МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 7-002

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

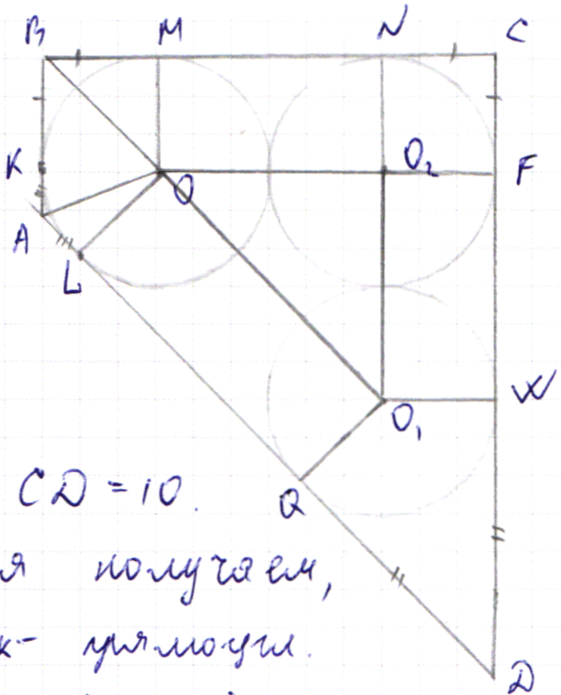
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) $AD + BC - AB - CD = 10.$

Из условия получаем, что 4угольник - прямоуг. трапеция. $(AB) \parallel (CD)$; $\angle DCB = \angle ABC = 90^\circ$.

$\triangle OO_2O_1$ - прямоуг., где $OO_2 = 2R = O_2O_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по Th. Пифагора $OO_1 = 2\sqrt{2}R$.

$OMNO_2$ - прямоугольник $\Rightarrow MN = 2R$.

O_2FWO_1 - прямоугольник $\Rightarrow FW = 2R$

$OLQO_1$ - прямоугольник $\Rightarrow LQ = 2\sqrt{2}R$.

Пользуясь св-вом касательных провед. к одной окр. имеем: $AK = AL = x$; $CN = CF = z$
$DQ = DW = y$; $BK = BM = z$

$AD + BC - AB - CD = 10$

$\cancel{x} + \cancel{y} + 2\sqrt{2}R + \cancel{z} + z + \cancel{2R} - \cancel{x} - \cancel{z} - x - y - \cancel{2R} = 10$

$2\sqrt{2}R = 10 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$

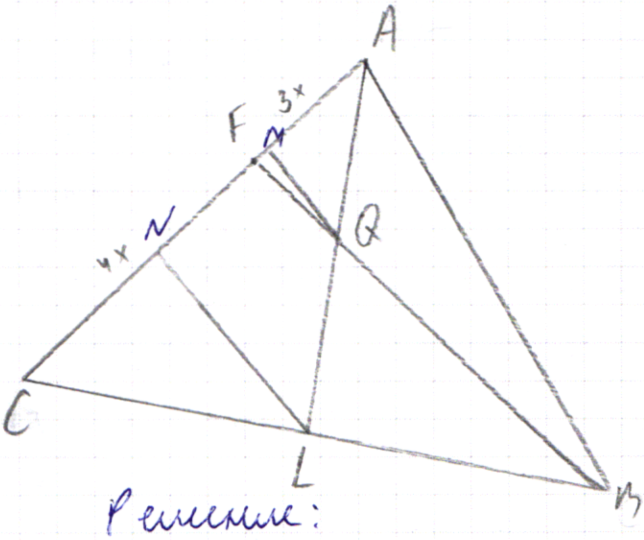
Ответ: $R = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$

б) ω_3 - вписана с $\angle ABC \Rightarrow \angle ABO = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

$BC = 2R + R + R = 4R$

$AB = R + AK$.

в)



N6 Дано: $\triangle ABC$

$F \in [AC]$; $AF : FC = 3 : 4$

$L \in [BC]$.

$[BF] \cap [AL] = Q$

$S_{AQL} : S_{ABC} = 1 : 16$

$\rho(Q ; (AC)) = 9 = QM$

Найти: $\rho(L ; (AC)) = LN$

Решение:

$\frac{S_{CFB}}{S_{ABC}} = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7} \Rightarrow S_{CFB} = \frac{4}{7} S_{ABC}$

$S_{CFQL} = S_{CFB} - S_{LQB} = \frac{4}{7} S_{ABC} - \frac{1}{16} S_{ABC} = \frac{57}{112} S_{ABC}$

$\triangle QMA \sim \triangle LNA$ (по 2 углам)

$\frac{NL}{MQ} = \sqrt{\frac{S_{LNA}}{S_{QMA}}} \Rightarrow NL = 9 \cdot \sqrt{\frac{S_{LNA}}{S_{QMA}}} = 9 \cdot 2 = 18.$

Ответ: $NL = 18$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка [1; 35], [36; 70], [71; 105], [106; 140] [141; 175]. Разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое наименьш. значение может принимать сумма 25 выбр. чисел.

① Заметим, что сумма меньше, если Пиноккио выбирает из 5 промежутка [141; 175] числа 141, 142, 143, 144, 145. => $\Sigma = \underline{715}$

② Из 4 промежутка для того чтобы разность никаких двух выбр. чисел не делилась на 35, нужно выбрать 6, 7, 8, 9, 10 число в данном промеж.

111; 112; 113; 114; 115 => $\Sigma = \underline{565}$.

③ Из 3 промежутка нужно выбрать 11, 12, 13, 14, 15 число в этом промежутке

81, 82, 83, 84, 85 => $\Sigma = \underline{415}$

④ Из 2 промежутка выбираем 16, 17, 18, 19, 20. число в этом промежутке.

51, 52, 53, 54, 55 => $\underline{\Sigma = 265}$

⑤ Из 1 промежутка выбираем 21, 22, 23, 24, 25 число в этом промежутке.

$21,\ 22,\ 23,\ 24,\ 25 \Rightarrow \underline{\Sigma = 115}$

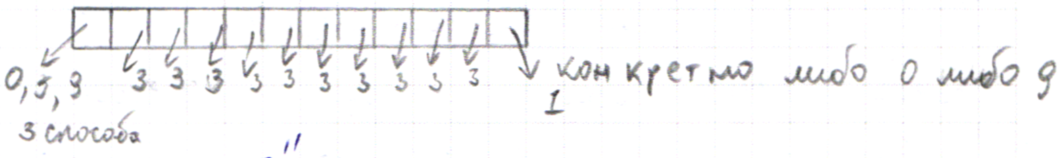
Итог сумма всех выбранных чисел равна: $115 + 265 + 415 + 565 + 715 = 2075$

Ответ: 2075

№3 18-значное число, содержащие только цифры „0", „5" и „9" (каждая цифра встречается хотя бы один раз), а цифр „5" шесть, и они идут подряд.

555555 → 555555

Кол-во способов в 18 значном числе расположить шесть идущих подряд чисел = 13.
Оставшиеся 12 клеток заполним так:



$3^{11} \cdot 1$

Однако число не может начинаться с 0, поэтому вычитаем 12. (13 − 1)

Итог: $13 \cdot 3^{11} - 12$

Ответ: $13 \cdot 3^{11} - 12$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

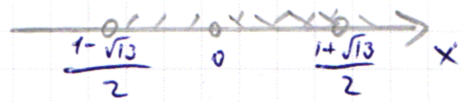
$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$$

ОДЗ: 1) $x+5>0$

$x>-5$

2) $\sqrt{x+3}-x>0 \Rightarrow \sqrt{x+3}>x$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq 0\\ x+3\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ x+3>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-3\leq x\leq 0\\ \end{array}\right. \Rightarrow x\in\left[-3;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$



3) $\sqrt{x+3}-x\neq 1$

$x+3\neq x^2+1+2x \Rightarrow x^2+x-2\neq 0$

$x\neq -2;\ x\neq 1$

Итог: $x\in[-3;-2)\cup(-2;1)\cup\left(1;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)-\log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)\geq 0.$$

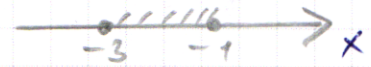
На ОДЗ это неравенство равносильно след:

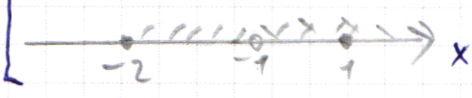
$$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5+x-\sqrt{x+3})\geq 0$$

① $\begin{cases}\sqrt{x+3}-x-1\geq 0\\ 2x+5-\sqrt{x+3}\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+3}\geq x+1 \text{ (а)}\\ \sqrt{x+3}\leq 2x+5 \text{ (б)}\end{cases}$

а) $\sqrt{x+3}\geq x+1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\leq 0\\ x+3\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+1>0\\ x+3\geq x^2+2x+1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \qquad x\in[-3;1].$$





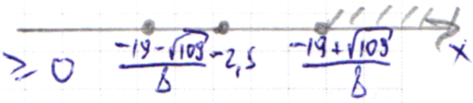
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

б) $\sqrt{x+3} \le 2x+5$

$$\begin{cases} 2x+5 \ge 0 \\ 4x^2+20x+25 \ge x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -2,5 \\ 4x^2+19x+22 \ge 0 \end{cases}$$



$x \in \left[\frac{-19+\sqrt{109}}{8}; +\infty\right)$

(а) объединяем с (б): знак $\{$

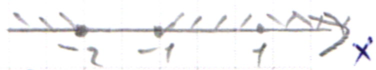
(*) $x \in \left[-3; \frac{-19+\sqrt{109}}{8}\right] \cup \left[\frac{-19+\sqrt{109}}{8}; 1\right] \Rightarrow x \in [-3; 1]$.

② $$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x - 1 \le 0 \\ 2x+5-\sqrt{x+3} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} \le x+1 \quad (в) \\ \sqrt{x+3} \ge 2x+5 \quad (г) \end{cases}$$

в): $\sqrt{x+3} \le x+1$

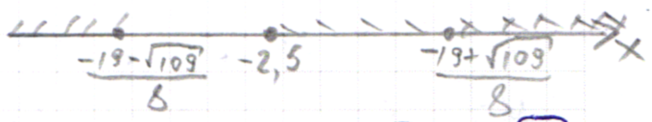
$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2+2x+1 \ge x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2+x-2 \ge 0 \end{cases}$$

$x \in [1; +\infty)$



г): $\sqrt{x+3} \ge 2x+5$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+5 \le 0 \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+5 \ge 0 \\ x+3 \ge 4x^2+20x+25 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-3; -2,5] \\ x \in \left[-\frac{19+\sqrt{109}}{8}; +\infty\right) \end{array} \right.$$



г: $x \in \left[\frac{-19+\sqrt{109}}{8}; +\infty\right)$

(в) объединяем с (г): знак $\{$

(**): $x \in [1; +\infty)$

(*) объединяем с (**) знак $[$

имеем: $x \in [-3; +\infty)$ - данный промежуток полностью в себе ОДЗ $\Rightarrow$ в ответ пойдёт ОДЗ

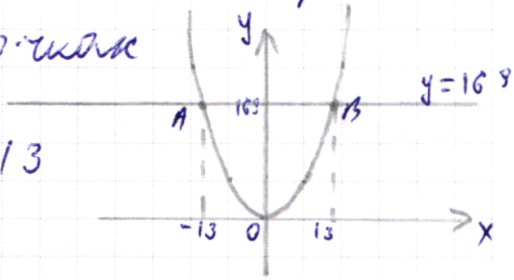
Ответ: $x \in [-3; -2) \cup (-2; 1) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

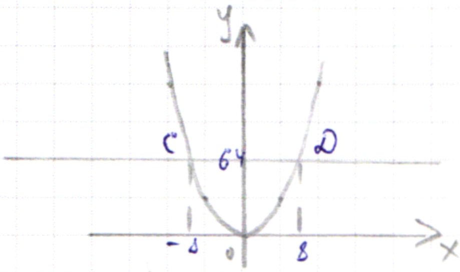
Парабола $y=x^2$ с вершиной в $(0;0)$, ветви направлены вверх

$\left.\begin{array}{l} y=169 \\ y=64 \\ y=a \end{array}\right\}$ прямые параллельные Ox и пересекающие $y=x^2$ в двух точках



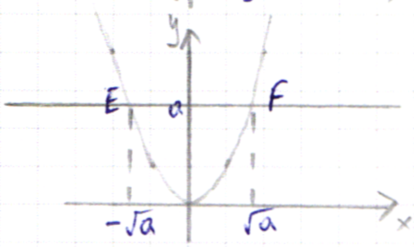
1. $\left.\begin{array}{l} y=169 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=169 \Rightarrow x=\pm 13$

Отрезок $AB = 13\cdot 2 = 26.$



2. $\left.\begin{array}{l} y=64 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=64 \Rightarrow x=\pm 8$

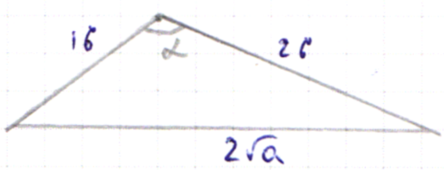
$CD = 8\cdot 2 = 16.$

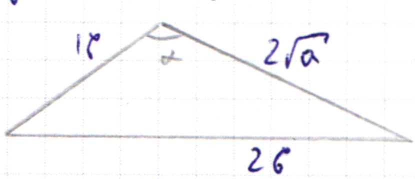


3. $\left.\begin{array}{l} y=a \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$

$EF = 2\sqrt{a}$, $a>0.$

Имеем три отрезка с тупой угол $\alpha=120^\circ \Rightarrow$ т.к. мы не знаем длину отрезка EF, то существуют 2 треугольника.





Первый треугольник: Th. cos: $(2\sqrt{a})^2 = 16^2+26^2-2\cdot16\cdot26\cdot\cos\alpha$

$4a = 256+676-2\cdot16\cdot26\cdot(-\frac{1}{2})$

$4a = 932+416 \Rightarrow 4a=1348 \Rightarrow a=337.$

Второй треугольник: Th. cos:

$$26^2 = 16^2 + 4a - \cancel{2 \cdot 16 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \cos 120^\circ}$$

$$676 = 256 + 4a + 32\sqrt{a} \quad | : 4$$

$$169 = 64 + a + 8\sqrt{a}$$

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 16 + 105 = 121$$

$$\sqrt{a_1} = -4 + 11 = 7 \Rightarrow a = 49$$

$$\sqrt{a_2} = -4 - 11 = -15 \text{ — не подходит.}$$

Ответ: при $a = 49$ и $a = 337$ получаем треугольник с углом 120°.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Найти наибольшее и наименьшее значения ф-ции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

Решение:

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(9x-5x) - \cos(9x+5x)\right) - \frac{1-\cos 14x}{2} - \frac{1+\cos 2x}{2} - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\frac{1}{2}\cos 14x} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\cos 14x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x) - 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\sin 3x \cdot \sin x - 4 = -\sin 3x \cdot \sin x - 4$$

Чтобы найти max и min ф-ции возьмём производную и приравн. к 0 $\Rightarrow g'(x) = \left(\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - 4\right)' = -\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \sin 4x + \frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x =$

$= \sin 2x - 2\sin 4x.$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x - 2\sin 4x = 0$$

$$\sin 2x - 4\sin 2x \cdot \cos 2x = 0.$$

$$\sin 2x(1 - 4\cos 2x) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ 1 - 4\cos 2x = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \cos 2x = \frac{1}{4}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \pi\cdot n\\ 2x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi n}{2}\\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi k.\end{array}\right. \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - 4 = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) - \frac{1}{2}\cos 2x - 4 =$$

$$= \cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - 4{,}5$$

Подставляем экст. ф-ции в последнее выражение, имеем:

1) $2x = \pi$

$g(x) = \cos^2 \pi - \frac{1}{2}\cos\pi - 4,5 = 1 + \frac{1}{2} - 4,5 = 1,5 - 4,5 =$
$= -3$

2) $2x = 2\pi$

$g(x) = \cos^2 2\pi - \frac{1}{2}\cos 2\pi - 4,5 = 0 - 0 - 4,5 = -4,5$

3) $2x = \arccos\frac{1}{4}$

$g(x) = \cos^2(\arccos\frac{1}{4}) - \frac{1}{2}\cos(\arccos\frac{1}{4}) - 4,5 =$
$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - 4,5 = -\frac{9}{2} - \frac{1}{16} = -\frac{73}{16}$

Ответ: $\max g(x) = -3$
$\min g(x) = -\frac{73}{16}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-002
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: 1) $x+5>0$
$x>-5$

$\sqrt{x+3}-x>0$
$\sqrt{x+3}>x$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ x+3\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0\\ x+3>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge -3\\ \\ x^2-x-3<0\\ x>0\end{array}\right.$$

$-3 \quad 0 \quad x$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad 0 \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad x$

$x^2-x-3<0$

$x\in\left[-3;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$

$\sqrt{x+3}-x\neq 1$
$x+3\neq 1+x^2+2x$
$x^2+x-2\neq 0$
$x\neq -2$
$x\neq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)-\log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)\geq 0$

$(a-1)(b-c)$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5+x-\sqrt{x+3})\geq 0$

~~Н.ф. $(\sqrt{x+3}-x-1)$~~

① $\begin{cases}\sqrt{x+3}-x-1\ge 0\\ 2x+5-\sqrt{x+3}\ge 0\end{cases}$

$$\begin{array}{r}715\\+565\\\hline 1280\\+415\\\hline 1695\\+265\\\hline 1960\\+115\\\hline 2075\end{array}$$

$x^2-x-3=0$
$D=1+12=13$
$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$D=1+12=13$
$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$$\begin{array}{r}21\\+22\\\hline 43\\+23\\\hline 66\\+24\\\hline 90\\+25\\\hline 115\end{array}$$

$$\begin{array}{r}141\\+142\\\hline 283\\+143\\\hline 426\\+144\\\hline 570\end{array}$$

$$\begin{array}{r}57\\+14\\\hline 71\end{array} \quad \begin{array}{r}0\\5\\\hline 5\end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 16 \\ \hline 132 \\ +22 \\ \hline 252 \end{array}$$

$D = 361 - 16 \cdot 22 = 361 - 252 = 109$

$$\begin{array}{r} 361 \\ -252 \\ \hline 109 \end{array}$$

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{109}}{8}$$

$\frac{30}{8} = 3$

$-19 - \sqrt{109}$

$-19 - 10$

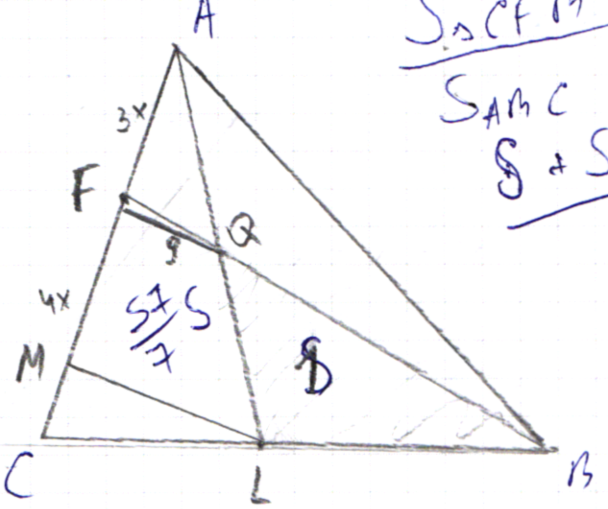
$\frac{29}{8} = 3 \ldots$

$$\begin{array}{r} 81 \\ +82 \\ \hline 163 \\ +83 \\ \hline 246 \\ +84 \\ \hline 330 \\ +85 \\ \hline 415 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 715 \\ +565 \\ \hline 1280 \\ +415 \\ \hline 1695 \\ +265 \\ \hline 1960 \\ +115 \\ \hline 2075 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 4 \\ \hline 64 \\ -7 \\ \hline 57 \end{array}$$

6)



$$\begin{array}{r} 36 \\ +15 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\frac{S_{\triangle CFB}}{S_{AMC}} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{S + S_{CFQL}}{16S} = \frac{4}{7}$$

$7S + 7S_{CFQL} = 64S$

$7S_{CFQL} = 57S$

$S_{CFQL} = \frac{57}{7}S$

35
70
135

7) $[1;35]$, $[36;70]$, $[71;105]$, $[106,140]$.
$[141;175]$

1 37 73 109 145

107 141

$$\begin{array}{r} 71 \\ +11 \\ \hline 82 \\ +83 \\ \hline 165 \\ +84 \\ \hline 249 \\ +85 \end{array}$$

71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81

$$\begin{array}{r} 145 \\ +144 \\ \hline 289 \\ +143 \\ \hline 432 \\ +142 \\ \hline 574 \\ +141 \\ \hline 715 \end{array}$$

106
107
108
109
110

$$\begin{array}{r} 51 \\ +52 \\ \hline 103 \\ +53 \\ \hline 156 \\ +54 \\ \hline 210 \\ +55 \\ \hline 265 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ +112 \\ \hline 123 \\ +113 \\ \hline 236 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ +112 \\ \hline 223 \\ +113 \\ \hline 336 \\ +114 \\ \hline 450 \\ +115 \\ \hline 565 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-002

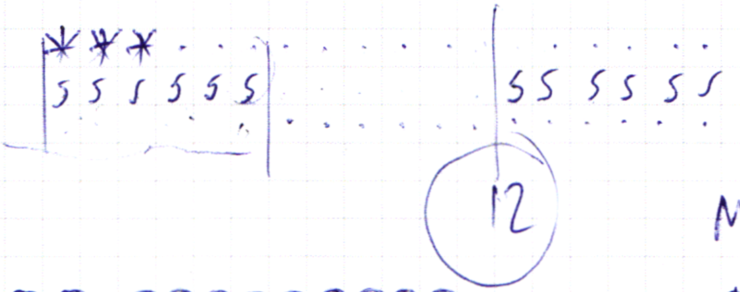
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) 18-знач число „0", „5", „9" хотя бы один раз.

+x ****



13 случаев.

M, A.

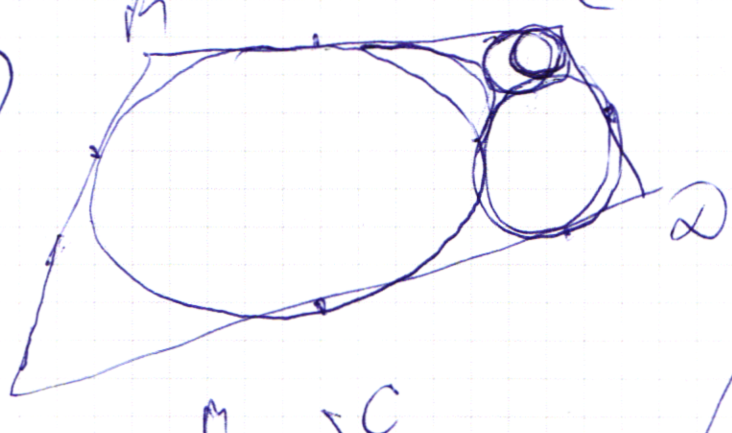
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 9

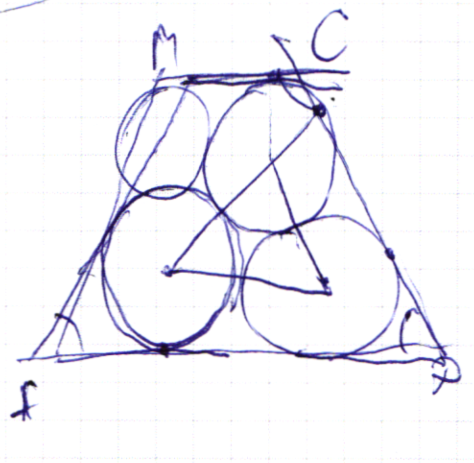
M A M A
M M M M
A A A A

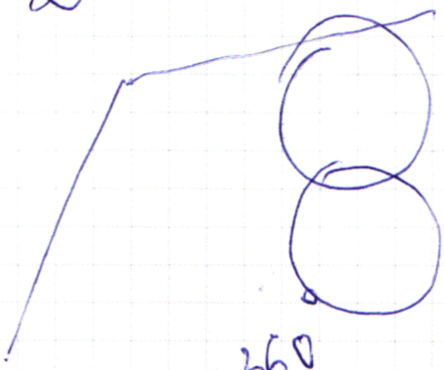
0, 9

AD+MC−AM−CD=10

4)







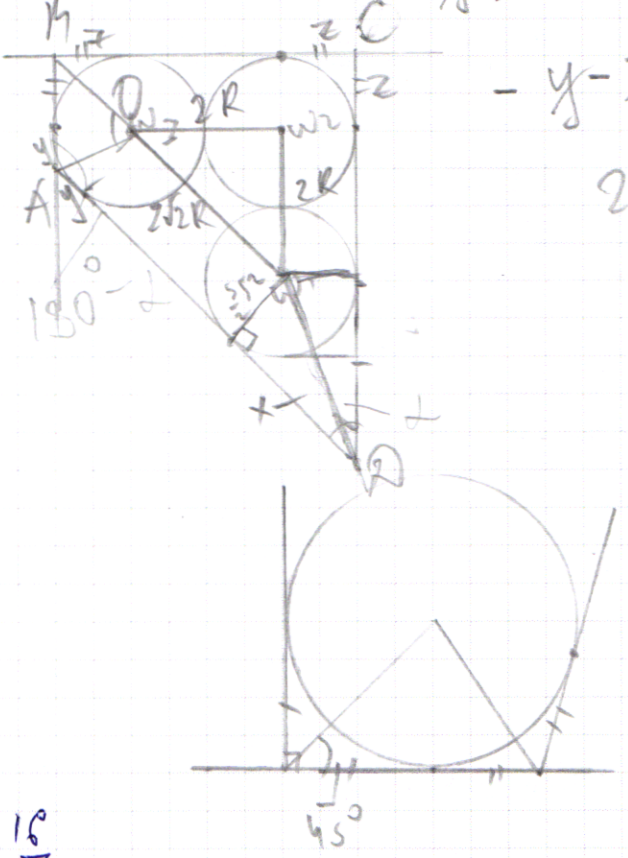
$4\alpha=360$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\cancel{y}+\cancel{x}+2\sqrt{2}R+\cancel{z}+\cancel{z}+\cancel{2R}$

$-y-z-z-x-2R$

$2\sqrt{2}R=10$

$\sqrt{2}R=5$

$R=\frac{5}{\sqrt{2}}$

$360^\circ=180^\circ$

$\times\begin{array}{r}16\\7\\\hline 112\end{array}$

$-\begin{array}{r}84\\7\\\hline 7\end{array}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)

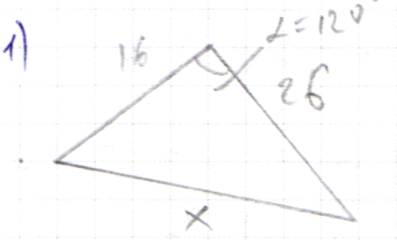
$y = x^2$ $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$

Найти: a при котором $\alpha = 120°$.

при $y = 169 \Rightarrow x = \pm 13 \Rightarrow$ длина отрезка $= 13 + 13 = 26$.

при $y = 64 \Rightarrow$ длина отрезка $8 + 8 = 16$.

1)



Th. cos

$x^2 = 16^2 + 26^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 676 + 256 + 416$

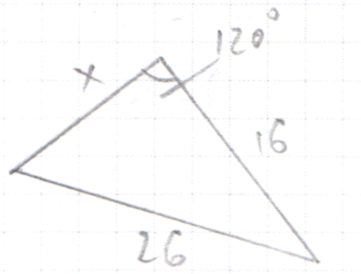
$x^2 = 932$

$x = \sqrt{932}$

$\frac{x}{2} =$ сторона $\Rightarrow \frac{\sqrt{932}}{2}$

$a_1 = \frac{932}{4} \Rightarrow a_1 = 233$

2)



$26^2 = 16^2 + x^2 - 2 \cdot 16 \cdot x \cdot \cos 120°$

$26^2 = 16^2 + x^2 + 16x$

$x^2 + 16x - 420 = 0$

$D_4 = 64 + 420 = 484$

$x_1 = -8 + \sqrt{484}$

$x_2 = -8 - \sqrt{484} \notin ОДЗ$

$a_2 = \left(\frac{-8 + \sqrt{484}}{2}\right)^2 = \frac{64 + 484 - 16\sqrt{484}}{4}$

$169 - 64 = 105$, $105 + 16 = 121$

$676 - 256 = 420$

$256 : 4 = 64$

$26 \cdot 16 = 416$, $416 + 156 + 52 = 676$

$676 : 4 = 169$

$676 + 256 = 932$

$932 : 4 = 233$

$420 : 15 = 28$

$26 \cdot 16$: $156 + 26 = 416$

$26 \cdot 26$: $156 + 52 = 676$

$256 + 676 = 932$, $932 + 416 = 1348$

$1348 : 4 = 337$

$337 \cdot 4 = 1348$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2) $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2}\left(\cos(9x-5x) - \cos(14x)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos 4x - \cos 14x\right) =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x -$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x - \frac{1-\cos 14x}{2} - \frac{1+\cos 2x}{2} - 3$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\frac{1}{2}\cos 14x} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\cos 14x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - 3$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x - 4.$

$\frac{1}{2}\left(\cos 4x - \cos 2x\right) - 4 =$

$= \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot \sin 3x \cdot \sin x - 4 = -\sin 3x \cdot \sin x - 4$

$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot(-\sin 4x) + \frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x$

$g'(x) = -\left((\sin 3x)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot \sin 3x\right) - 4$

$-\left(3\cos x \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin 3x\right) - 4$

$-\frac{1}{2}\cdot 4 \cdot \sin 4x + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \sin 2x = 0$

$-2\sin 4x + \sin 2x = 0$

$-2\cdot 2\cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$

$\frac{1}{2}\left(2\cos^2 2x - 1\right) - \frac{1}{2}\cos 2x - 4$

$\cos^2 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - 4$

$\cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - 4,5$

$4\frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{16}$

~~9x8=56~~ ~~64~~

73

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 5 5 5 5 5

13 случаев.

В ост. 12 местах выберем либо 0, либо 5 либо 9.

0,5,9 0,5,9

$\cancel{3^{12}}$ $3^{11}\cdot 12$

$13\cdot 3^{11} - 12$ т.к. число не начинается с 0.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)