МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 6-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

Представим $1 = \log_{\sqrt{x+3}-x}\sqrt{x+3}-x$.

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>0 \\ x+5>0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2})\setminus\{1\}$

1) $\sqrt{x+3}>x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0 \\ x+3>x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x+3>0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-x-3<0 \end{cases} \\ x\in(-3;0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[0;\frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x\in(-3;0) \end{array}\right. \Rightarrow x\in(-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2})$

$x^2-x-3<0$. $D=1+12=13 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x\in(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2})$

3) $\sqrt{x+3}\neq x+1$

$\begin{cases} x+1>0 \\ x+3\neq x^2+2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq -2 \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\neq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

(Так как для f(x) возрастающ.

$f(a)>f(b) \Rightarrow (a-b)(f(a)-f(b))>0$

для $\log_a b > \log_a c$

$(a-1)(b-c)>0$.

1 случай: $\sqrt{x+3}-x>1$

$(\sqrt{x+3}-x-1)((x+5)-(\sqrt{x+3}-x)) \geq 0$

Т.к. $\sqrt{x+3}>x+1 \Rightarrow$ первая скобка $>0$.

$\begin{cases} x+5-\sqrt{x+3}+x\geq 0 \\ \sqrt{x+3}>x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}\leq 2x+5 \\ \sqrt{x+3}>x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in[-2;+\infty) \\ x\in(-3;1) \end{cases} \Rightarrow x\in[-2;1)$

1) $\sqrt{x+3}\leq 2x+5$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

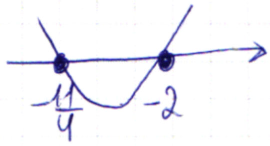


(Нумеровать только чистовики)

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+5\ge 0 \\ x+3\ge 0 \\ x+3 \le 4x^2+20x+25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{5}{2} \\ x\in(-\infty;-\frac{11}{4}]\cup[-2;+\infty)\end{cases} \Rightarrow x\in[-2;+\infty)$

$4x^2+19x+22\ge 0$

$D=361-352=9 \Rightarrow$




$x=\frac{-19\pm 3}{8}=\left[\begin{array}{l}-2\\ -\frac{11}{4}\end{array}\right.$

2) $\sqrt{x+3}>x+1$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1\\ x+3>x^2+2x+1\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ x>-3\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[-1;1)\\ x\in(-3;-1)\end{array}\right. \Rightarrow x\in(-3;1)$

$x^2+x-2<0 \Rightarrow x\in(-2;1)$

2 случай: $f(x)$ убывающая. $\Rightarrow \sqrt{x+3}-x<1 \Rightarrow \sqrt{x+3}<x+1$.

$\begin{cases}\sqrt{x+3}<x+1\\ x+5\le\sqrt{x+3}-x\end{cases}$ (аналогично случ. 1) $\Rightarrow \begin{cases}x\in(1;+\infty)\\ x\in[-\frac{5}{2};-2]\end{cases} \Rightarrow \varnothing$.

1) $\sqrt{x+3}<x+1$

$\begin{cases}x>-1,\ x\ge -3\\ x+3<x^2+2x+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1\\ x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)\end{cases}\Rightarrow x\in(1;+\infty)$

2) $\sqrt{x+3}\ge 2x+5$

$\begin{cases}x\ge -\frac{5}{2},\ x\ge -3\\ x+3\ge 4x^2+20x+25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -\frac{5}{2}\\ x\in[-\frac{11}{4};-2]\end{cases}\Rightarrow x\in[-\frac{5}{2};-2]$

$4x^2+19x+22\le 0$ (см. пред)

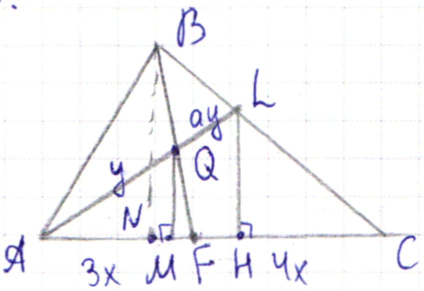
$x\in[-\frac{11}{4};-2]$

С учетом ОДЗ: $x\in[-2;1)$.

Ответ: $x\in[-2;1)$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.




Дано: $\triangle ABC$

$AF:FC=3:4$, $F\in AC$

$L\in BC$

$BF\cap AL=Q$

$\dfrac{S_{BQL}}{S_{BAC}}=\dfrac{1}{16}$

$\rho(Q;AC)=9=QM$

$\rho(L,AC)-?$, $=LH$.

Решение:

1) Пусть $AF=3x$, $FC=4x$, $AQ=y$, $QL=a\cdot y$

Тогда из подобия $\triangle AQM$ и $\triangle ALH$ ($QM\perp AC$, $LH\perp AC$, $\angle A$ общий) $\dfrac{LH}{QM}=\dfrac{LA}{QA}=\dfrac{(a+1)y}{y}=a+1$.

2) $S_{\triangle BQL}=\frac{1}{2}BQ\cdot QL\cdot\sin\angle BQL$. $\angle BQL=\angle AQF$ (вертикальные) $=>$

$=> S_{\triangle AQF}=\frac{1}{2}AQ\cdot QF\cdot\sin\angle BQL => \dfrac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle AQF}}=\dfrac{BQ\cdot QL}{AQ\cdot QF}=\dfrac{BQ}{QF}\cdot a. =>$

$=> S_{\triangle AQF}=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot QM=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3x$,

$S_{\triangle AQF}=\dfrac{QF}{BQ}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot S_{\triangle BQL}=\dfrac{QF}{BQ}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{16}\cdot S_{\triangle ABC}$

3) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}h\cdot 7x$, где $h$ – высота $\triangle ABC$ из вершины $B$, $h=BN$

Из ~~побод~~ подобия $\triangle BNF$ и $\triangle QMF$ ($BN\perp AC$, $QM\perp AC$, $\angle F$ общий)

$\dfrac{BN}{QM}=\dfrac{BF}{QF} => \dfrac{QF}{BF}=\dfrac{QM}{BN}=\dfrac{9}{h}. => \dfrac{QF}{BQ+QF}=\dfrac{9}{h} => \dfrac{BQ}{QF}=\dfrac{h-9}{9}$

$S_{\triangle AQF}=\dfrac{9}{(h-9)}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{1}{2}h\cdot 7x=\dfrac{1}{2}9\cdot 3x => \dfrac{9\cdot 7\cdot h}{2\cdot 16\cdot a(h-9)}=\dfrac{9\cdot 3}{2} => a=\dfrac{7}{16\cdot 3}\cdot\dfrac{h}{(h-9)}$

4) Рассмотрим $\triangle ALC$ и прямую $BF$. Из теоремы Менелая:

$\dfrac{BC}{BL}\cdot\dfrac{LQ}{QA}\cdot\dfrac{AF}{FC}=1 => \dfrac{BC}{BL}\cdot a\cdot\dfrac{3}{4}=1 => \dfrac{BC}{BL}=\dfrac{4}{3a}=\dfrac{BL+LC}{BL}=1+\dfrac{LC}{BL} =>$

$=> \dfrac{LC}{BL}=\dfrac{4}{3a}-1=\dfrac{LH}{h}=\dfrac{(a+1)9}{h}$ (из подобия $\triangle LHC$ и $\triangle BNC$)

$$\begin{cases} \frac{4}{3a} - 1 = \frac{(a+1)9}{h} \\ \frac{16}{7}a = \frac{h}{3(h-9)} \end{cases} \Rightarrow \text{найдем } a.$$

Из 2): $3\cdot\left(1-\frac{9}{h}\right) = \frac{7}{16a} \Rightarrow 1-\frac{9}{h} = \frac{7}{16a\cdot 3} \Rightarrow \frac{9}{h} = 1-\frac{7}{16\cdot 3a}$

$\frac{4-3a}{3a} = (a+1)\cdot\frac{16\cdot 3a-7}{16\cdot 3a} \quad \Big|\cdot 3a,\ a\neq 0 \Rightarrow 4-3a = \frac{(a+1)(16\cdot 3a-7)}{16} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow 64-48a = 48a^2-7 \Rightarrow 48a^2+48a-71=0$~~

$\Rightarrow 64-48a = 48a^2+48a-7a-7 \Rightarrow 48a^2+89a-7=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-001
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

„0", „5", „9". „Склеим" шесть пятёрок в „одну" цифру, которую назовем $t$. Тогда нам нужно составить 13-ти-значное число, где будет присутствовать цифра $t$.

Всего способов составить 13-тизначное число из „0", „5", „9" и „$t$":

На первое место мы можем поставить цифру 3-мя способами (без „0") на остальные — 4. Всего способов $3 \cdot 4^{12}$.

Из них нас не устраивают те способы, где нет $t$, где одни „5" (и „$t$"), где нет или „0", или „9".

1) Одни „5" и „$t$": 1 способ.

2) ~~Оа~~ Нет „0": На 13 мест расставляем „5", „9" и „$t$" $\Rightarrow 3^{13}$.

3) Нет „9": На 1 место „5" или „$t$", на остальное 12 мест „5", „0" или „$t$": $\Rightarrow 2 \cdot 3^{12}$.

4) Нет $t$: кроме расстановок из „0", „5" и „9" нужно учесть места, где соберутся „5" подряд 6 раз, то есть, $t$.

Всего случаев без „$t$"

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№1.

$y=x^2$

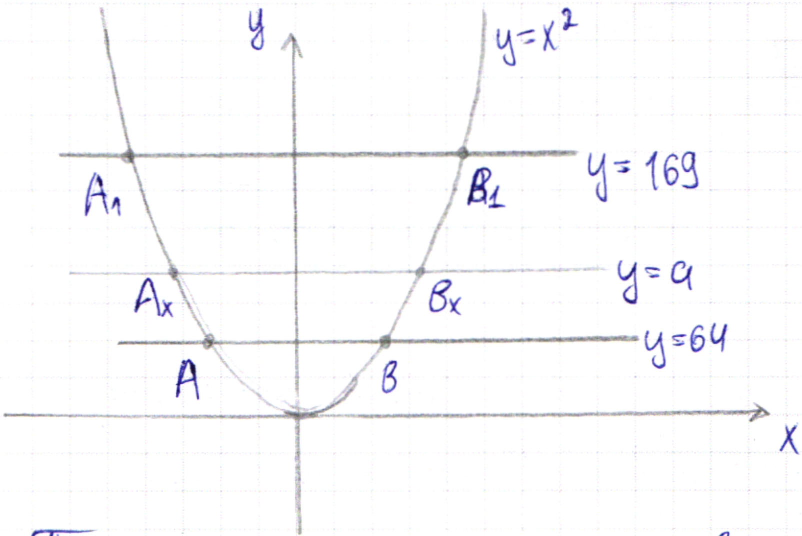
$y=169$

$y=64$

$y=a$

$\angle 120°$

$a-?$




Прямая $y=a$ может располагаться выше $y=169$, между $y=64$ и $y=164$ и ниже $y=64$.

Обозначим точки $A, A_1$ и $B, B_1$.

Тогда $A(-8;64)$ $\quad B(8;64)$ $\Rightarrow AB=16$

$A_1(-13;169)$ $\quad B_1(13;169)$ $\quad A_1B_1=26.$

$A_x(-\sqrt{a};a)$

$B_x(\sqrt{a};a)$ $\Rightarrow |\overrightarrow{A_xB_x}|=2\sqrt{a}.$ $\qquad \cos 120° = -\frac{1}{2}$

1) $(A_xB_x)^2 = AB^2 + A_1B_1^2 - 2AB\cdot A_1B_1\cdot\cos 120°$

$4a = 16^2 + 26^2 + 16\cdot 26$

$a = 8^2 + 13^2 + 8\cdot 13 = 337.$

2) $AB^2 = A_xB_x^2 + A_1B_1^2 - 2\cdot A_xB_x\cdot A_1B_1\cdot\cos 120°$

$16^2 = 4a + 26^2 + 2\sqrt{a}\cdot 26$

$8^2 = a + 13^2 + 13\sqrt{a} \Rightarrow a + 13\sqrt{a} + 105 = 0 \Rightarrow D = 169 - 420 < 0 \Rightarrow \varnothing$

3) $A_1B_1^2 = A_xB_x^2 + AB^2 - 2\cdot A_xB_x\cdot AB\cdot\cos 120°$

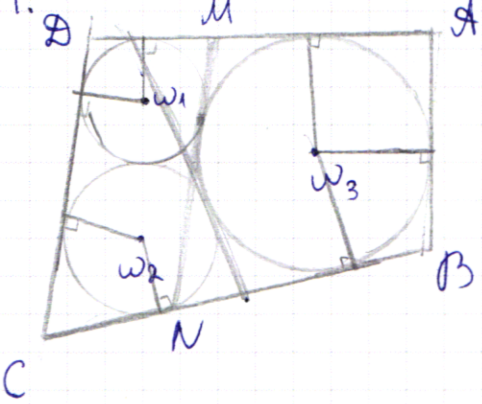
$26^2 = 4a + 16^2 + 2\sqrt{a}\cdot 16 \Rightarrow a + 8\sqrt{a} - 105 = 0 \Rightarrow D = 484 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{-8\pm 22}{2} \Rightarrow$

$\sqrt{a} = -4\pm 11 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a} = -15\ \varnothing \\ \sqrt{a} = 7\end{array}\right. \Rightarrow a = 49.$

Ответ: $a=49$, $a=337$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.




1) $AD+BC-AB-CD=10$

$r_1, r_2, r_3 - ?$

$MN+AB=AM+BN=AD+BC-MD-CN$

$\cancel{MD=2r_1,\ CN}=$

№2.

$g(x)=\sin5x\cdot\sin9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=\sin5x\cdot\sin9x-\sin^2 7x+\sin^2 x-4$

$\sin5x=\sin(3x+2x)=\sin3x\cos2x+\sin2x\cos3x=(1-2\sin^2x)(3\sin x-4\sin^3x)+$
$+2\sin x\cos x(4\cos^3x-3\cos x)=(1-2\sin^2x)(3\sin x-4\sin^3x)+2\sin x(1-\sin^2x)(4\cos^2x-$
$-3)=(1-2\sin^2x)\sin x(3-4\sin^2x)+2\sin x(1-\sin^2x)(1-4\sin^2x)=$
$=\sin x(3-6\sin^2x-4\sin^2x+8\sin^4x+2-2\sin^2x-8\sin^2x+8\sin^4x)=$
$=\sin x(16\sin^4x-20\sin^2x+5)=16\sin^5x-20\sin^3x+5\sin x$

$\sin9x=3\sin3x-4\sin^3 3x=3(3\sin x-4\sin^3x)-4(3\sin x-4\sin^3x)^3=(3\sin x-4\sin^3x)\cdot$
$\cdot(3-4(9\sin^2x-24\sin^4x+16\sin^6x))=\sin x(3-4\sin^2x)(\cancel{24\sin}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=x^2$

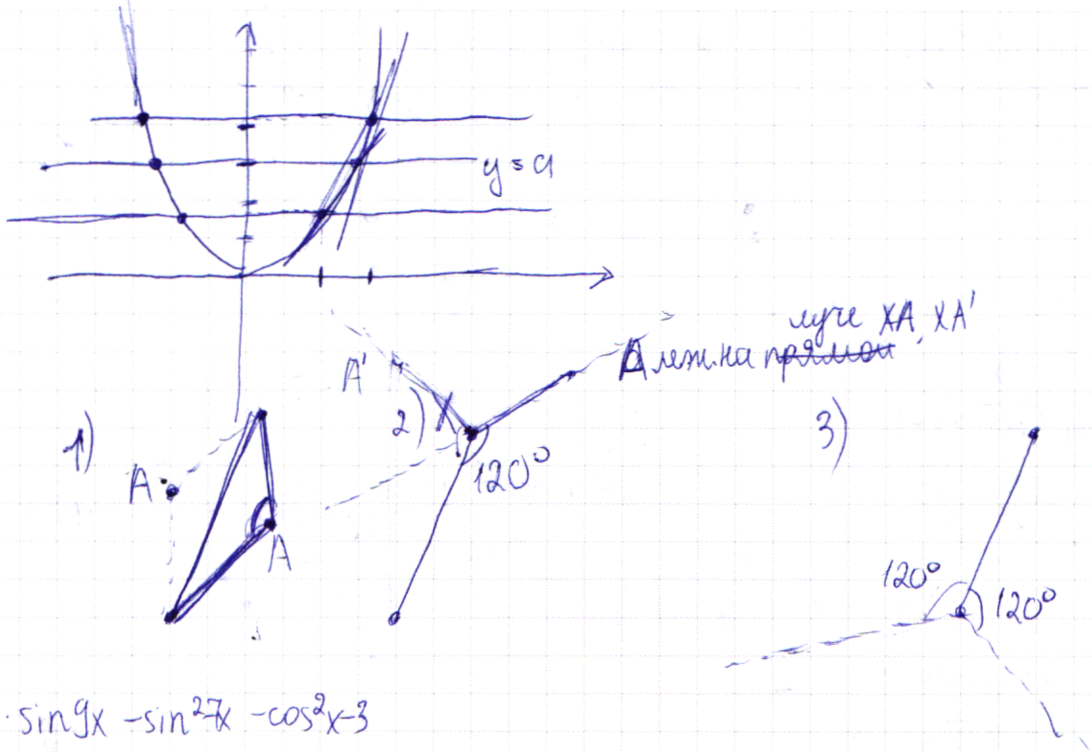
$y=169$

$y=64$

$y=a$

$\Delta$ с $\angle 120°$

$a-?$




№2.

$g(x)=\sin 5x\cdot \sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3$

$-\cos^2 x+1=\sin^2 x \Rightarrow g(x)=\sin 5x\cdot\sin 9x-\sin^2 7x+\sin^2 x-4$

$\sin 5x=\sin(3x+2x)=\sin 3x\cos 2x+\sin 2x\cos 3x=(1-2\sin^2 x)(3\sin x-4\sin^3 x)+2\sin x\cos x(4\cos^3 x-3\cos x)$

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ $\qquad \cos^4 x=(\cos^2 x)^2=(1-\sin^2 x)^2$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

~~g(x)~~ $\sin 5x=(1-2\sin^2 x)(3\sin x-4\sin^3 x)+8\sin x(1-\sin^2 x)^2-6\sin x(1-\sin^2 x)=$

$\sin 9x=\sin$ $\qquad \sin x\sin y-\cos x\cos y+\cos(x+y)=0$

$D=1+12=13$

$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $\quad \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

~~$\cos(\alpha+\beta)$~~ $=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\begin{cases}\alpha+\beta=18x\\ \alpha-\beta=10x\end{cases}$ $\qquad \cos\alpha+\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\alpha=28x$

$\alpha=14x$ $\qquad -\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 14x)$

$\beta=4x$

$\sin 9x=3\sin 3x-4\sin^3 3x=3(3\sin x-4\sin^3 x)-4(3\sin x-4\sin^3 x)^3$

2) $x+1>0$
$x>-1$
$x+3\neq x^2+2x+1$
$x^2+x-2\neq 0$
$D=1+8=9$
$x=\frac{-1\pm 3}{2}=\left[\begin{array}{l}1\\-2\end{array}\right.$

№5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1\geq \log_{\sqrt{x+3}-x}\sqrt{x+3}-x$

ОДЗ: $\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>0\\ \sqrt{x+3}-x\neq 1\\ x+5>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+3}>x\\ \sqrt{x+3}\neq x+1\\ x>-5\end{cases}$

1) $\sqrt{x+3}>x$

$\begin{cases}x\geq 0\\ x+3>x^2\\ x^2-x-3<0\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}x<0\\ x>-3\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}x\in(-3;0]\\ x\in[0;\frac{\sqrt{13}+1}{2})\end{array}\right.$

$x\in(-3;\frac{\sqrt{13}+1}{2})\setminus\{-2\}\setminus\{1\}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$19 \times 19 = 171 + 19 = 361$; $22 \times 88$; $4 \cdot 88 = 352$; $-\frac{11}{4}$

I $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} > x+1 \\ \sqrt{x+3} \leq 2x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\frac{5}{2};-1) \\ x\in(-1;1) \\ x\in(-2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in[-1$

$\begin{cases} x>-3 \\ \cancel{x+1>0} \\ 2x+5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x>-3 \\ x>-\frac{5}{2} \end{matrix}$

а) $x\in(-\frac{5}{2};-1)$

$x+3>x^2+2x+1$

$x^2+x-2<0$

$(x-1)(x+2)<0$

$-2 \quad 1$

б) $x\in(-1;+\infty)$

$x+3 \geq x^2+2x+1$

$x^2+x-2<0$

$x>-\frac{5}{2}$

$x+3<4x^2+20x+25$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$D=361-352=9$

$x=\frac{-19\pm3}{8}=\left[\begin{matrix}-2 \\ -\frac{11}{4}\end{matrix}\right.$

$-\frac{11}{4} \quad -2$

1) $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \end{cases}$

а) $\sqrt{x+3}>x+1$

$\left[\begin{matrix} \begin{cases} x+1<0 \\ x>-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1>0 \\ x+3>x^2+2x+1 \end{cases} \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} x<-1 \\ x>-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-1 \\ x\in(-2;1) \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} x\in(-3;-1) \\ x\in(-1;1) \end{matrix}\right. \Rightarrow x\in(-3;-1)\cup(-1;1)$

$x^2+x-2<0$

$\begin{cases} x\in(-3;-1)\cup(-1;1) \\ x\in[-2;+\infty) \end{cases}$

! $x\in[-2;-1)\cup(-1;1)$

2) $x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$

$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$

$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x \geq -3 \\ x+3 \leq 4x^2+20x+25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x\in(-\infty;-\frac{11}{4}] \cup [-2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in[-2;+\infty)$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$\log_2 4 > \log_2 2$

$(4-1)(4-2)1>0$

II $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x<1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \Rightarrow$

а) $\sqrt{x+3}<x+1$

$\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \\ x+3 \leq x^2+2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(1;+\infty)$

$x^2+x-2>0$

пересеч $\quad x\in\varnothing$

б) $\sqrt{x+3} \geq 2x+5$

$\left[\begin{matrix} \begin{cases} 2x+5 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{5}{2} \\ x \geq -3 \end{cases} \quad x\in[-3;-\frac{5}{2}] \\ \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+3 \geq 4x^2+20x+25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x\in[-\frac{11}{4};-2] \end{cases} \Rightarrow x\in[-\frac{5}{2};-2] \end{matrix}\right.$

$x\in[-3;-\frac{5}{2}]\cup[-\frac{5}{2};-2] \Rightarrow x\in[-3;-2]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5+\sqrt{x+3}-x)\geq 0$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(\sqrt{x+3}+5)\geq 0$

$x^2+x-2=0$

$x=-2$

$x=1$

1) $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}+5=0\\ \sqrt{x+3}=x+1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\varnothing\\ \begin{cases}x>-1\\ x+3=x^2+2x+1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}x>-1\\ x=-2\ \varnothing\\ x=1\end{cases}$ $x=1$

но ОДЗ $\Rightarrow \varnothing$

2) $\begin{cases}\sqrt{x+3}-x-1>0\\ \sqrt{x+5}+5>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cancel{x+3}\\ \cancel{\ldots}\\ \cancel{x>-3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>-3\\ 1\end{cases}$

Отв. $x\in(-3;-1)\cup(-1;1)$

а) $x>-1$

$x+3>x^2+2x+1$

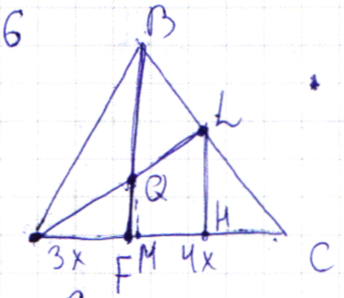
$x\in(-2;1)$

б) $x<-1$

$\log_{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)\geq 1$

$\cancel{\log_{<1}\left(\frac{5}{2}\right)}$

№6

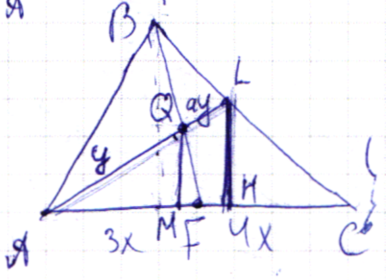



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}}=\frac{1}{16}$

$QM=9$

$LH-?$ $\left(\frac{AQ}{AL}-?\right)$

$\frac{7}{2}hx\ \frac{1}{16a}$




$S_{AFQ}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3x$

$S_{ACB}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot 7x$ $\Rightarrow \frac{S_{AFQ}}{S_{ABC}}=\frac{9\cdot 3}{7h}$

$\frac{S_{AFQ}}{S_{BQL}}=\frac{\cancel{aBQ}\ QF}{aBQ}$

$S_{\triangle BQL}=\frac{1}{2}QL\cdot BQ\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot ay\cdot BQ\cdot\sin\alpha$

$S_{\triangle AQF}=\frac{1}{2}AQ\cdot QF\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}AF\cdot QM=\frac{1}{2}yQF\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}3x\cdot 9$

$S_{AFQ}=S_{BQL}\cdot\frac{9}{(h-9)a}$

$\frac{1}{16}=\frac{(h-9)a\cdot 9\cdot 3}{7h\cdot 9}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}h\cdot AC$

$\cancel{QF}$ $a\cdot\frac{BQ}{QF}=\frac{S_{BQL}}{S_{AQF}}=\frac{2S_{ABC}}{16\cdot 3x\cdot 9}=\frac{S_{ABC}}{72x}=\frac{7\cdot xh}{2\cdot 72x}=\frac{7h}{2\cdot 72}$

$\cancel{\frac{BQ}{QF}}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 7x\cdot h$

$\frac{BQ}{QF}=\frac{h-9}{9}\Rightarrow a\cdot\left(\frac{h}{9}-1\right)=\frac{7h}{2\cdot 72}\quad |\cdot 9$

$a(h-9)=\frac{7}{16}h$

$\cancel{\frac{h}{LH}=\frac{BC}{LC}\Rightarrow h=\frac{BC}{LC}LH}$

Склеим „5" ..... шесть раз.

$3,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4 = 3\cdot 4^{11}$

Всего ост. $C_{13}^{4} - C_{12}^{3} - C$ (0 на 1 м.)

89

Можем поставить скл, „0", „9" или „5"

Минус случаи, когда только „5" или „9" или „0" без 1/2 из цифр.

1) Только 5: 1 случ.

2) „5" и „9": склейка, „9" и „5" $\Rightarrow 3^{12}$

3) „5" и „0": склейка, „0" и „5" $\Rightarrow 2\cdot 3^{11}$

~~$3 4^{11} - 3^{12} - 2\cdot 3^{11} - 1 = 3(4^{11} - 3^{11} - 2\cdot 3^{10}) - 1$~~

$3\cdot\left(C_{12}^{4} - \underbrace{C_{12}^{3}\cdot 2}_{\text{для 0 и для 9}}\right) = 3\cdot\left(\frac{12!}{4!\,8!} - 2\cdot\frac{12!}{3!\cdot 9!}\right) = 3\cdot\left(\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3}\right) =$

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

5 есть всегда как склейка

$= 3\cdot(11\cdot 9\cdot 5 - 40\cdot 11) = 3\cdot 11\cdot 5(9-8) = 33\cdot 5 = 165$ сл.

Если А: ~~$3\left(\frac{12!}{4!} - 2\cdot\frac{12!}{3!}\right) = 3(12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 - 2\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4) = \frac{12!}{4!}\cdot 3(1-$~~

$3\left(\frac{12!}{8!} - 2\cdot\frac{12!}{9!}\right) = 3\cdot(12\cdot 11\cdot 10\cdot 9 - 2\cdot 12\cdot 11\cdot 10) = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 3\cdot(9-2) = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 3\cdot 7$

$64 + 420 = 484$

$21 \times 12 = 252$, $252 \times 11 = 27720$

$22 \times 22 = 484$

$x^2 - x - 3$

$D = 1 + 12 = \sqrt{13}$

$9265 : 5 = 1853$

$1853 : 7 = 26$

$13^2 \quad 8^2$

$(8-13)(8+13)$ $(13-8)(13+8)$

$5\cdot 21$

105

$16^6 = 156^3$

$3^{11}\cdot 7$

$21\cdot 3^{10} = 21\cdot 9^5 = 21\cdot 9\cdot 81^2$

$81\cdot 81 = 6561$, $6561 \cdot 9 = 59049$, $59049\cdot 21 = 1305639$

$156\cdot 156 = 24336$, $\cdot 3 = 72108$

$89 \times 89 = 7921$

$4\cdot 48\cdot 7 =$ $48 \times 28 = 1344$, $1344 + 7921 = 9265$

$16\times 4 = 64$, $64 + 7 = 71$; $16 \times 3 = 48$

$95 \times 95 = 9025$; $90 \times 90 = 8100$

$105 \times 105$; 10000

$1 - \frac{LH}{h} = \frac{4}{3a}$

$\frac{LH}{h} = 1 - \frac{4}{3a} =$

$(a+1)9 = LH$

$9(a+1) = h - \frac{4h}{3a}$

$169 + 64 = 233$

$13 \times 8 = 104$, $104 + 233 = 337$

$\triangle LCA$: и $BF$ $\frac{BC}{BL}\cdot\frac{LQ}{QA}\cdot\frac{AF}{FC} = 1$

$a\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{BC}{BL} = 1$

$169 - 64$

$\frac{BL}{BC} = 1 - \frac{LC}{BC}$

$\frac{BC}{BL} = \frac{BC}{BC - LC}$

$\frac{LC}{BC} = \frac{LH}{h}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-001

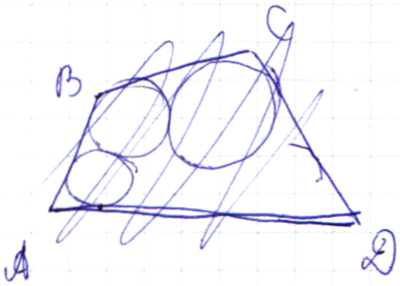
ШИФР

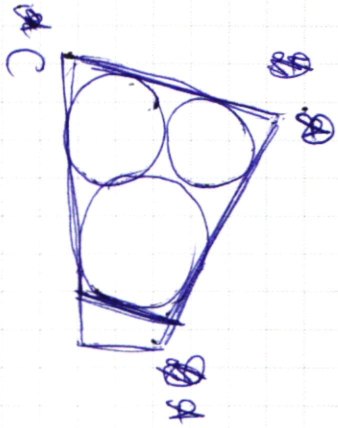
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~a-b ≡~~

$a-b \,\vdots\, 35 \Rightarrow$




☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)