МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-037

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9. 50/50

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-037

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$$

ОДЗ:

$x+5>0$

$\sqrt{x+3}-x>0$

$\sqrt{x+3}-x \neq 1$

$x+3 \geq 0$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - 1 \geq 0$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}\left(\sqrt{x+3}-x\right) \geq 0$$

$\cancel{\log_{\sqrt{x+3}-x}}$

Равносильно: (выполнено по методу):

$$\begin{cases} (\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-(\sqrt{x+3}+x)) \geq 0 & (1) \\ x+5>0 & (2) \\ \sqrt{x+3}-x>0 & (3) \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 & (4) \end{cases}$$

$x+3 \geq 0$ (6) $\Rightarrow x \geq -3$

(2) $x > -5$

(3) $\sqrt{x+3} > x$

1. $\begin{cases} x \geq 0. \\ \sqrt{(x+3)}^2 > x^2 \Leftrightarrow x^2-x-3<0 \end{cases}$

$D = 1+12=13 \Rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)<0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(-4) ~~$\frac{25}{8}$~~

2. $\begin{cases} x < 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 0)$

$\Rightarrow x \in \left[-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 0\right) \cup$
$\left(0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ (

(4) $\sqrt{x+3} - x \neq 1$

если $\sqrt{x+3} = x+1$ $\quad x+1 \geq 0.$

то $\uparrow^2 \Rightarrow x+3 = x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+x-2=0$

$x=1$

$x=-2$ $\varnothing$

$\Rightarrow x \neq 1.$

$\Rightarrow$ ОДЗ $x \in \left[-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 0\right) \cup (0; 1) \cup$
$\left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ (из (2) — (6))

(1) 1) $\sqrt{x+3} = x+1 \Rightarrow x=1.$ (из (4))

2) $\sqrt{x+3} = 2x+5$ $\quad 2x+5 \geq 0$

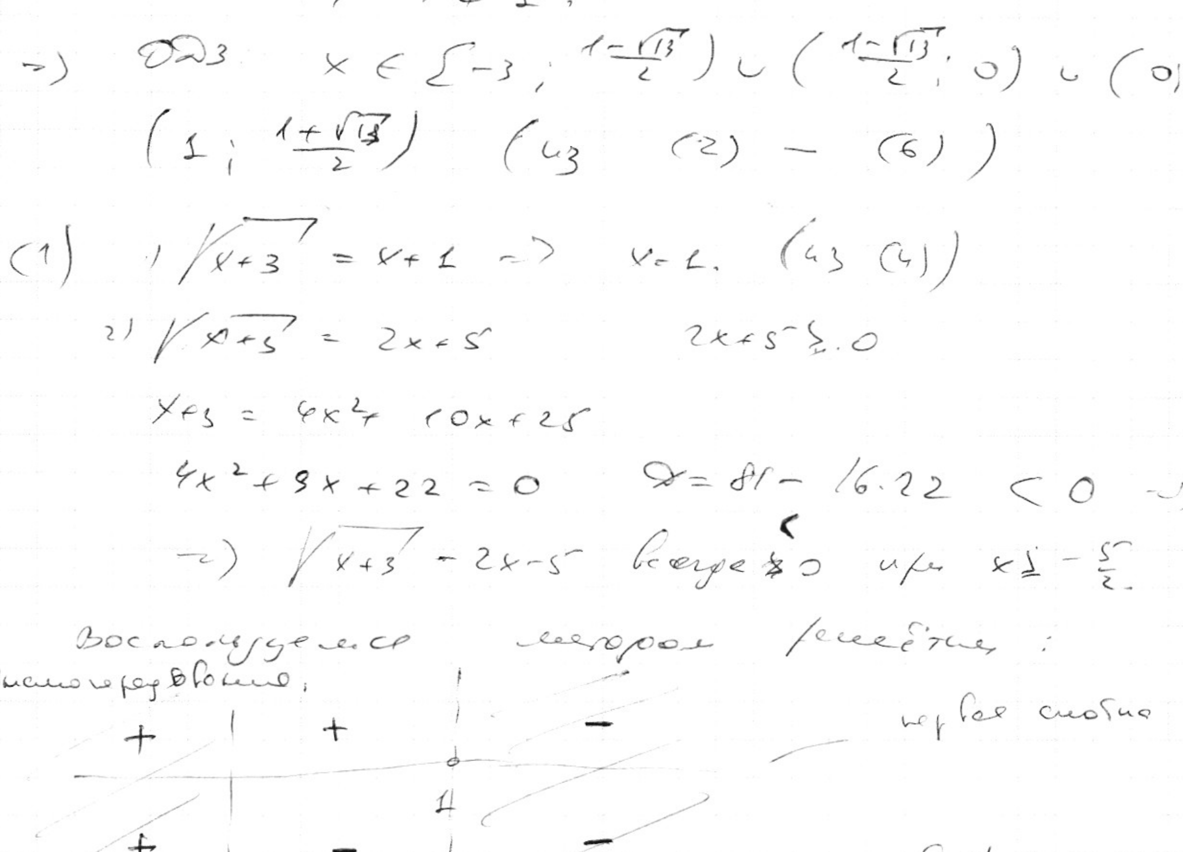
$x+3 = 4x^2+10x+25$

$4x^2+9x+22=0$ $\quad D = 81 - 16 \cdot 22 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x+3} - 2x - 5$ всегда > 0 при $x \geq -\frac{5}{2}$.

Воспользуемся методом решётки:

Знакочередование:



$\Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup (1; +\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пересечем это с ОДЗ:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{5}{2}] \cup (1; +\infty) \\ x \in [-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 0) \cup (0; 1) \\ \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases}$$

$-\frac{5}{2} \vee \frac{1-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \sqrt{13} \vee 6 \quad \uparrow^2 \quad 13 < 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2} > -\frac{5}{2}.$

$\Rightarrow x \in [-3; -\frac{5}{2}] \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

Ответ: $x \in [3; -\frac{5}{2}] \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

(2) $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$
$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 \ominus$
т.к. $\cos 14x = 1 - 2\sin^2 7x$, то

$\ominus \frac{1}{2}\cos 4x - \cos^2 x - \frac{7}{2}$

$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 - 2\cos x \cdot (-\sin x) - 0 =$
$= (\sin 2x - \sin 4x) \cdot 2 = 2 \cdot \sin 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$

1) $\sin 2x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \end{array}\right.$

т.к. $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$, то $\cos 4x = 1$

$\Rightarrow$ 1. если $\cos^2 x = 1$, то $g(x) = \frac{1}{2} - 1 - \frac{7}{2} = -4$
2. если $\cos^2 x = 0$, то $g(x) = \frac{1}{2} - 0 - \frac{7}{2} = -3$

2) $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = -\frac{1}{2}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}$

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} - 1 = -2$

из 1) − 2) получаем

$\max(g(x)) = -2$

$\min(g(x)) = -4$

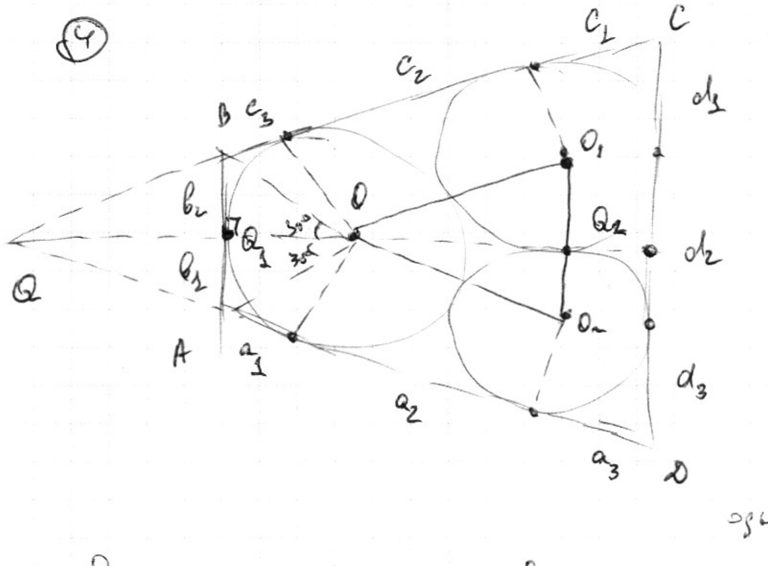
Ответ: максимум -2, минимум -4

3) Расставить 6 нолей подряд на места из восемнадцати мест без учета перестановок можно 13ю способами.
На каждое из оставшихся мест можно поставить две цифры, а таких мест 12.

$\Rightarrow$ кол-во чисел $2^{12} \cdot 13$ то есть 66 248

Ответ: 66 248

4)



$AB = b_1 + b_2$; $BC = c_1 + c_2 + c_3$; $AD = a_1 + a_2 + a_3$; $CD = d_1 + d_2 + d_3$

т.к. $AD + BC - AB - CD = 10$:

$a_1 + a_2 + a_3 + c_1 + c_2 + c_3 - b_1 - b_2 - d_1 - d_2 - d_3 = 10$

но $b_1 = a_1$; $b_2 = c_3$; $a_3 = d_3$; $c_1 = d_1$ как отр. касательных, проведенных из одних точек.

Поэтому $a_2 + c_2 - d_2 = 10$ но $c_2 = 2R$, $a_2 = 2R$, $d_2 = 2R$

$\Rightarrow 4R - 2R = 10 \Rightarrow R = 5$, где R – радиус окр-тей.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Так как $OO_1 = O_1O_2 = O_2O$, то $\angle O_1OO_2 = 60^\circ$

$Q = BC \cap AD$; $Q_1 = OQ \cap AB$. $Q_2 = OQ \cap O_1O_2$

$Q_1O \perp AB$ (радиус $\perp$ касательной)

(1) $Q_2O \perp Q_1O_2$ (— // —) (или т.к. OQ_2 явл. и бис. и мед. в равностороннем треуг-ке),

OQ_2 явл. бис. т.к. OQ явл. бис., а $\angle O_1OO_2 = \angle Q$ т.к. $O_1O \parallel BC$, а $OO_2 \parallel AD$.

из (1) заключаем, что $O_1O_2 \parallel AB$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOB = \angle O_1OO_2 = 60^\circ$.

Т.к. OQ_1 – бис, то $\angle BOQ_1 = 30^\circ = \angle AOQ_1$

$\Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{AO}{2} = \frac{BO}{2} \Rightarrow AB = AO = BO$

Т.к. $AO \cdot BO = 42 \Rightarrow AB^2 = 42 \Rightarrow AB = \sqrt{42}$

Ответ: радиус 5, $\angle AOB = 60^\circ$; $AB = \sqrt{42}$

(1) $x_1^2 = 169 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{169} = \pm 13 \Rightarrow$ первый отрезок $AB = 2 \cdot 13 = 26$.

$x_2^2 = 64 \Rightarrow x_2 = \pm 8 \Rightarrow$ второй отрезок $BC = 2 \cdot 8 = 16$

$x_3^2 = a \Rightarrow x_3 = \pm\sqrt{a} \Rightarrow$ третий отрезок $AC = 2\sqrt{a}$

Рассмотрим три случая

1) угол 120° между AB и BC:

По теор-ме косинусов:

$4a = 26^2 + 16^2 + 2\cdot 26\cdot 16\cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ ~~$2\sqrt{a} = \sqrt{26^2+16^2+2\cdot 26\cdot 16\cdot\frac{1}{2}}$~~

$= 1248 \Rightarrow a = 316$

$2\sqrt{a} < 26+16$ (нер-во треуг-ка выполняется)

2) угол 120° между BC и AC

$26^2 = 16^2 + 4a + 16\cdot 2\sqrt{a}$ — теор. ма косинусов

$t^2 + 8t - 105 = 0$ $\qquad \sqrt{a} = t. \qquad t \geq 0$

$D_1 = 121 \Rightarrow t_1 = \frac{7}{2}$; $t_2 = -\frac{15}{2}$ $\varnothing$

$\sqrt{a} = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{49}{4}$ $\qquad 2\sqrt{a} < 26+16 \Rightarrow$ подходит

3) 120° между AB и AC

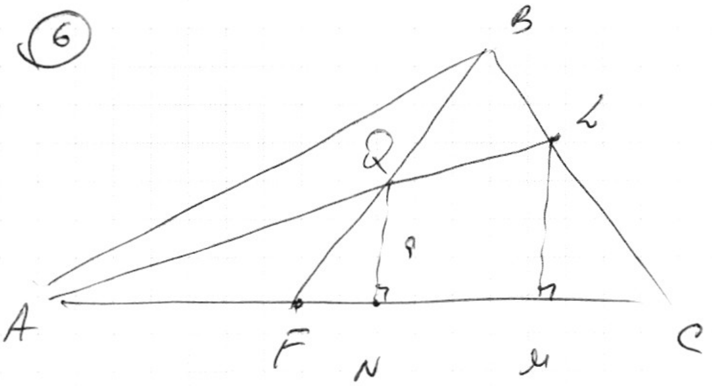
$16^2 = 26^2 + 4a + 26\cdot 2\sqrt{a}$ $\qquad \sqrt{a} = t,\ t \geq 0$

$2t^2 + 21t + 110 = 0$

$D < 0 \Rightarrow$ этот случай не реализуется

Ответ: $a = 316$, $a = \frac{49}{4}$

6



Теор-ма менелая для $\triangle BFC$:

$\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{3}{7} = 1$ (1)

Теор-ма менелая для $\triangle ALC$

$\frac{4}{3}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{BL}{BC} = 1$ (2)

$\frac{BC}{BL} = 1 + \frac{CL}{BL}$ $\qquad$ Обозначим $\frac{CL}{BL} = \alpha$.

Тогда из (1) $\frac{BQ}{QF} = \frac{7}{3\alpha} \Rightarrow \frac{QF}{BQ} = \frac{3}{7}\alpha$

☐ черновик ☑ чистовик $\qquad$ Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть S — площадь $\triangle ABC$. тогда

$S_{ABF} = \frac{3}{7}S$, а $S_{FBC} = \frac{4}{7}S$.

т.к. $\frac{QF}{BQ} = \frac{3}{7}\alpha \Rightarrow \frac{S_{AQB}}{S_{AQF}} = \frac{3}{7}\alpha$

$\Rightarrow S_{AQB} = \frac{3}{7}\alpha \cdot S_{AQF}$

$\left(\frac{3}{7}\alpha + 1\right) \cdot S_{AQF} = \frac{3}{7}S$ (т.к. $\frac{3}{7}S = S_{AQF} + S_{AQB}$)

$\Rightarrow S_{AQF} = \frac{3S}{3\alpha+7} \Rightarrow S_{AQB} = \frac{9S\cdot\alpha}{21\alpha+49}$

т.к. $\frac{QL}{BL} = \alpha$, то $\frac{S_{ALC}}{S_{ABL}} = \alpha$, но $S_{ALC} = S_{AQF} + S_{FQLC} = S_{AQF} + S_{BFC} - S_{QBL}$, а $S_{ABL} = S_{AQB} + S_{QBL} \Rightarrow S_{ALC} = \frac{3S}{3\alpha+7} + \frac{4}{7}S - \frac{1}{16}S = \frac{3S}{3\alpha+7} + \frac{57}{112}S$; $S_{ABL} = \frac{9\alpha S}{21\alpha+49} + \frac{1}{16}S$

$\Rightarrow$ $\cancel{\frac{9\alpha S}{21\alpha+49} + \frac{1}{16}S}$ $\frac{\frac{3S}{3\alpha+7} + \frac{57}{112}S}{\frac{9\alpha S}{21\alpha+49} + \frac{1}{16}S} = \alpha$

$\Rightarrow \frac{3}{3\alpha+7} + \frac{57}{112} = \frac{9\alpha^2}{21\alpha+49} + \frac{\alpha}{16}$

$\frac{9\alpha^2 - 21}{21\alpha+49} = \frac{57-7\alpha}{112} \Rightarrow 1008\alpha^2 - 2352 = 854\alpha - 147\alpha^2 + 2793$

$1155\alpha^2 - 854\alpha - 5145$

$D_1 = 6124804$ Если найти оттуда α, то

$\alpha = \frac{1}{3}$

Пусть ~~...~~ подставив в (2) найдём,

что $\frac{AQ}{QL} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1+\alpha}(1+\alpha)$

из подобия

но и $\frac{QM}{LM} = \frac{AQ}{AL} \Rightarrow \frac{LM}{QM} = \frac{AL}{AQ} = 1+\frac{QL}{AQ} =$

$= 1+\frac{4}{3\alpha+3}$ и $LM = QM\cdot\left(1+\frac{4}{3\alpha+3}\right)$,

где $QM = 9 \Rightarrow LM = 9\cdot\left(1+\frac{4}{3\cdot\frac{6}{3}+3}\right) = 16$

Ответ: LM (расстояние от L до AC) $= 16$

(7) Чтобы обеспечить минимальную сумму из первого промежутка в любом случае выберем 1. Тогда из второго можем выбрать 37 (пока задача выбирая всегда наи можно меньшие числа). Из третьего можем выбрать 73. Из четвертого выберем 106. И из пятого 142. Это для первых 5-ти чисел.

Заметим, что самого маленького числа в первом промежутке, во втором мы можем взять уже ~~...~~ ~~...~~ число, которое на 1 больше самого маленького второго промежутка, на третьем еще на 1 больше. А с четвертого схема повторилась. Значит, чтобы обеспечить минимальную сумму нужно выбрать числа

1, 2, 3, 4, 5 из первого; 37, 38, 39, 40, 41 из второго; 73, 74, 75, 76, 77 из третьего; 106, 107, 108, 109, 110 из четвертого и 142, 143, 144, 145, 146 из пятого.

$S = \frac{1+5}{2}\cdot 5 + \frac{37+41}{2}\cdot 5 + \frac{73+77}{2}\cdot 5 + \frac{106+110}{2}\cdot 5 +$

$+ \frac{142+146}{2}\cdot 5 = 15 + 170 + 375 + 540 + 720 = 1720$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-037

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ : $S = 1720$ (S - сумма)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

× 9

112 × 9 = 1008

112 × 21
112
224
2352

57 × 21
57
114
1197

49 × 7 = 343

1197 − 343 = 854

8

427 × 427
2989
854
~~2989~~
1708
182329

21 × 7 = 147

57 × 49
513
228
2793

2352 + 2793 = 5145

~~5943~~

1 ~~8232~~9

1155 × 5145
5775
4620
1155
5775
5942475

5942475 + 182329 = 6124804

34 × 5 = 170

75 × 5 = 375

108 × 5 = 540

~~142~~ 144 × 5 = 720

375 + 185 = 460

$\cancel{\frac{16}{9}}$ $\frac{16}{5} = 1 + \frac{4+4\alpha}{3} \quad | \cdot 9$

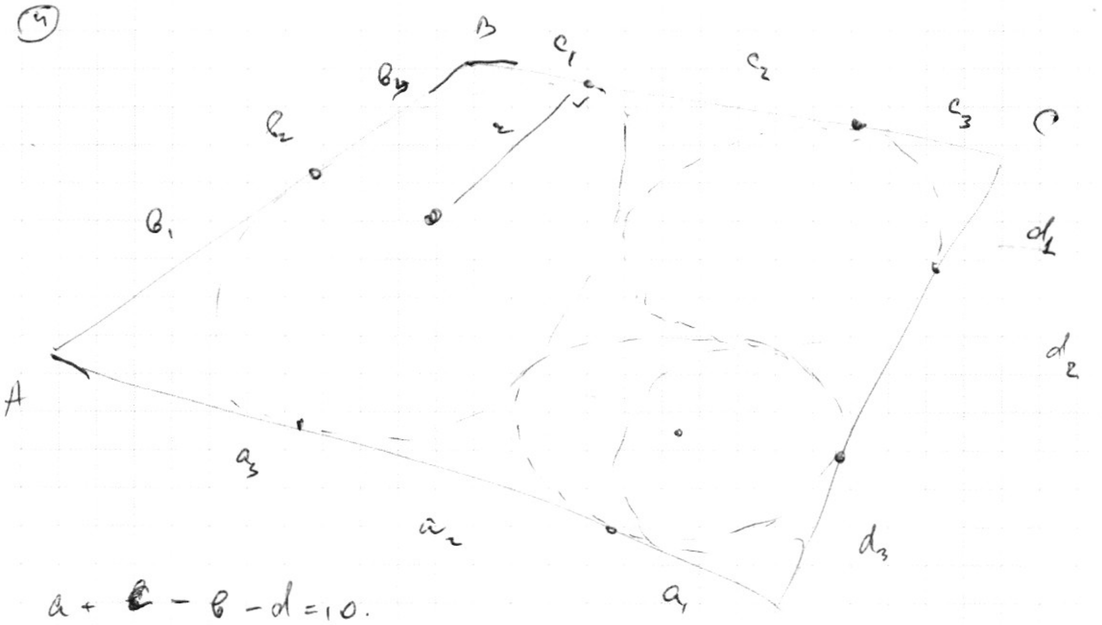
$16 = 9 + 12 + 12\alpha$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-037
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)



$a + c - b - d = 10.$

$b_1 = a_3 \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cancel{c_1} + c_2 + c_3 -$

$b_2 = c_1 \qquad - b_1 - \cancel{b_2} - \cancel{b_3} - d_1 - d_2 - d_3$

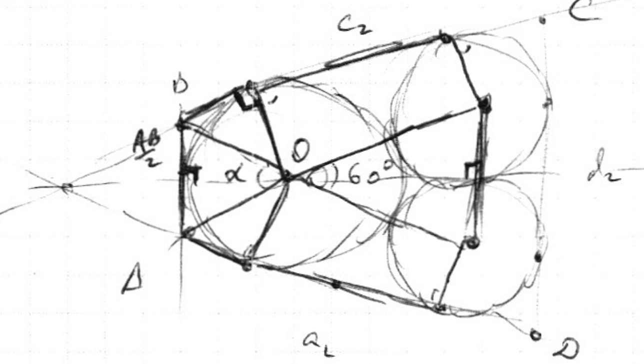
$c_3 = d_1$

$a_1 = a_3$

$a_2 + c_2 - b_2 - d_2 = 10.$

$b_2 = 0$

$a_2 + c_2 - d_2 = 10$



$d_2 = 2r$

$c_2 = 2r$

$a_2 = 2r$

$4r - 2r = 10$ $\quad r = 5$!

$\alpha = 60^\circ$

из теор. косинусов

$\cancel{AB^2 = \ldots}$

$\frac{AB}{2} = BO \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BO}{2}$

$\frac{AB}{2} = AO \cdot \sin\frac{60^\circ}{2} = \frac{AO}{2}$

$\cancel{AB = 2AB^2 - 2}$

$AB^2 = 42$

$AB = \sqrt{42}$

$$\frac{\frac{3}{4+3\alpha}+\frac{1}{16}}{\frac{9\alpha-9}{28+21\alpha}+\frac{19}{36}}=\alpha-1 \qquad \frac{\frac{48+4+3\alpha}{(4+3\alpha)\cdot 16}}{\frac{324\alpha-324+532+399\alpha}{36\cdot 7\cdot(4+3\alpha)}}=\alpha-1$$

$$\frac{\frac{52+3\alpha}{4}}{\frac{208+723\alpha}{63}}=\alpha-1$$

$$\frac{3176+189\alpha}{832+2892\alpha}=\alpha-1$$

$$3176+189\alpha=832\alpha-832+2892\alpha^2-2892\alpha$$

$$2892\alpha^2-2249\alpha-4008=0.$$

$$S_{AFQ}=\frac{3}{7}(\alpha-1)\cdot S_{AQB}$$

$$\left(\frac{3}{7}\alpha+\frac{4}{7}\right)S_{AQB}=\frac{3}{7}S \qquad S_{AQB}=\frac{3S}{3\alpha+4}$$

$$S_{AFQ}=\frac{9\alpha-9}{21\alpha+28}S$$

$$2892\alpha^2-2249\alpha-4008=0.$$

$D=$

$$\frac{16}{9}=1+\frac{4}{3\alpha+3}$$

$$\frac{7}{9}=\frac{4}{3\alpha+3}$$

$$21\alpha+21=28$$

$$\alpha=\frac{1}{3}.$$

$36 \times 9 = 324$; $19 \times 28 = 152 + 38 = 532$; $19 \times 21 = 19 + 38 = 399$; $532 - 324 = 208$; $324 + 399 = 723$; $63 \times 52 = 126 + 315 = 3176$; $3176 + 832 = 4008$; $723 \times 4 = 2892$; $2060 + 189 = 2249$

$2849 \times 2849 = 10848$; $2892 \times 4008 = 8906$; $8906 \times 4 = 35624$; $35624 + 10841 = 46465$

$215 \times 215 = 1075 + 215 + 430 = 46225$

$2849 \times 2849 = 25641 + 11396 + 22792 + 4698 = 8373211$

$4636454 + 837321 = 4720186$

$16032 \times 2892 = 32064 + 144288 + 128256 + 32064 = 46364544$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-037
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) 120° между AB и AC

$16^2 = 26^2 + 4a + 26 \cdot 2\sqrt{a}$ $\sqrt{a} = t$ $t \geq 0$

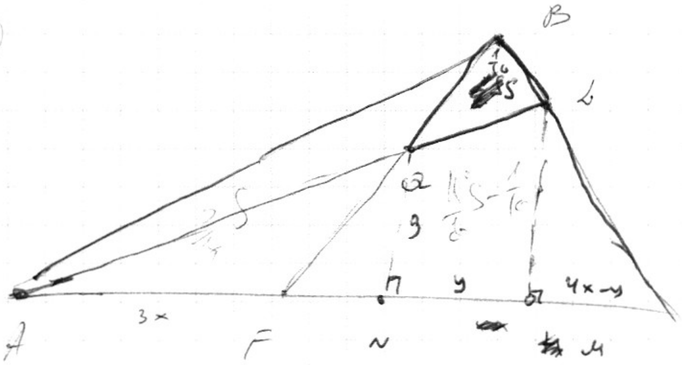
$4t^2 + 42t + 420 = 0$

$2t^2 + 21t + 110 = 0$

$D = 441 - 8 \cdot 110 < 0$

$a = \frac{45}{4}$ (1)

(6)



$\angle M - ?$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$QN = a$

$\frac{4}{7} - \frac{1}{16} =$

$= \frac{57}{108} =$

$= \frac{15}{36}$

$\frac{CL}{BL} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{3}{7} = 1$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$

$BC = BL + LC$

$\frac{BC}{BL} = 1 + \frac{CL}{BL} = \alpha$

$\frac{CL}{BL} = \alpha - 1$

$\frac{BQ}{QF} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \Rightarrow \frac{S_{AFQ}}{S_{AQB}} = \frac{3(\alpha-1)}{7} = (\alpha - 1)\frac{3}{7}$

$S_{AQB} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \cdot S_{AQB} = \frac{3}{7} S \Rightarrow S_{AQB}\left(\frac{7 + 3\alpha}{3\alpha - 3}\right) = \frac{3}{7} S$

$S_{AQB} = \frac{3}{7} \cdot \frac{3\alpha - 3}{4 + 3\alpha} \cdot S \Rightarrow S_{AFQ} = \frac{3}{4 + 3\alpha} S$

$\frac{BQ}{QF} = \frac{7}{3\alpha - 3}$

$\frac{S_{ABL}}{S_{ALC}} = \alpha - 1 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4+3\alpha} S + \frac{1}{16} S}{\frac{3}{7} \cdot \frac{3\alpha - 3}{4 + 3\alpha} S + \frac{19}{36} S} = \alpha - 1$

$\frac{S_{ABQ}}{S_{AQF}} = \frac{7}{3\alpha - 3}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 4x = 1 - \cancel{2\cos}\ 2\cos^2 2x - 1 = 2\cdot\frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}.$

$\cancel{\cos^2 x}\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} - 1 = -2$

$f(x)\ min = -4$

$f(x)\ max = -2$

$676 + 256 = 932$

26×26: 156, 52, 676

26×16: 156, 26, 316

32×32: 64, 96, 1024

$932 + 316 = 1248$

1248, 4, 316

(3)

Вполне Сорокины будут в 6 чисел „1" сорвись на 6 из 18 местах. Расставим [illegible] на местах.

13 Сорокинов.

5096×13: 15288, 5096, 66248

На каждом из оставшихся 12 мест может стоять 2 цифры $\Rightarrow$ кол-во чисел $2^{12}\cdot 13$

(1)

$x^2 = 169 \quad x = \pm 13 \Rightarrow y = 169$

$x^2 = 64 \quad x = \pm 8 \Rightarrow y = 64$

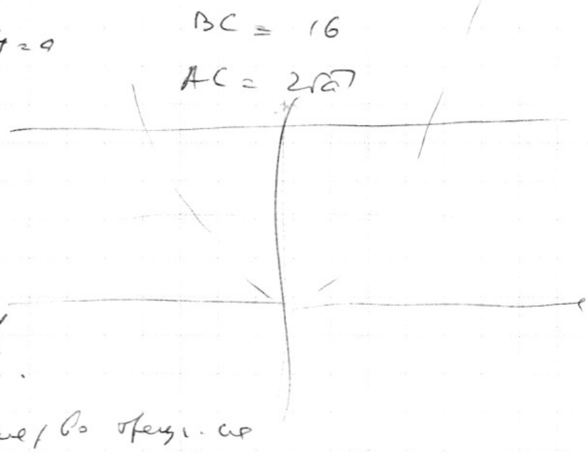
$x^2 = a \quad x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow y = a$

$a \geq 0$

$AB = 26$

$BC = 16$

$AC = 2\sqrt{a}$



Рассмотрим три случая.

1) ~~AB~~ 120° между AB и BC

По теор-ме косинусов

$4a = \cancel{4}\cdot 26^2 + (16)^2 + 2\cdot 26\cdot 16\cdot\frac{1}{2}.$

$4a = 26^2 + 16^2 + 26\cdot 16$ $\varnothing$ нер-во треуг. не выполняется.

2) 120° между BC и AC

$26^2 = 16^2 + 4a + 16\cdot 2\sqrt{a}$

$\sqrt{a} = t, \quad t \geq 0$

$4t^2 + 32t + 16^2 - 26^2 = 0$

$16^2 - 26^2 = (16-26)\cdot(16+26) = -10\cdot 42 = -420$

$t^2 + 8t - 105 = 0$

$D/4 = 16 + 105 = 121$

$t = \frac{-4+11}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{49}{4}\times 12$ (+)

$t = \frac{-4-11}{2}\ \varnothing$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-037

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3.$

$g'(x) = \cos 5x \cdot 5 \cdot \sin 9x + \cancel{\sin} \cos 9x \cdot 9 \cdot \sin 5x -$

$- 2\sin 7x \cdot \cos 7x \cdot 7 - 2\cos x \cdot (-\sin x) \cdot 1 - 0 =$

$= 5\cos 5x \sin 9x + 9 \cdot \sin 5x \cos 9x - 14\sin 7x \cos 7x$

$+ 2\cos x \sin x - 1$

$\begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \sin 9x = -1 \\ |\sin 7x| = 1 \\ |\cos x| = 1 \end{cases}$

$|\cos x| = 1 \Rightarrow x = \pi n, n \in Z.$

$\sin 5\pi n = 1 \quad \varnothing$

$5\sin(5x+9x) + 4\sin 5x \cos 9x -$

$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2}(\cos(4x) - \cos 14x)$

$\cancel{\cos 4x} \quad \cancel{\sin} \quad \cos 14x = 1 - 2\sin^2 7x$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2} + \cancel{\sin^2 7x} - \cancel{\sin^2 7x} - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \cos^2 x - \frac{7}{2}.$

$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 - 2\cos x \cdot (-\sin x) - 0 =$

$= -2\sin 4x + 2\cos x \sin x = 0.$

$-\sin 4x + \sin 2x = 0$

$-2\sin 2x \cos 2x + \sin 2x = 0.$

$\sin 2x (\cancel{-} 1 - 2\cos 2x) = 0$

1) $\sin 2x = 0$

2) $\cos 2x = \frac{1}{2}.$

1) $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x \Rightarrow \cos 4x = 1.$

$\sin 2x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \\ \cos x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 0 \end{array} \right.$

при $\cos^2 x = 0$

$g(x) = \frac{1}{2} - 0 - \frac{7}{2} = -3$

при $\cos^2 x = 1$

$g(x) = \frac{1}{2} - 1 - \frac{7}{2} = -4$ ⊕

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)