2-t-14}{-t^2+t+7} \geq 0$

$\frac{2t^2-t-14}{t^2-t-7} \leq 0$

$D = 1+4\cdot 7 = 1+28 = 29$ $\quad t = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$D = 1+2\cdot 4\cdot 14 = 113$ $\quad t = \frac{1 \pm \sqrt{113}}{4}$

$\cancel{\sqrt{x+7} = \frac{1+\sqrt{29}}{2}}$

$\begin{cases} \sqrt{x-7}-x > 0 \\ \sqrt{x-7}-x \neq 1 \\ x > -3 \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x-7} > x \\ \sqrt{x-7} \neq x+1 \\ x > -3 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x-7 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x-7 > x^2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad x > -3$

$x^2-x+7 < 0$

$D = 1-4\cdot 7$

$x > -3$

$x-7 = x^2+2x+1$

x^2+x+6

$D = 1-6\cdot 4$

$14 \cdot 8 = 112$

$1+8\cdot 14$

113

$t = \frac{1 \pm \sqrt{113}}{4}$

$28 \cdot 4 = 112$

$\cancel{D = 1+4\cdot 14\cdot 2 > 0}$

$D = 1+2\cdot 4\cdot 14 =$
$= 1+112 = 229$

$17 \cdot 17 = 119$

$\cancel{t^2-t-7}$

$x > -3$

$29 \cdot 4 = 116$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} - \frac{1-\sqrt{113}}{4} =$

$= \frac{2-2\sqrt{29}-1+\sqrt{113}}{4} =$

$= \frac{1-\sqrt{116}+\sqrt{113}}{4}$

$\frac{1}{2}\sqrt{29} = \sqrt{\frac{29}{4}}$

$\sqrt{\frac{113}{16}}$

$\frac{1+\sqrt{29}}{2} - \frac{1+\sqrt{113}}{4} =$

$= \frac{2+2\sqrt{29}-1-\sqrt{113}}{4} =$

$= \frac{1+\sqrt{116}-\sqrt{113}}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-053

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = 5$

$g'(x) = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\sin x \cos x + 2\cos 5x(-\sin 5x)\cdot 5$

$g'(x) = 3\sin 10x + 4\sin 3x \cos 7x - \sin 2x - 10\sin 5x \cos 5x$

$g'(x) = -2\sin 10x + 4\sin 3x\cos 7x - \sin 2x$ $\quad -5\sin 10x$

$g'(x) = -2\sin 10x + 4\cdot\frac{1}{2}(\sin 10x - \sin 4x) - \sin 2x$

$g'(x) = -2\sin 10x + 2\sin 10x - 2\sin 4x - \sin 2x$

$g'(x) = -4\sin 2x\cos 2x - \sin 2x$

$-\sin 2x(4\cos 2x + 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \cos 2x = -\frac{1}{4}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}2x = \pi n, n\in\mathbb{Z}\\ 2x = \pm\arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2}n, n\in\mathbb{Z}\\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4}) + \pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

$[0; 2\pi]$

$\quad 5 \quad 5$

min

$\frac{\pi}{2}: (-1)(1) - 1 + 0 + 4 = 2$

$\pi: 0 - 0 + 1 + 4 = 5$ max

$\frac{3\pi}{2}: (1)(1) - 1 + 0 + 4 = 4$

$-\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4}) + \pi$ ⓐ

$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\arcsin(-\frac{1}{4})$

$\frac{1}{2}\arcsin(-\frac{1}{4}) - \frac{\pi}{4} + \pi$

$\frac{1}{2}(\arcsin(-\frac{1}{4}) - \frac{\pi}{2}) + \pi$

$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - (1 - \cos^2 x) + \cos^2 5x + 4 =$

$\cos 2x = 2\cos x^2 - 1$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

ⓐ $\frac{1}{2}(\cos(-2\arccos(-\frac{1}{4}) + \pi)$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cancel{\cos 10x} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cancel{\cos 10x} + 4 =$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + 4$

а) $\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4})$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

а) $\frac{1}{2}(\cos(2\arccos(-\frac{1}{4})) + \cos(\arccos(-\frac{1}{4}))) + 4 =$

$= ? = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x) + 4$

$\frac{1}{2}(2y^2 + y - 1) + 4$

$-\frac{1}{2}\arccos + \pi$

а) $\cos 2x = \cos(\arccos(-\frac{1}{4})) = -\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}(2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1) + 4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8}) + 4 =$

$= \frac{1}{2}(-\frac{9}{8}) + 4 = -\frac{9}{16} + \frac{64}{16} = \frac{55}{16} = 3\frac{7}{16}$

$\cos 2x =$

$= \cos(-\arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi)) = -\frac{1}{4}$

$= 3\frac{7}{16}$

б) $-\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4})$

$\cos 2x = \cos(-\arccos(-\frac{1}{4})) = -\frac{1}{4}$

$\ldots = 3\frac{7}{16}$

в) $\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4}) + \pi$

$\cos 2x = \cos(\arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi) = 3\frac{7}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\right)$

$g'(x) = -3\sin 3x\cos x + (-\sin x)\cos 3x$

$-(3\sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x) =$

$= -(\sin 2x + 2\sin 3x\cos x)$

$2\sin 3x\cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$

$-(\sin 2x + \sin 4x + \sin 2x) =$

$= -(2\sin 2x + 2\sin 2x\cos 2x)$