

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

11-026

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{5}$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

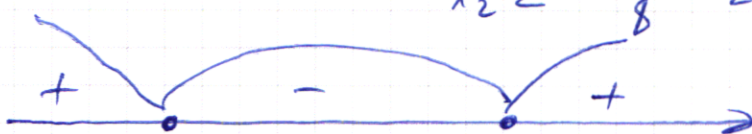
$$4x^2 + 20x + 25 \geq (\sqrt{x+3})^2 \cdot x + 3$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

$$D = 19^2 - 16 \cdot 22 = 9 = 3^2$$

$$x_1 = \frac{-19+3}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{8} = \frac{-22}{8}$$



$$x \in \left(-\infty; -\frac{22}{8}\right) \cup \left(-2; +\infty\right)$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1.$$

РД.3

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x \geq 0 \\ x+5 > \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log(\sqrt{x+3}-x)$$

$$(x+5) \geq \sqrt{x+3} \cdot -x \quad x^2+3x-$$

$$\begin{aligned} x+5 &\geq \sqrt{x+3} - x \\ (2x+5) &\geq \sqrt{x+3} \end{aligned}$$

$$4x^2 + 20x + 25 \geq x+3$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0.$$

$$D = 19^2 - 16 \cdot 22 =$$

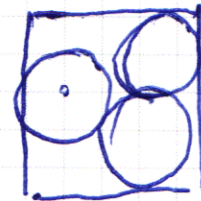
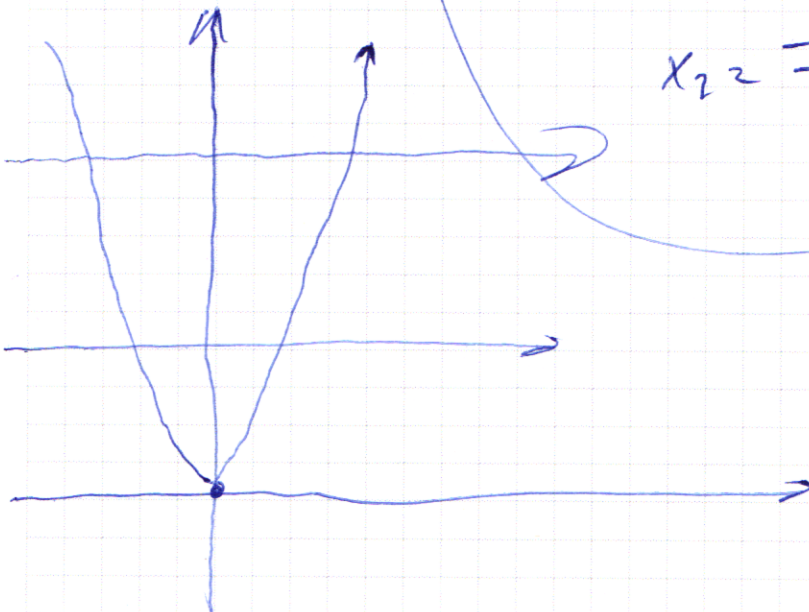
$$= 361 - 352 = 9 = 3^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm 3}{16} = -1$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{16} = -\frac{22}{16}.$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ + 18 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \times 20 \\ \times 22 \\ \hline 320 \\ + 32 \\ \hline 352 \end{array}$$



$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$1 - 35$$

$$2x+1+5 \quad 25$$

$$36 \quad 70$$

$$71 \quad 105$$

$$106 - 140 \quad 140$$

$$141 - 175$$

$$c^2 = 169^2 + 64^2 - 2 \cdot 169 \cdot 64 \cos 120^\circ =$$
$$=$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}+x)$$

$$(x+5) \geq \sqrt{x+3}+x$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \text{ОДЗ} \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \\ x+5 \geq 1 \end{cases} \quad 1$$

$$x \geq -4 \quad x^2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &> x \\ x+3 &> x^2 \\ -x^2 + x + 3 &> 0 \\ x^2 - x - 3 &< 0 \end{aligned}$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x & x & y & x & \sqrt{ } \end{matrix}$$

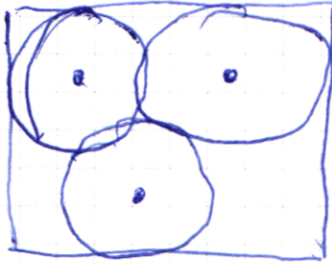
$$\triangle AB \sim \triangle BQS$$

$$BQA$$

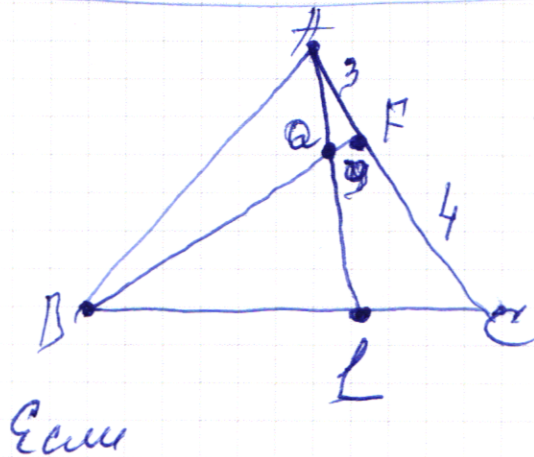
$$0$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$$



п



$$S = \frac{1}{16}$$

Если



003

$$\sqrt{x+3} - x > 0$$

$$x+3 > x^2$$

$$[-3; 2]$$

$$\sqrt{x+3} - x > 0$$

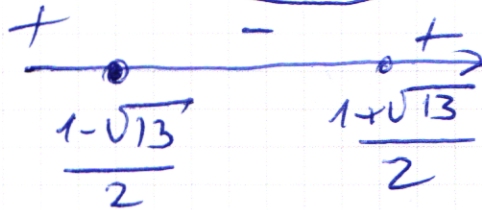
$$x+3 > x^2$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

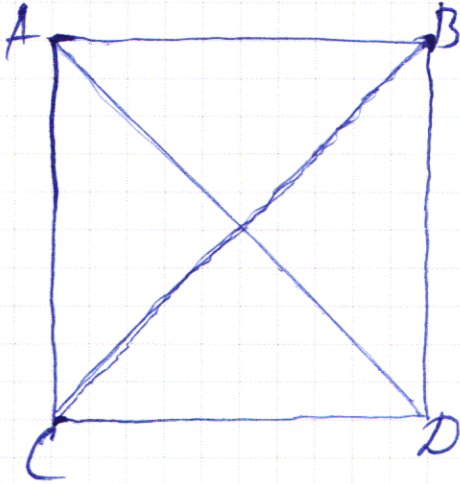
$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)