МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 11 – 004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1;35]$, $[36;70]$, $[71;105]$, $[106;140]$, $[141;175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-СС4

ШИФР

(заполняется секретарём)

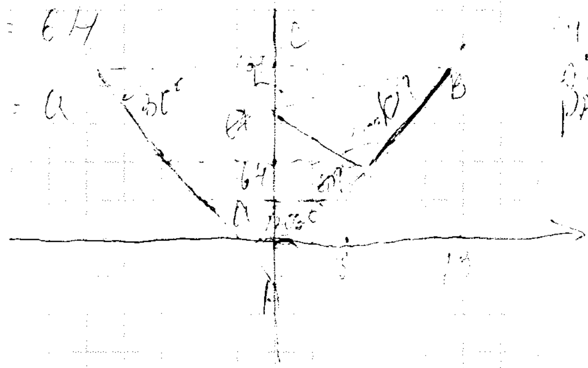
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y = x^2$ при $x = 13$ $y = x^2$ пересекает $y = 169$ в точке $(13; 169)$ $(-13; 169)$

$y = 169$ при $x = 8$ $y = x^2$ пересекает $y = 64$ в точке $(8; 64)$ $(-8; 64)$

$y = 64$

$y = a$



т.к. Треугольник образуемый ... с отрезком $y = a$ равносторонний.

$\cos 30° = \frac{13}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AB = \frac{26}{\sqrt{3}}$

$\cos 60° = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$

$AB = \frac{2AC}{1} = \frac{52}{\sqrt{3}}$

$AC = \frac{AB}{2} = \frac{13}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7$

$150 \mid 17$

$119 \mid 76{,}116$

4. $\log_{\sqrt{x+5}-x}(x+5) \geq 1$ ОДЗ $x > -5$

$\sqrt{x+5} > x$

$\log_{\sqrt{x+5}-x}(x+5) - 1 \geq 0$

$x > 0$

$\sqrt{x+5} \neq x+1$

по методу рационализации:

$(\sqrt{x+5} - x - 1)(x+5 - \sqrt{x+5} + x) \geq 0$

4 рас ...

$x \in (1, +\infty)$ $5x+5 \times \sqrt{x+5} \geq 0$

$\sqrt{x+5} \geq x+1$

1) $x+1 \geq 0$ ...

$x+5 \geq x^2+2x+1$

$x^2+x-2 \leq 0$

$x_1 \cdot x_2 = -1$

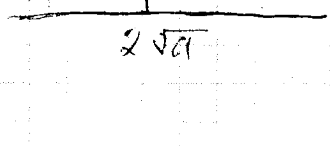
$x_1 + x_2 = -2$

$x = 5$

$x = 1$

$x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

$x \in (-\infty, \ldots) \cup (\ldots, +\infty)$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \sin(7x-2x))(\sin(7x+2x)) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= (\sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x)(\sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x) -$

$- \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= (\sin 7x \cos 2x)^2 + \cancel{\sin 2x \sin 7x \cos 7x \cos 2x} -$

$- (\sin 2x \cos 7x)^2 - \cos 2x \sin 7x \cdot \sin 2x \cos 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x =$

$\frac{1}{2} \cdot (\cos(5x - 9x) - \cos(5x+9x)) = \frac{1}{2}(\cos(-4x) - \cos 14x) -$

$- \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x - \sin^2 7x -$

$- \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 7x) - \sin^2 7x -$

$- \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2} + \sin^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) - \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3 =$

$= \cos^2 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3 =$

$\cos^2 2x - \cos^2 x - 4 =$

$= (2\cos^2 x - 1)^2 - \cos^2 x - 4 =$

$= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - 4 - \cos^2 x =$

$= 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$

$\cos^2 x = t \qquad t \in [0;1] \quad 8t - 5 = 0$

$g(x) = 4t^2 - 5t - 3$

$g'(x) = 8t - 5$

$f'(x)$ $-$ $+$, 0 $\frac{5}{8}$ 1, $f(x)$, min

$g(0) = -3$ наиб.

$g(1) = 4 - 5 - 3 = -4$

$g\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{4 \cdot 25}{64} - \frac{25}{8} - 3 = \frac{25}{16} - \frac{50}{16} - \frac{48}{16} = \frac{-25-48}{16} = -\frac{73}{16}$ наим.

$\square$ черновик $\quad \square$ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

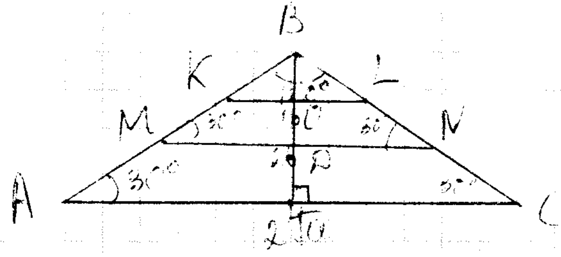
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

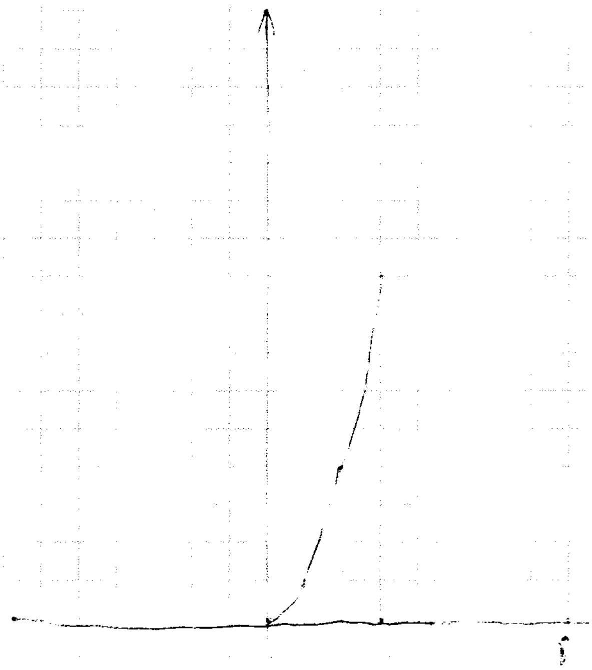
14-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\triangle BKL \sim \triangle BMN \sim \triangle ABC$

$\sin 60° = \frac{OL}{BL} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{8}{BL} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad BL = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$BN = \frac{32}{\sqrt{3}}$

$BL : BN = \frac{1}{2} \Rightarrow BN : BC = \frac{1}{2}$

$\frac{32}{\sqrt{3}} : BC = \frac{1}{2}$

$BC = \frac{64}{\sqrt{3}}$

$BO = \sqrt{BL^2 - OL^2} = \sqrt{\frac{256}{3} - 64} = \sqrt{\frac{256-192}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$

$BP = \sqrt{\frac{1024}{3} - 256} = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow BP = \frac{32}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{a} = \sqrt{BC^2 - BN^2}$ $\quad \sqrt{a} = \sqrt{\frac{(64)^2}{3} - \frac{(32)^2}{3}} = \sqrt{\frac{(64-32)(64+32)}{3}}$

$= \sqrt{\frac{32 \cdot 96}{3}}$

$a = \frac{32 \cdot 96}{3} = (32)^2 = 2^{10} = 1024$

2. $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2} \cdot (\cos(5x - 9x) - \cos(5x + 9x)) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} + \sin^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \cos^2 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3 = \cos^2 2x - \cos^2 x - 4 =$

$= (2\cos^2 x - 1)^2 - \cos^2 x - 4 = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 -$

$- \cos^2 x - 4 = 4\cos^4 x - \cancel{4}5\cos^2 x - 3$

$\cos^2 x = t \qquad t \in [0; 1]$

$g(x) = 4t^2 - 5t - 3$

$g'(x) = 8t - 5$

$$\begin{array}{ccc} - & & + \quad g'(x) \\ \hline & \frac{5}{8} & \quad g(x) \\ \searrow & & \nearrow \end{array}$$

$x_{min} = \frac{5}{8}$.

$g(0) = -3$

$g(1) = -4$

$g\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{4 \cdot 25}{64} - \frac{25}{8} - 3 \qquad \frac{25}{16} - \frac{2 \cdot 25 - 3 \cdot 16}{16} = \frac{-25 - 48}{16}$

$= -\frac{73}{16}$.

$4t^2 - 5t - 3 \vee 0$

$D = 25 + 16 \cdot 3 = 25 + 48 =$

$= 73$.

$\left(t - \frac{+5 + \sqrt{73}}{8}\right)\left(t - \frac{5 - \sqrt{73}}{8}\right) \vee 0$

$t \in [0; 1]$

$g(x)_{max} = -3$

$g(x)_{min} = -\frac{73}{16}$

Ответ: -3; $-\frac{73}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \sin 5x(\sin(5x+4x)) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \sin 5x \cdot (\sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x) - (\sin(5x+2x))^2 - \cos^2 x - 3 =$

$= \sin^2 5x \cdot \cos 4x + \sin 5x \cdot \cos 5x \cdot \sin 4x -$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - (1 - \sin^2 x) - 3 =$

$= \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - 1 + \sin^2 x - 3 =$

$= \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x + \sin^2 x - 4$

$g'(x) = (\sin 5x \cdot \sin 9x)' - (\sin^2 7x)' + (\sin^2 x)' =$

$= 5\cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x - 2\cos 7x \cdot 7 + 2\cos x =$

$= 5\cos 5x \sin 9x + 9\cos 9x \sin 5x - 14\cos 7x + 2\cos x$

все ... в интервале - 5 вариантов

$\sin 5x \cdot \sin 9x = \sin 5x(\sin(5x+4x)) = (\sin 5x)x$

$\sin 5x(\sin 5x(1-2\sin^2 2x) +$

$+ \cos 5x \cdot 2\sin 2x \cos 2x$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ $\quad$ ОДЗ: $x > 0$

I $\begin{cases} 0 < \sqrt{x+3} - x < 1 \\ (x+5) \leq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$ $\quad$ II $\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ (x+5) \geq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$

$x < \sqrt{x+3} < 1+x$ $\quad$ $\sqrt{x+3} > 1+x$

$\begin{cases} x^2 < x+3 < 1+2x+x^2 \\ \ldots \end{cases}$ $\quad$ $x+3 > 1+2x+x^2$

$x^2 + x - 2 < 0$

$x \in (-2; 1)$

$3 \pm \sqrt{13}$ $\quad$ $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ $\quad$ $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{?}{?}; +\infty)$

$x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ $\quad$ $x \in (-\frac{?}{3}; 1)$

$x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ $\quad$ $x > ?$

$2x+5 \leq \sqrt{x+3}$ $\quad$ $x \in (?; 1)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

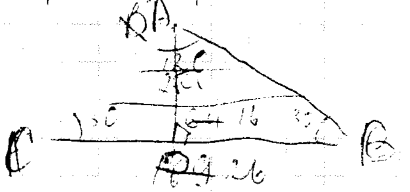
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 1.

Функция $y=x^2$ пересекает функцию $y=169$ в точках $(13;169)$; $(-13;169)$, функцию $y=64$ $(8;64)$; $(-8;64)$; $y=a$ $(-\sqrt{a};a)$; $(\sqrt{a};a)$.

Предположим, что в ~~[illegible]~~ треугольнике, образованном данными отрезками основание — отрезок, образованный при пересечении $y=x^2$ и $y=169$, тогда.

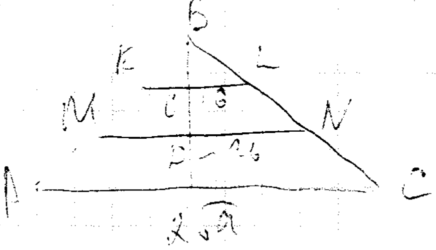


$\cos 30^\circ = \frac{13}{AB}$

$AB = \frac{26}{\sqrt{3}}$

$\cos 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$.

$AD = \frac{26\cdot 3}{\sqrt{3}} \approx 46$, значит вершина $\triangle ABC$ лежит выше $y=64$ => этот вариант нам не подходит, и основанием $\triangle ABC$ должен быть отрезок образующийся при пересечении $y=a$ и $y=x^2$, тогда



$\triangle BKL \sim \triangle BMN \sim \triangle ABC$

$\sin 60^\circ = \frac{OL}{BL} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BL = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$BN = \frac{32}{\sqrt{3}}$ $\left(\sin 60^\circ = \frac{DN}{BN}\right)$

$BL : BN = \frac{1}{2} \Rightarrow BN : BC = \frac{1}{2}$. $\frac{32}{\sqrt{3}} : BC = \frac{1}{2}$.

$BC = \frac{64}{\sqrt{3}}$ $BO = \sqrt{BL^2 - OL^2} = \sqrt{\frac{256}{3} - 64} = \frac{8}{\sqrt{3}}$

$BD = \sqrt{\frac{1024}{3} - 256} = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow BH = \frac{32}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{a} = \sqrt{BC^2 - BH^2}$ $a = \sqrt{\frac{64^2}{3} - \frac{32^2}{3}} = \frac{(64-32)(64+32)}{3} =$

$= \sqrt{\frac{32\cdot 96}{3}} = 1024$.

Ответ: 1024.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

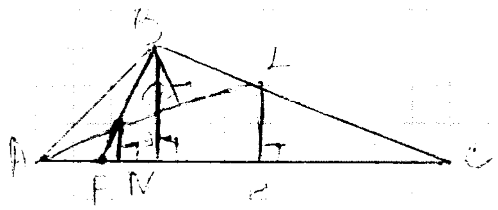
$4x^2 + 20x + 25 = x + 3$

$7 \cdot 38 - 362 = 9$

$x = \frac{-19 \pm 3}{7}$

$x \in (-2; -\frac{2}{7})$

Отв: $(0; 7)$.



$\frac{S_{BCL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

LH - высота в $\triangle ALC$

$AC = 3x + 4x = 7x$

QN - высота $\triangle ACF$

$\frac{S_{BCL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$, $\frac{S_{ACF}}{S_{ALC}} = \frac{1}{16}$ ($\angle BCL = \angle ACF$, $\angle CA$, $\angle BCA$)

$\begin{cases} S_{ACF} = \frac{1}{2} 3x \cdot QN \\ S_{ALC} = \frac{1}{2} 4x \cdot LH \end{cases}$

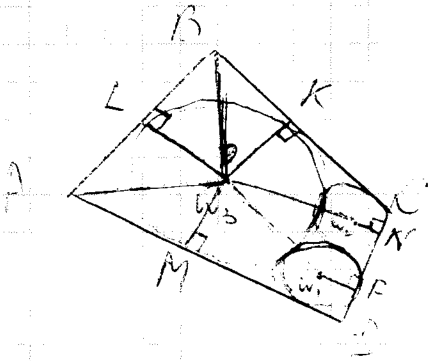
$\frac{3\,QN}{4\,LH} = \frac{1}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$AD + BC = AB + CD = 10$

~~$BK = KC =$~~

$BC^2 = BA^2 \quad AD^2 = DC^2$

$BA^2 = AD^2 \quad BC^2 = DC^2$

$(BC - BA)(BC + BA) = 0$

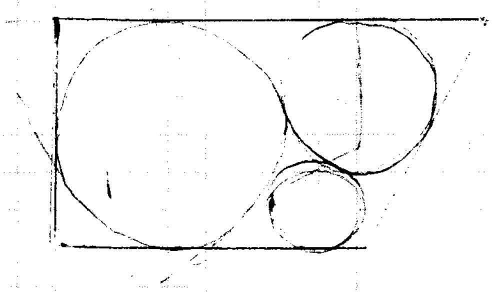
$(BA - AD)(BA + AD) = 0$

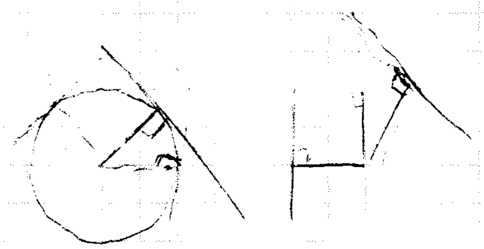
$(AD - DC)(AD + DC) = 0$

$(BC - DC)(BC + DC) = 0$

$BC - BA = 0$

$BA - AD = 0$





$\log_{\sqrt{x+3} - x}(x+5) \geq 1$

I $\begin{cases} 0 < \sqrt{x+3} - x < 1 \\ (x+5) \leq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \\ (x+5) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$

решу первое неравенство системы

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$\sqrt{x+3} > x$ $\quad (x > 0)$

$x + 3 > x^2$

$x^2 - x - 3 < 0$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

решу 2-ое

$\sqrt{x+3} - x < 1$

$\sqrt{x+3} < x + 1$ $\quad (x > -1)$

$x + 3 < x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 2 > 0$

$x \in (-\infty; -2) \cup (1; \ldots$

$\begin{cases} x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ x \in \left(\cancel{\frac{1-\sqrt{13}}{2}}; \cancel{\frac{1+\sqrt{13}}{2}}\right) \\ x \in (\ldots) \end{cases}$

решу 3-ье неравенство сист.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) > 1$

ОДЗ: $\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>0\\ \sqrt{x+3}-x\neq 1\\ (x+5)>0\end{cases}$

$\begin{cases}x\neq -2\\ x\neq 1\\ x\in\left(0;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\end{cases}$

I $\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>0\\ \sqrt{x+3}-x<1\\ (x+5)\leq\sqrt{x+3}-x\end{cases}$

Решу первое неравенство системы

$\sqrt{x+3}-x>0$ $x>0$ $\begin{cases}x<0\\ x\geq -3\end{cases}$

$\sqrt{x+3}>x$

$x+3>x^2$

$x^2-x-3<0$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

решу 2-ое

$\sqrt{x+3}<1+x$

$x+3<x^2+2x+1$

$x^2+x-2>0$

$x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$

$\begin{cases}x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\\ x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\\ x\in(0;+\infty)\end{cases}$

Решу 3ье неравенство системы

$4x^2+20x+25\geq x+3$

$4x^2+19x+22\leq 0$

$x\in\left(-2;-\frac{11}{8}\right)$

$\begin{cases}x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\\ x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\\ x\in(0;+\infty)\\ x\in\left(-2;-\frac{11}{8}\right)\end{cases}$

$\varnothing$

$\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>1\\ (x+5)>\sqrt{x+3}-x\end{cases}$

Решу первое неравенство сис:

$\sqrt{x+3}>1+x$

$x^2+x-2<2$

$x\in(-2;1)$

решу 2-ое:

$x\in(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{11}{8};+\infty\right)$

$\begin{cases}x\in\left(-\frac{11}{8};1\right)\\ x\in(0;+\infty)\end{cases}$

$\boxed{x\in(0;\cancel{1})}$

Ответ $x\in(0;1)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

4. Разность на равна 35; 70; 105; 140; 175.
Т.к. нужно минимальная сумма, то 1; 2; 3; 4; 5 – из первого промежутка, 41; 42; 43; 44; 45 из второго.
Пусть k – это первое число в промежутке, n – номер промежутка. Тогда в 4-первым последовательно числа при $k+6(n-1)$, таким образом 81; 82; 83; 84; 85 – из третьего, 121; 122; 123; 124; 125 из четвертого, 161; 162; 163; 164; 165 из 5-ого промежутка.

$\underbrace{1+2+3+4+5}_{15}+\underbrace{41+42+43+44+45}_{400+15}+\ldots+\underbrace{121+122+123+124+125}_{600+15}+\underbrace{161+162+163+164+165}_{800+15}=1000+800+60=$

$=1860$

Спасибо вам.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-004

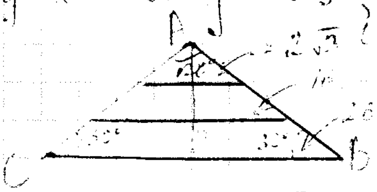
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Функция $y=x^2$ пересекает функцию $y=64$ в точк. $(8; 64)$, $(-8; 64)$, функцию $y=64$ в точк. $(-8; 64)$, $(8; 64)$, функцию $y=a$ в $(\sqrt{a}; a)$, $(-\sqrt{a}; a)$.

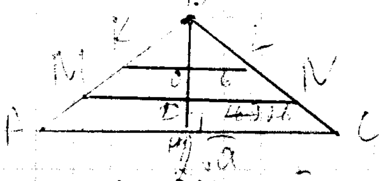
Представим это в треугольнике, обозначим длины отрезков основание - отрезок, образованный пересечением $y=x^2$ и $y=64$. Тогда $\cos 30° = \frac{12}{AB} \Rightarrow AB = \frac{24}{\sqrt{3}}$



$\cos 60° = \frac{AT}{AB} = \frac{1}{2}$

$AT = \frac{12}{\sqrt{3}} = 96,116$, значит вершина

(Очевидно, что $\triangle ABC$ - равнобедренный) $\triangle ABC$ лежит выше $y=64 \Rightarrow$ это вариант нам не подходит, значит у треугольника длина основания меньше 16, тогда основание будет образованным при пересечении $y=a$ и $y=x^2$, тогда



$\triangle BKL \sim \triangle BMN \sim \triangle ABC$

$\sin 60° = \frac{OL}{BL} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BL = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$\sin 60° = \frac{ON}{BN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $BN = \frac{32}{\sqrt{3}}$ $BL : BN = \frac{1}{2} \Rightarrow BN : BC = \frac{1}{2}$ $\frac{32}{\sqrt{3}} : BC = \frac{1}{2}$

$BC = \frac{64}{\sqrt{3}}$ $BO = \sqrt{BL^2 - OL^2} = \sqrt{\frac{256}{3} - 64} = \frac{8}{\sqrt{3}}$

$BL = \sqrt{\frac{1024}{3} - 256} = \frac{16}{\sqrt{3}} \Rightarrow BN = \frac{32}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{a} = \sqrt{BC^2 - BH^2}$ $a = \frac{(64)^2}{3} - \frac{(32)^2}{3} = \frac{(64-32)(64+32)}{3} = \frac{32 \cdot 96}{3}$

$= 1024$.

Ответ: 1024.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2. $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos(5x - 9x) - \cos(5x + 9x)\right) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2} + \sin^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \cos^2 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3 = \cos^2 2x - \cos^2 x - 4 =$

$= (2\cos^2 x - 1)^2 - \cos^2 x - 4 = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 -$

$- \cos^2 x - 4 = 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$

$\cos^2 x = t \qquad t \in [0; 1]$

$g(x) = 4t^2 - 5t - 3 \qquad g'(x) = 8t - 5.$

$-$ $\frac{5}{8}$ $+$ $g'(x)$

$g(x)$

$x_{min} = \frac{5}{8}$

$g(0) = -3$

$g(1) = -4$

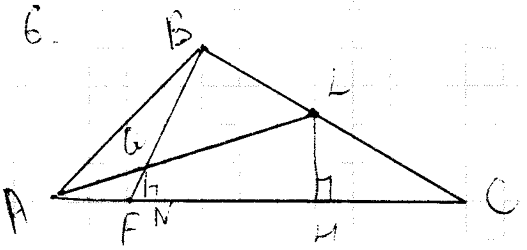
$g\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{4 \cdot 25}{64} - \frac{25}{8} - 3 = -\frac{73}{16}$

$g(x)_{max} = -3$

$g(x)_{min} = -\frac{73}{16}$

Ответ: -3; $-\frac{73}{16}$.

6.



Дано: $\triangle ABC$

$AF : FC = 3 : 4$

$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{6}$

$GN = 9$

$LH - ?$

Решение:

LH - высота $\triangle ALC$ GN - высота $\triangle AGF$, если $\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{6}$, то

$\frac{S_{AGF}}{S_{ALC}} = \frac{1}{16}$ ($\angle BCL = \angle LAGF$, $\angle LCA = \angle BCA$)

$S_{AGF} = \frac{1}{2} 3x \cdot GN \qquad \frac{S_{AGF}}{S_{ALC}} = \frac{3GN}{4LH} = \frac{1}{6} \qquad LH = \frac{27 \cdot 16}{4} = 27 \cdot 4 = 108$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} 4x \cdot LH$

Ответ: 108

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)