

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

15-022

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$y = x^2$$

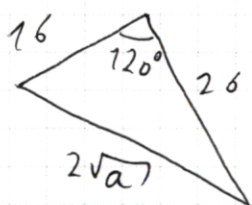
$$y = 769 \Rightarrow x = 13 \text{ или } -13, \text{ длина отрезка } 26$$

$$y = 64 \Rightarrow x = 8 \text{ или } -8, \text{ длина отрезка } 16$$

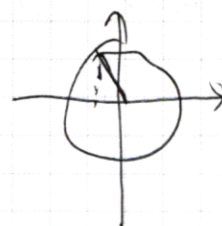
$$y = a \Rightarrow x = \sqrt{a} \text{ или } -\sqrt{a}, \text{ длина отрезка } 2\sqrt{a}$$

$$y \in [0; +\infty)$$

I случай:



$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$



$$4a = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16$$

$$26^2 = 676$$

$$4a = 676 + 256 + 416 = 1092 + 256 = 1348$$

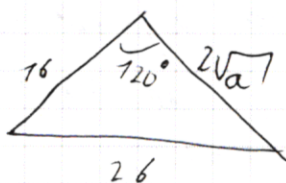
$$16^2 = 256$$

$$26 \cdot 16 = 416$$

$$2a = 674$$

$$a = 337$$

II случай



$$676 = 256 + 4a + 32\sqrt{a}$$

$$420 = 4a + 32\sqrt{a}$$

$$26^2 = 16^2 + 4a + 16 \cdot 2\sqrt{a}$$

$$205 = a + 8\sqrt{a}$$

$$a + 8\sqrt{a} - 205 = 0$$

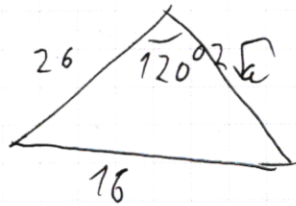
$$a + 8\sqrt{a} - 705 = 0$$

$$D = \frac{64}{4} + 420 = 484$$

$$\sqrt{a} = \frac{-8 + \sqrt{484}}{2} = -4 + 11$$

$$a = 7$$

III Судан



- перевозка, м.к. 26718,
а количество бетона
туда затрата
летом бетонная
строжка.

Ответ: $a_1 = 337$

$$a_2 = \sqrt{138 + 4} = 138 + 4 - 8 \sqrt{138}$$

N3

Температура 6, они и изур козроз \Rightarrow возделан так блок.
из общей
послеобъемлемости.

Теперь у нас 12 мест, на которых из которых
может быть "0" или "9", два варианта (без
"0" или без "9" исключены), "0" не может стоять
в начале.

~~$(2^{12} - 2)$~~
вы-106 послеобъемлемости из 1.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2^{11} - 1) \cdot 14$$

м.к. вариантов из кол-во мест для вставки
мест 12, все "9" блока из "5"
но "0" не в начале

Если "0" в начале, то блок из "5" не нужен.

SSSSSS O $\underbrace{\hspace{10em}}$
11 мест, все "0" исключать.

$$\underbrace{2^{11}}_{11 \text{ мест}} - \underbrace{1}_{\text{все нули}}$$

Общее кол-во:

$$\underbrace{(2^{11} - 1) \cdot 14}_{\text{"9" в начале}} + \underbrace{(2^{11} - 1)}_{\text{"0" в начале}} = (2^{11} - 1) \cdot 15 = 2047 \cdot 15 =$$

$$= 20470 + 10235 = 30705$$

Ответ: 30705.

N2

$$g(x) = \sin 5x - \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g'(x) = 5 \cdot \cos 5x \cdot \sin 9x + 9 \cdot \cos 9x \sin 5x - \sin 7x + \sin 2x$$

$$\sin 9x \cos 5x = \frac{\sin 14x + \sin 4x}{2}$$

$$\cos 9x \sin 5x = \frac{\sin 14x - \sin 4x}{2}$$

$$g'(x) = 5 \left(\frac{\sin 14x + \sin 4x}{2} \right) + 9 \left(\frac{\sin 14x - \sin 4x}{2} \right) - \sin 7x + \sin 2x =$$

$$= 5 \cdot \sin 14x + 2(\sin 14x - \sin 4x) - \sin 7x + \sin 2x =$$

$$= 7 \cdot \sin 14x - 2 \cdot \sin 4x - \sin 7x + \sin 2x = 6 \cdot \sin 14x + \sin 2x - 2 \sin 4x$$

$$6 \cdot \sin 14x + \sin 2x - 2 \sin 4x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$$\log \sqrt{x+3} \leq x \quad (x+5) \geq 1$$

орз:
~~орз~~
~~орз~~

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$x \geq -3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \leq 1 \\ x+5 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\downarrow$$

$$x \geq -5$$

$$x \in [0; -3] \text{ - выполняется}$$

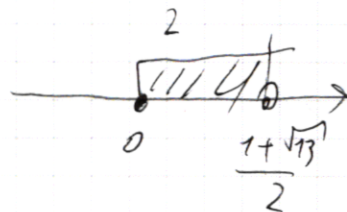
$$x \in [0; +\infty)$$

$$x+3 > x^2$$

$$0 > x^2 - x - 3$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$x \in \left[-3; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)$$

$$\sqrt{x+3} \neq x+1$$

$$x \in [-3; -1] \text{ - да}$$

$$x \in [-1; +\infty)$$

$$x+3 \neq x^2 - 2x + 1$$

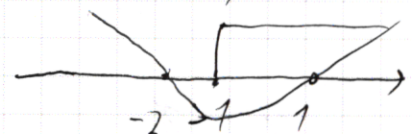
$$0 \neq x^2 + x - 2$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 \neq 1$$

$$x_2 \neq -2$$



$$\log \sqrt{n+3} - n (n+5) \geq 1$$

$$\text{Если } \sqrt{n+3} - n > 1$$

$$n+5 \geq \sqrt{n+3} - n$$

$$2n+5 \geq \sqrt{n+3}$$

$$n \in [-3; -2.5] \text{ - не берем}$$

$$n \in (-2.5; 1)$$

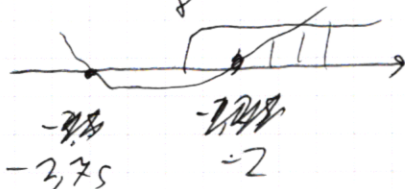
$$4n^2 + 20n + 25 \geq n+3$$

$$4n^2 + 19n + 22 \geq 0$$

$$D = 361 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 361 - 352 = 9$$

$$n_1 = \frac{-19 + 3}{8} = -\frac{16}{8} = -2$$

$$n_2 = \frac{-19 - 3}{8} = -\frac{22}{8} = -2.75$$



$$n \in \mathbb{R} \setminus [-2.75; -2] \cup [-2; 1]$$

$$\text{Если } \sqrt{n+3} - n < 1$$

$$\sqrt{n+3} < n+1$$

$\left[\begin{array}{l} n < -3 \text{ - не м.б. по ОДЗ.} \\ n \geq 1 \text{ - возведём} \\ \text{в квадрат} \\ \text{и вычтем} \end{array} \right.$

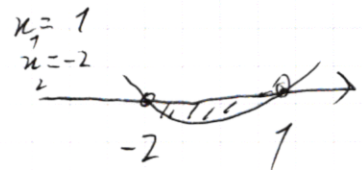
$$n \in \emptyset$$

$$n \in [-3; -1] \text{ - берем}$$

$$n \in [1; +\infty)$$

$$n+3 > \frac{n^2+2n+1}{2}$$

$$0 > n^2 + n - 2$$



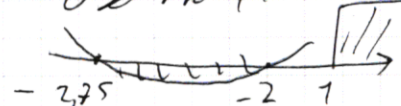
$$\Downarrow \\ n \in [-3; 1)$$

$$\sqrt{n+3} - n \geq n+5$$

$$\sqrt{n+3} \geq 2n+5$$

$$n+3 \geq 4n^2 + 20n + 25$$

$$0 \geq 4n^2 + 19n + 22$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

итого:

$$\begin{array}{l}
 x \geq -5 \\
 x \neq 1 \\
 \text{[scribble]} \\
 x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)
 \end{array}
 \quad \text{ответ}$$

I.

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{x+3} - x > 1 \\
 \downarrow \\
 x \in [-3; 1)
 \end{array}$$

$$x \in \text{[scribble]} \cup [-2; 1)$$

II

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{x+3} - x < 1 \\
 \downarrow \\
 x > 1 \\
 x \in \emptyset
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x \in \emptyset \\
 x \in \text{[scribble]} \cup [-2; 1) \\
 x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \\
 x \neq 1
 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{ответ:} \\ x \in \text{[scribble]} \cup [-2; 1) \end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ответ} \\ x \in [-2; 1) \end{array}}$$

83. Контракт прокатываете ^{№7} содержит по одному
 числу с остатком $x \in [0; 34]$ x - целое, ~~каждый~~
 от значения на 35 пол.

Разность между двумя соседними чисел
 не делится на 35.

Разность двух чисел всегда делится на 35:

$$a = 35 \cdot p_1 + a_1$$

$$b = 35 \cdot p_2 + a_2$$

$$a - b = \underbrace{35 \cdot (p_1 - p_2)}_{\div 35} + \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\div 35} \Rightarrow \text{Разность между соседними чисел делится на 35}$$

Следовательно все числа
 всегда делится на 35:

$$S = \underbrace{35 \cdot 5}_{\text{"заполнение" из первого отрезка}} + \underbrace{70 \cdot 5}_{\text{второго}} + \underbrace{105 \cdot 5}_{\text{третьего}} + \underbrace{140 \cdot 5}_{\text{четвертого}} + \underbrace{175 \cdot 5}_{\text{пятого}} = \underbrace{\frac{34+0}{2} \cdot 35}_{\text{сумма всех страниц, т.к. все они используются}}$$

Число из проката всегда делится на 35:

$$35 \cdot n - q$$

остаток от деления
 остатка числа на 35

$$S = 5 \cdot (105 + 210 + 216) - 17 \cdot 35 = 5 \cdot (3 + 6 + 6) \cdot 35 - 35 \cdot 17 = 35 \cdot (75 - 17) = 35 \cdot (58) = \boxed{2030} \quad \text{Ответ: } 2030$$

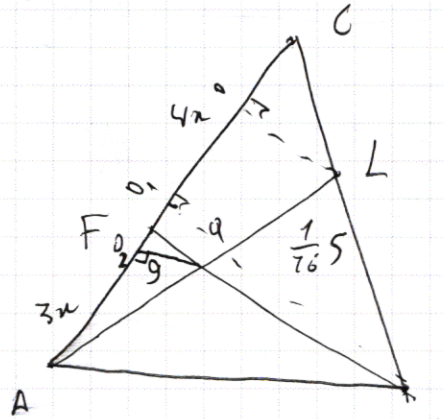
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$S = \frac{7x \cdot B_0}{2}$$

$L_0 = ?$

$$Q_0 = 9$$



$$I_0 \quad \frac{L_0 \cdot 4x}{2} + \frac{B_0 \cdot 3x}{2} + \frac{1}{16} S - \frac{Q_0 \cdot 3x}{2} = S \quad \text{- площадь треугольника}$$

$$\frac{L_0 \cdot 4x}{2} + \frac{3}{7} S + \frac{1}{16} S - \frac{Q_0 \cdot 3x}{2} = S$$

$$\left(- \frac{Q_0 \cdot 3x}{2} \right) + \frac{L_0 \cdot 4x}{2} = \frac{4}{7} S - \frac{1}{16} S$$

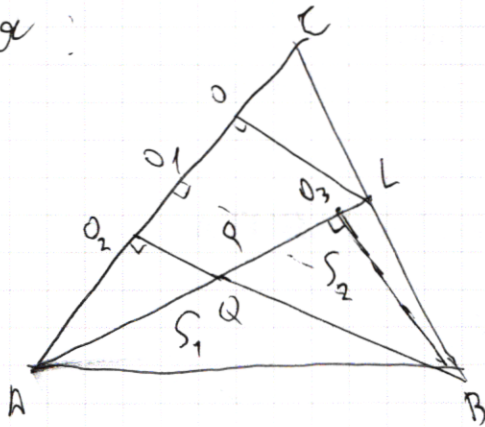
$$(L_0 \cdot 4 - Q_0 \cdot 3) = \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{16} \right) \cdot 7 \cdot B_0$$

$$4L_0 - Q_0 \cdot 3 = \left(4 - \frac{7}{16} \right) B_0$$

$$4L_0 - 27 = \left(\frac{64-7}{16} \right) B_0$$

$$L_0 = \left(\frac{64-7}{64} \right) B_0 + \frac{27}{4}$$

II Показує:



$$\frac{LO}{QO_2} = \frac{AL}{AQ} = \frac{AQ + QL}{AQ}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{AQ \cdot BO_3}{2} = S - \cancel{\frac{4}{16} S} - \frac{4}{7} S - \frac{QO_2 \cdot 3x}{2} = \frac{3}{2} S - \frac{QO_2 \cdot 3x}{2} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{BO_1 \cdot 7x}{2} - \frac{QO_2 \cdot 3x}{2} = \frac{3x}{2} (BO_1 - 9) \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{QL \cdot BO_3}{2} = \frac{1}{16} S = \frac{1}{16} \cdot \frac{BO_1 \cdot 7x}{2} = \frac{BO_1 \cdot 7x}{32}$$

$$\frac{LO}{9} = \frac{AQ + QL}{AQ} = \frac{S_1 + S_2}{S_1} = \frac{\frac{3x}{2} (BO_1 - 9) + \frac{7x}{32} \cdot BO_1}{\frac{3x}{2} (BO_1 - 9)}$$

$$\frac{LO}{9} = \frac{\frac{3}{2} (BO_1 - 9) + \frac{7}{32} BO_1}{\frac{3}{2} (BO_1 - 9)}$$

$$\frac{LO}{9} = 1 + \frac{\frac{7}{32} BO_1}{\frac{3}{2} (BO_1 - 9)}$$

$$LO = 9 + \frac{\frac{7 \cdot 9}{16} BO_1}{3 (BO_1 - 9)} = \frac{21}{16} \cdot \frac{BO_1}{BO_1 - 9} + 9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{III} \quad \begin{cases} L_0 = \left(1 - \frac{7}{64}\right) B_0 + \frac{27}{4} \\ L_0 = \frac{21}{16} \cdot \frac{B_0}{B_0 - 9} + 9 \end{cases}$$

$$B_0 - \frac{7}{64} B_0 + 6,75 = 9 + \frac{21}{16} \cdot \frac{B_0}{B_0 - 9}$$

$$B_0 - \frac{7}{64} B_0 - 2,25 = \frac{21}{16} \cdot \frac{B_0}{B_0 - 9}$$

$$16 B_0 - \frac{7}{4} B_0 - 36 = 21 \cdot \frac{B_0}{B_0 - 9}$$

$$\left(16 B_0 - \frac{7}{4} B_0 - 36\right) (B_0 - 9) = 21 B_0$$

$$16 B_0^2 - \frac{7}{4} B_0^2 - 36 B_0 - 144 B_0 + \frac{63}{4} B_0 + 324 = 21 B_0$$

$$\frac{64-7}{4} B_0^2 - 180 B_0 + \frac{63}{4} B_0 + 324 = 21 B_0$$

$$\frac{57}{4} B_0^2 - 180 B_0 + \frac{63}{4} B_0 + 324 = 21 B_0$$

$$57 B_0^2 - 720 B_0 + 63 B_0 + 1296 = 84 B_0$$

$$57 B_0^2 - 720 B_0 - 21 B_0 + 1296 = 0$$

$$57 B_0^2 - 741 B_0 + 1296 = 0$$

$$57B_0^2 - 741B_0 + 7296 = 0$$

$$D = \cancel{549081} - 4 \cdot 57 \cdot 7296 = 549081 - 295488 = 253593$$

$$B_0 = \frac{741 + \sqrt{D}}{114}$$

$$LO = \left(\frac{57}{64} \right) \cdot \frac{741 + \sqrt{253593}}{114} + \frac{27}{4}$$

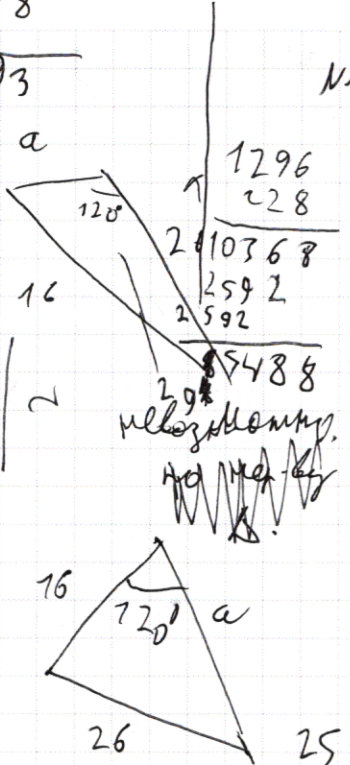
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

54 0081
- 29 5488

253 593

253593

$S_{\Delta LO} = -\frac{1}{76} S - \frac{35}{76} S - \frac{1}{76} S$
 $S_{AL} \sim AL \cdot h$



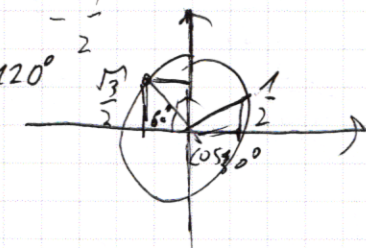
$S = x^2$
 $x = 169$
 $x = 64$
 $n = 13; -13$
 $n = 8; -8$

20 $4 \cdot 57 = 228$

400

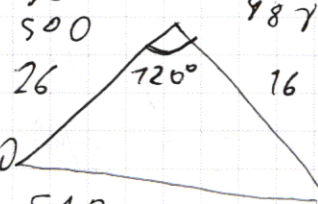
$\cos 120^\circ$

27
 $l = 26 \cdot 21$
44 1



1348 $\frac{4}{12}$
12 $\frac{337}{256}$
14
12
2826
126

500
500
26



$26 \times 26 = 260 + 18 \cdot 26 = 260 + 160 + 256 = 420 + 256 = 676$

$a^2 = 26^2 - 76^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 26 \cdot 76$

$676 - 256 = 420$

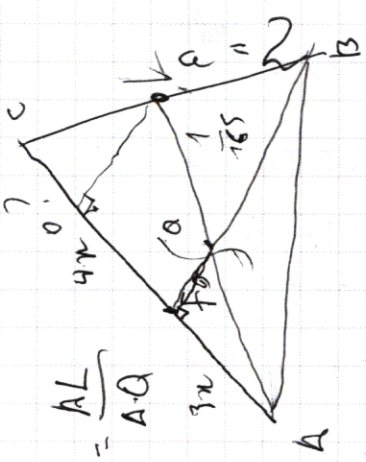
$a^2 = 26^2 + 76^2 - 2 \cdot 26 \cdot 76 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$
 100

$260 - 256$

$26^2 + 76^2 + 26 \cdot 76 = 26 \cdot 70 + 76^2 = 2154 + 260 = 578$

$a = \sqrt{578}$

452
278
138



$\frac{LO}{AQ} = \frac{AL}{AQ}$

$OL = \frac{76}{2} + \frac{76}{16} S + \frac{35}{76} S$
 $26 \cdot 42 + 16^2$
42
26
252
84
1092

$592 + 076 S$
 $47 S$

$26 \cdot 76 = 260 + 256 = 476$

256
741
741

24 1
29 84

5187
5059 081

$$\frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = \frac{\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}$$

"0" "5" "9"
 Булок уз нәмејер

12 нәсм гәлә "0" "9"

$$\frac{2092}{552}$$

$$\frac{45}{45}$$

18
 19 ут

10
 Едәл "0" әгәл

a l $\frac{a-b}{2}$ $\frac{a+b}{2}$

$$C_{12}^1 + C_{12}^2 + \dots + C_{12}^{11} + C_{12}^{12}$$

$$\cos 14 - \cos 4 = -2$$

$$\sin 9n \cdot \sin 7n = \frac{\cos(9n-7n) - \cos(9n+7n)}{2}$$

$$\frac{\cos 4 - \cos 14}{2} = \sin 9n \sin 7n \quad (2^{12} - 2) \cdot 14$$

$$\cos 60^\circ = 2 \cos 0^\circ \cos 60^\circ$$

$$g(x) = \sin^2 x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\sin 60^\circ + \sin 60^\circ = 2 \cos 0^\circ \sin 60^\circ$$

$$g'(x) = 5 \cos 5x \sin 9x + 9 \cos 9x \sin 5x = \sin 14x + \sin 2x$$

$$4n - \sin^2 \sim \cos \sin 8$$

51x

$$76 \cdot 22 = 32 + 16 \cdot 20$$

$$20 \cdot 20 = 10 \cdot 20 + 10$$

$$= 32 + 160 \cdot 2$$

$$32 + 320 \quad \log \sqrt{x+3} - x \quad (x+5) \geq 1 \quad 19 \cdot 19 = 39$$

OP3: ~~OP3:~~

$$352 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{28}{8} \quad 400 - 39$$

$$35 \cdot 60 = 70$$

$$\frac{5 \cdot 7}{8} = \frac{35}{8} \quad 3,75$$

$$70 \cdot 30 = 70$$

$$420$$

$$10235$$

$$\frac{79}{4} \quad 2100 - 70$$

$$475 \quad 1030$$

$$525 \cdot 5 \quad -5,5$$

$$2,75$$