МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 14-011

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

МФТИ

14-011

ШИФР

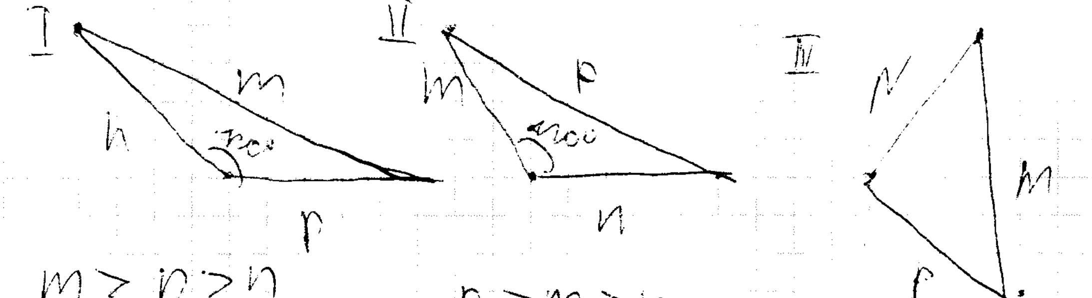
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = x^2$ $\quad y = 169 \Rightarrow x = \pm 13 \Rightarrow m = 26$

$y = 64 \Rightarrow x = \pm 8 \Rightarrow n = 16$

$y = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow p = 2\sqrt{a}$



$m > p > n$ $\qquad p > m > n$ $\qquad m > n > p$.

I и II случ

$m^2 = n^2 + p^2 - 2np\cos 120°$

$676 = 256 + 4a - 64\sqrt{a}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$4a + 32\sqrt{a} - 420 = 0$

$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$

$D = 22^2$

$\sqrt{a} = \frac{-8 \pm 22}{2}$; $\sqrt{a} > 0 \Rightarrow \sqrt{a} = 7$ $\quad p = 14$

$a = 49$

III случ

$4a = 676 + 256 + 26 \cdot 16$ $\qquad \times\frac{26}{16}$, 416

$a = 337$

Ответ: $a = 49$ $\; a = 337$

№2 $g(x)=\sin 5x \sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=$

$\cancel{\frac{1}{2}(\cos 4x-1+2\sin^2 7x)-\sin^2}$

$\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 14x)-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=$

$\frac{1}{2}(\cos 4x-1+2\sin^2 7x)-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=$

$\frac{1}{2}\cos 4x-\cos^2 x-3{,}5=\frac{2\cos^2 2x-1}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{7}{2}=$

$=\frac{2\cos^2 2x-\cos 2x-9}{2}=\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{9}{2}=\left(\cos 2x-\frac{1}{4}\right)^2-$

$-\frac{1}{16}-\frac{9}{2}=\left(\cos 2x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{73}{16}$

$-\frac{73}{16}\le g(x)\le\left(-1-\frac{1}{4}\right)-\frac{73}{16}$

$E(g)=\left[-\frac{73}{16};-3\right]$

№3 1) $\underbrace{555555}\ \underbrace{\ldots\ldots}_{n}$

$C_n^1+C_n^{2}+C_n^3+\ldots C_n^{n}=2^n-2=4094$

1 „0" 2 „0" 3 „0"

2) $9\ \underbrace{555555}\ \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{ниш}}$

$C_{11}^1+C_{11}^{2}+\ldots C_{11}^{10}=2^{11}-2=2046$

3) $9\ \underbrace{\text{„0" или „9"}}_{1}\ \underbrace{555555}_{6}\ \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{иишт}}$

$C_{11}^1+\ldots C_{11}^{10}=2^{11}-2=2046$

⇒ БЛОК „555555" поставить на n мест

$N=4094+12\cdot 2046=28646$

Ответ: 28646

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7) Все 25 чисел имеют разные остатки при делении на 35

Из каждого промежутка взять какие-то 5 чисел, но так, как всего их 35, то суммы выбранных чисел наименьшие, если взять первые конец промежутка исключая чисел, разность которых с каким-то из предыдущих делится на 35 то числа идущие через 40 начиная с 1

$[1;35] \Rightarrow 1,2,3,4,5$ 15

$[36;70] \to 41,42,43,44,45$ 215

$[71;105] \to 81,82,83,84,85$ 415

$[106;140] \to 121,122,123,124,125$ 615

$[141;175] \to 161,162,163,164,165$ 815

$S = 2075$

№5) $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3}-x-1 \geq 0 \\ x+5-(\sqrt{x+3}-x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3}-x-1 \leq 0 \\ x+5-(\sqrt{x+3}-x) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\sqrt{x+3}-x>0$

$x+3>x^2$

$x^2-x-3<0$

$D = 1+12 = 13$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\sqrt{x+3}-x \neq 1$

$x+3 \neq 1+2x+x^2$

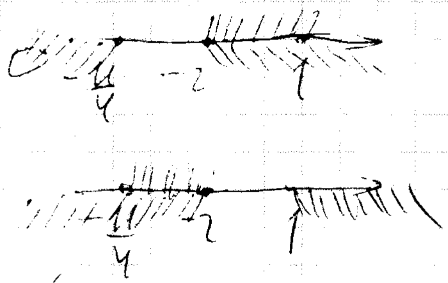
$x^2+x-2 \neq 0$ $x=1$, $x=-2$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} > -2$

-2 $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ 1 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ *

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3\geq x^2+2x+1\\ 4x^2+19x+22\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+3\leq x^2+2x+1\\ 4x^2+19x+22\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x-2\leq 0\\ 4x^2+19x+22\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x-2\geq 0\\ 4x^2+19x+22\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



$$4x^2+19x+22=0$$

$$D=361-352=9$$

$$x=-2;\ -\frac{11}{4}$$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};1\right)$ с учетом *

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-011

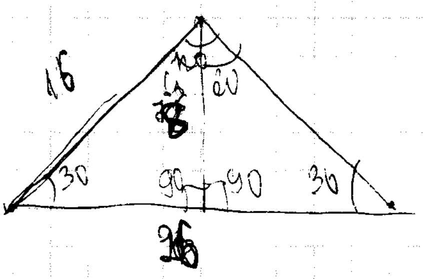
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$13 \times 13 = 169$ $\quad 16 \times 16 = 256$

$64 = 233$



$26 \cdot 26 =$

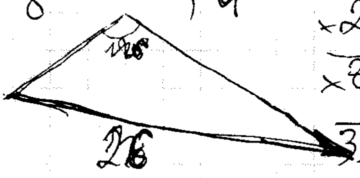
26×26: 156, 52, 676 $\quad 16 \times 16$: 96, 16, 256

$256 + 256 = 512$

$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

$D = 361 - 352 = 9$

$x = \frac{-19 \pm 3}{8} = -2;\ -\frac{11}{4}$



$22 \times 4 = 88$, $88 \times 4 = 352$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

19×19: 171, 19, 361

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}\left(\sqrt{x+3}-x\right) \geq 0$

$\left(\sqrt{x+3}-x-1\right)\left(x+5-\left(\sqrt{x+3}-x\right)\right) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3}-x-1 \geq 0 \\ x+5-\left(\sqrt{x+3}-x\right) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3}-x-1 \leq 0 \\ x+5-\left(\sqrt{x+3}-x\right) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 \geq 1+2x+x^2 \\ 2x+5 \geq \sqrt{x+3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 \leq 1+2x+x^2 \\ 2x+5 \leq \sqrt{x+3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x-2 \leq 0 \\ 4x^2+20x+25 \geq x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ 4x^2+20x+25 \leq x+3 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ x \leq -2 \\ x \geq -\frac{11}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \\ -2 \leq x \leq -\frac{11}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

$x+5 > 0$

$x > -5$

$\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$x+3 = 1+2x+x^2$ $\quad x^2+x-2=0$

$D = 1+8 = 9$

$\sqrt{x+3} \geq 0$ $\quad x = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1;\ -2$

$x \geq -3$

$\sqrt{x+3} - x > 0$ $\quad D = 1+12 = 13$ $\quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\ 1\right)\left(1;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$x+3 > x^2$

$x^2 - x - 3 < 0$ $\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$+ \quad - \quad +$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \qquad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$\sqrt{x+3}-x > 0$ $\quad$ $\sqrt{x+3}-x \neq 1$

$x+3 > x^2$ $\quad$ $x+3 \neq 1+2x+x^2$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \geq 0$

$x^2-x-3<0$ $\quad$ $x^2+x-2 \neq 0$

$D=1+12=13$ $\quad$ $x_1 = 1$

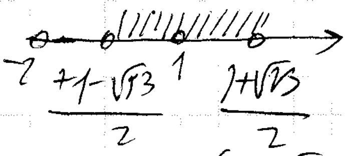
$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-(\sqrt{x+3}-x)) \geq 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\quad$ $x_2=-2$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} > -2$

$x+5>0$

$x>-5$

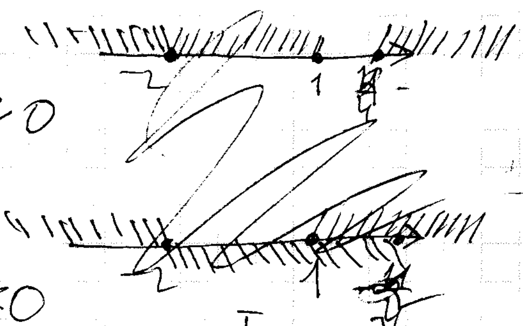


$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ *

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3}-x-1 \geq 0 \\ x+5-(\sqrt{x+3}-x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3}-x-1 \leq 0 \\ x+5-(\sqrt{x+3}-x) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 \geq x^2+2x+1 \\ 4x^2+19x+22 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 \leq x^2+2x+1 \\ 4x^2+19x+22 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

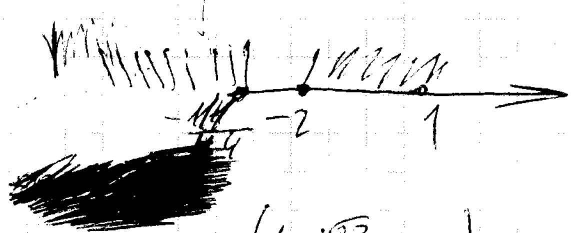
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x-2 \leq 0 \\ 4x^2+19x+22 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ 4x^2+19x+22 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



$x \in \left[1; \frac{11}{4}\right] \Rightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2} < \frac{11}{4}$

при учете *

$\left(\cancel{x \in (1;} \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

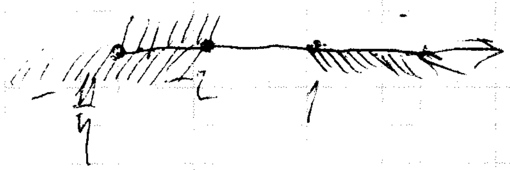


$4 < 1+\sqrt{13} < 5$

$2 < \frac{1+\sqrt{13}}{2} < 2{,}5$

$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 1\right)$

$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$



~~1 2 3 4 5~~

~~37 38 39 40 41 42~~

~~71 72 73 74 75 76~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Все 25 чисел имеют разные остатки при делении на 35

Из каждого промежутка взять какие-то 5 чисел, но так ~~чтобы~~ как всего их 35, то сумма выбранных чисел наименьшая, если взять начала каждого из промежутков исключая числа, разность которых с каким-то из пред. дел на 35

$[1, 35] \to 1, 2, 3, 4, 5$ 15

$[36, 70] \to 41, 42, 43, 44, 45$ 215

$[71, 105] \to 81, 82, 83, 84, 85$ 415

$[106; 140] \to 121, 122, 123, 124, 125$ 615

$[141; 175] \to 161, 162, 163, 164, 165$ 815

т.е числа идут через 10 раз ~~(~~ 1

$S = 2075$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

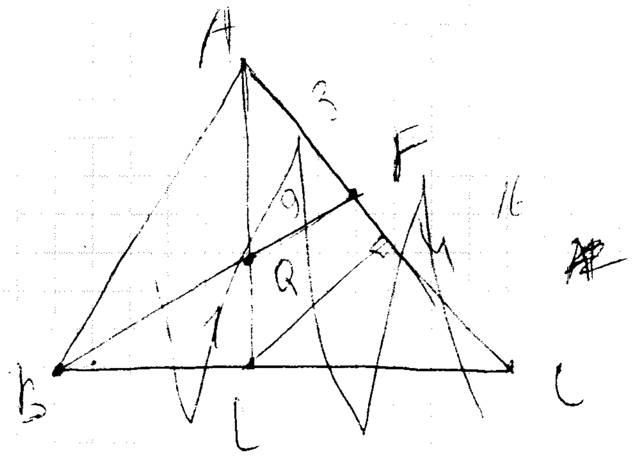
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№2 $g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$\frac{1}{2}(\cos 4x - 1 + 2\sin^2 7x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \cos^2 x - 3{,}5 = \frac{2\cos^2 2x - 1}{2} - \frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{7}{2} =$

$= \frac{2\cos^2 2x - \cos 2x - 9}{2} = \cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{9}{2} = \left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2 -$

$\frac{1}{16} - \frac{9}{2} = \left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{73}{16}$

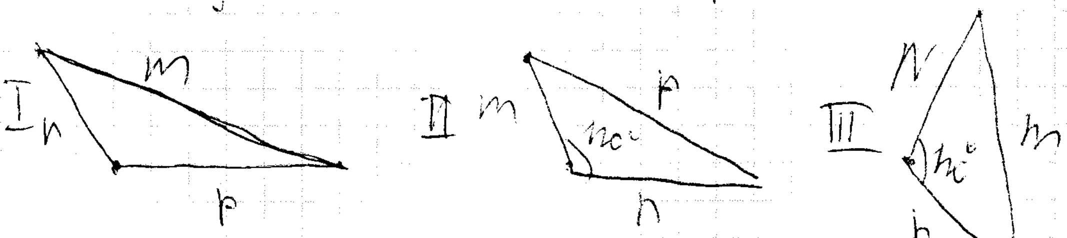
$-\frac{73}{16} \le g(x) \le \left(-1 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{73}{16} = -3$

$E(g) = \left[-\frac{73}{16}; -3\right]$

1) $y=x^2$ $y=169 \Rightarrow x=\pm 13 \Rightarrow m=26$

$y=64 \Rightarrow x=\pm 8 \Rightarrow n=16$

$y=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a} \Rightarrow p=2\sqrt{a}$



$m>p>n$ $p>m>n$ $m>n>p$

I и III случ

$m^2=n^2+p^2-2np\cos 120^\circ$

$676=256+4a-64\sqrt{a}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$4a+32\sqrt{a}-420=0$

$a+8\sqrt{a}-105=0$ $64+420=484$

$\cancel{\sqrt{D}=22}$ $D=22^2$

$\sqrt{a}=-\frac{8\pm 22}{2}$; $\sqrt{a}>0 \Rightarrow \sqrt{a}=7$ $(p=14)$

$a=49$

II случ.

$4a=676+256+26\cdot 16$

$a=337$

$26\cdot 16$: 156, 26, 416

Ответ: $a=49$; $a=337$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{S_{BGC}}{S_{BGL}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{S_{CQA}}{S_{CGL}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{S_{CQA}}{S_{CAL} - S_{CQA}}$$

$$\frac{S_{BQL} + S_{CGL}}{S_{BQL}} = 1 + \frac{S_{CGL}}{S_{BGL}}$$

$$\frac{1 + S_{CGL}}{S_{BGL}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot y}{\frac{1}{2} LL_1 \cdot AC - \frac{1}{2} AC \cdot y} = \frac{n}{LL_1 - y}$$

3 1) $\underbrace{555555}_{6}\underbrace{\ldots\ldots}_{n\text{ шт}}$

$\underset{1\text{„}0\text{"}}{C_n^1} + \underset{2\text{„}0\text{"}}{C_n^2} + \underset{3\text{„}0\text{"}}{C_n^3} + \ldots + \underset{11\text{„}0\text{"}}{C_n^{11}} = 2^n - 2 = 4094$

2) $9\underbrace{555555}_{6}\underbrace{\ldots\ldots}_{11\text{ шт}}$

$C_{11}^1 + C_{11}^2 + \ldots C_{11}^{10} = 2^{11} - 2 = 2046$

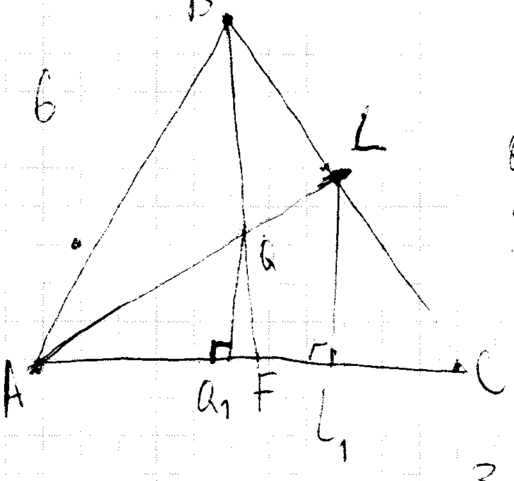
3) $9\underbrace{\overset{0\text{ или }9}{\ldots}}_{1}\underbrace{555555}_{6}\underbrace{\ldots\ldots}_{10\text{шт}}$

$C_{11}^1 + \ldots C_{11}^{10} = 2^{11} - 2 = 2046$

Блок „555555" может идти по 11 местам

$N = 4094 + 11 \cdot 2046 = 28646$

6



$LL_1 - ?$

$QQ_1 = 9$

$S_{BQL} = \frac{1}{16} SABC$

$\frac{SAQF}{SALC} = \frac{\frac{1}{2} AF \cdot QQ_1}{\frac{1}{2} AC \cdot LL_1} =$

$\frac{3}{7} \cdot \frac{9}{LL_1} = \frac{27}{7LL_1}$

по т. Менелая: $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CB}{BL} \cdot \frac{LQ}{QA} = 1$

$\frac{CB}{BC} = \frac{QA}{LQ} \cdot \frac{4}{3}$