МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 9-10

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пинокkио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-10
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

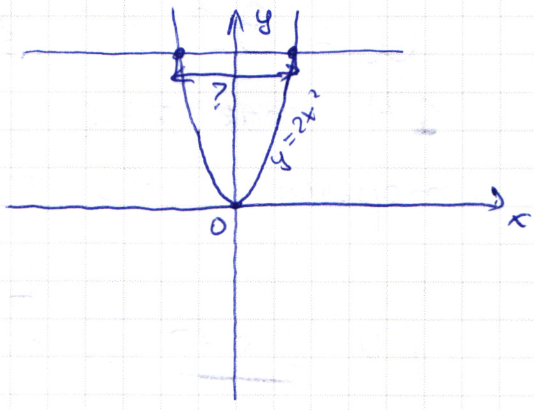
$y=2x^2$
$y=98$
$y=18$
$y=a$
$\angle 120^\circ$

$a=?$

Найдём, какие отрезки отсекает парабола от $y=98$ и $y=18$

$2x_1^2=98 \quad x_1^2=49 \quad x_1=\pm 7$
$2x_2^2=18 \quad x_2^2=9 \quad x_2=\pm 3$

длина первого отсечённого отрезка будет $|-7|+|7|=14$, а второго:
$|-3|+|3|=6$



отрезок, отсечённый от прямой $y=a$:
$2x_3^2=a \quad x_3^2=\frac{a}{2} \quad x_3=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

Отрезок будет длины $2\sqrt{\frac{a}{2}}$

$\Rightarrow$ надо составит Δ со сторонами $2\sqrt{\frac{a}{2}}$; 14 и 6.
и углом 120°

Если $2\sqrt{\frac{a}{2}}$ напротив 120°: по теор. cos:

$\left(2\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2 = 14^2+6^2-2\cos 120^\circ\cdot 14\cdot 6 = 196+36+84 =$
$= 280+36=316 \Rightarrow 4\frac{a}{2}=316$; $a=\frac{316}{2}=\underline{158}$.

$\angle 120^\circ$ не может быть напротив стороны 6, так. как. наибольший угол в Δ леж. напротив наибольшей стороны.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1
(Нумеровать только чистовики)

Если $\angle 120$ напротив 14: по теор. cos:

$$14^2 = 4\frac{a}{2} + 36 - 2\cos 120^\circ \cdot 6 \cdot 2\sqrt{\frac{a}{2}}$$

$196 = 2a + 36 + 12\sqrt{\frac{a}{2}}$; $160 = 2a + 12\sqrt{\frac{a}{2}}$;

$80 = a + 6\sqrt{\frac{a}{2}}$; $80 - a = 6\sqrt{\frac{a}{2}} \;\Big|\,{}^2$ Обе части ($a < 80$)

$$6400 + a^2 - 160a = 36 \cdot \frac{a}{2}$$

$$6400 + a^2 - 160a = 18a$$

$$a^2 - 178a + 6400 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 89^2 - 6400 = (89-80)(89+80) = 9 \cdot 169 = 3^2 \cdot 13^2$$

$a = 89 \pm 3 \cdot 13$, но a должно быть меньше ~~так как 14 лежит напротив наиболь~~

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 128 \text{ не подходит} \\ a = 40 \end{array}\right.$

при $a = 40$ сторона $2\sqrt{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{\frac{40}{2}} = 2\sqrt{20}$

$2\sqrt{20} < 2\sqrt{49} = 14$ $\Rightarrow$ сторона $2\sqrt{20}$ подходит

Ответ: $a = 40$; $a = 158$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) min, max $g(x)$, $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3 =$$

$$= \frac{2\cos^2 2x - 1 - \cancel{\cos 10x} + \cos 2x + 1 + \cancel{\cos 10x} + 1 + 6}{2} =$$

$$= \frac{2\cos^2 2x + \cos 2x + 7}{2} = \frac{2t^2 + t + 7}{2}, \text{ где } t = \cos 2x$$

Числитель – это ур-ие параболы, наименьшее значение которой (ветви вверх) в вершине $x_в = \frac{-b}{2a}$. $t_в = \frac{-1}{4}$ $\Rightarrow$ при $\cos 2x = -\frac{1}{4} \in [-1; 1]$

$$\Rightarrow \quad g_{min} = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 7}{2} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 7}{2} = \frac{7 - \frac{1}{8}}{2} =$$

$$= \frac{55}{16}.$$

начиная от $t_в$, при $t > t_в$ ф-ия параболы $f(t)^{(*)}$ монотонно возрастает $\Rightarrow$ чем больше t, тем больше значение ф-ии. при $t_2 > t_1 > t_в$ $f(t_2) > f(t_1)$

Макс. значение $\underline{t_м = 1}$ (т.к. $\cos 2x \le 1$, $t = \cos 2x$)

при $t < t_в$ с возрастанием t ф-ии параболы $f(t)$ монотонно убывает $\Rightarrow$ значение при $t_4 < t_3 < t_в$ $f(t_4) > f(t_3)$ минимальное значение $t_{min} = -1$ (т.к. $\cos 2x \geq -1$)

$\Rightarrow$ макс значение ф-ии при $t = -1$ либо при $t = 1$.

когда $t = -1$:

$g(x) = \frac{2-1+7}{2} = 4$

когда $t = 1$

$g(x) = \frac{2+1+7}{2} = 5$ $\quad 5 > 4$

$\Rightarrow g_{max} = 5$

Ответ: $g_{min} = \frac{55}{16}$; $g_{max} = 5$

(*) $f(t) = 2t^2 + t + 7$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-10

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 17-значные „0", „7", „8"

К-во вариантов 17-значных

Вариантов расставить подряд семь „8" — 11 штук (первая „8" стоит на местах 1-11)

семь „8" подряд стоящих буду записывать как $\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}$

рассмотрим случай, когда $\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}$ стоят в конце числа, т.е. наше число выглядит как $\underbrace{\sqcup\sqcup\ldots\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}}_{17.}$, где $\sqcup$ - место под цифру.

Вариантов растовить числа будет: $2\cdot3^9$ — на первое место либо „8" либо „7", а на остальные 9 оставшихся — любая из 3 цифр.

Если $\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}$ стоит перед последней цифрой числа: $\underbrace{\sqcup\sqcup\ldots\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\sqcup}_{17}$, то на последнее место можно поставить только „0" либо „7", ~~то~~ потому, что если ставить „8", то получится вариант, рассмотренный ранее, на первое место — „7" или „8".

Тогда кол-во вариантов будет $2^2\cdot3^8$. При располож. $\sqcup\sqcup\ldots\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\sqcup\sqcup$, на первое и на предпоследнее — 2 варианта, на последнее 3 так как если предпоследнее не 8, то такого вари-

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ажта ранее не рассматривалось, и на последнем месте может стоять 8. Кол-во вариантов: $2^2\cdot 3^8$

Действуя аналогично получаем:

$$
11\left\{\begin{array}{l}
\underset{2}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup} \;-\; 2\cdot 3^9 \text{ вариантов}\\
\underset{2}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\underset{2}{\sqcup} \;-\; 2^2\cdot 3^8 \text{ вариантов}\\
\underset{2}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\underset{2}{\sqcup}\sqcup \;-\; 2^2\cdot 3^8 \text{ вариантов}\\
\underset{2}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\underset{2}{\sqcup}\sqcup\sqcup \;-\; 2^2\cdot 3^8 \text{ вариантов}\\
\underset{2}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\underset{2}{\sqcup}\sqcup\sqcup\sqcup \;-\; 2^2\cdot 3^8 \text{ вариантов}\\
\vdots\\
\underset{2}{\sqcup}\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\underset{2}{\sqcup}\ldots\ldots\sqcup \;-\; 2^2\cdot 3^8 \text{ вариантов}\\
\underbrace{\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}\underset{2}{\sqcup}\ldots\sqcup\sqcup}_{17} \;-\; 2\cdot 3^9 \text{ вариантов}
\end{array}\right.
$$

(Так как на все места кроме места после $\overset{8}{\sqcup}\ldots\overset{8}{\sqcup}$ можно поставить любые 3 цифр.

Общая сумма вариантов: $2\cdot 2\cdot 3^9 + 9\cdot 2^2\cdot 3^8 = 4\cdot 3^9 + 12\cdot 3^9 = 16\cdot 3^9$ вариантов

Ответ: $16\cdot 3^9$ вариантов.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-10

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4) Дано:

ABCD – 4-уг.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, O_1, O_2, O_3 – их центры соотв.

ω_1 кас AD и DC,

ω_2 – DC, CB

ω_3 – CB, BA, AD

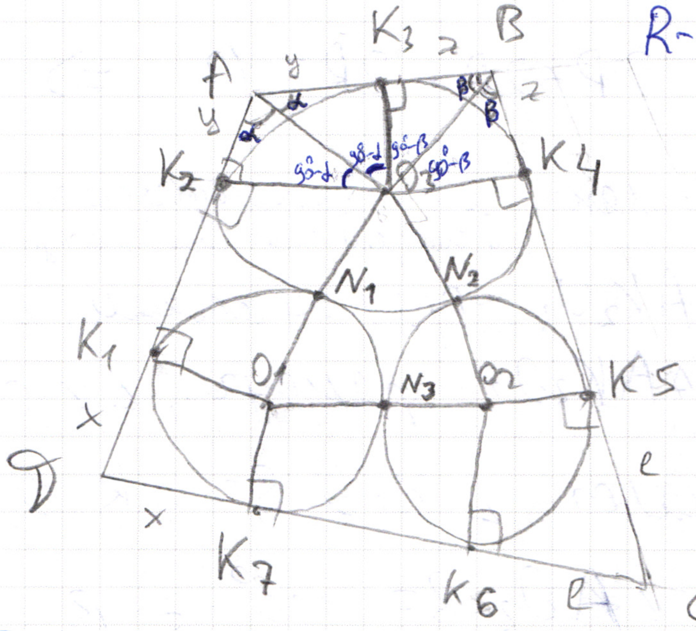
$AD+BC-AB-CD=12$

Найти:

R

$\angle AO_3B$, $O \equiv O_3$

AB – ?, $AO \cdot BO = 58$



Проведём мысленно общие кас. всех окр. и перпендикул. к ним из центров так как эти перпендикуляры пересек. в одной точке (точке касания, они леж. на 1 прямой ⟹ прямая соединяющая центры окр. проходит через т. касания.

Проведём радиусы – перпендикуляры из O_1 и O_3 на AD из O_3, O_2 – на BC, из O_1 и O_2 – на DC, обозн. точки как показано на рис. По св-ву отрезков кас. из 1 точки:

$DK_1 = DK_6 = x$, $AK_2 = AK_3 = y$, $K_3B = BK_4 = z$, $K_5C = K_6C = l$

Тогда $AD+BC-AB-CD=12 \implies x+y+K_1K_2+z+l+K_4K_5 - y - z - x - l - K_7K_6 = 12 \implies K_1K_2+K_4K_5 - K_7K_6 = 12$

Чет-угольник $K_1O_1O_3K_2$ – прямоуг. так как $O_3K_2 \perp AD$, $O_1K_1 \perp AD$ ⟹ $O_1K_1 \parallel O_3K_2$, $O_1K_1 = O_3K_2 = R$, ⟹ чет-ик #, но в нем есть $\angle 90°$ ⟹ он ⊡

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Аналог. $K_4O_3OK_5$ и $K_6O_2O_1K_7$ – прямоуг.

$\Rightarrow O_1O_3 = K_1K_2 = 2R = O_2O_3 = K_4K_5 = 2R =$

$= K_6K_7 = 2R$

$\Rightarrow 2R + 2R - 2R = 12 \Rightarrow 2R = 12 \Rightarrow \underline{R = 6}$

б) O_3 леж. на биссектрисах из углов A, B
проведем эти бисс. и обозн. равные углы α и β у A и B соответ.

В $\triangle AK_2O_3$ – прямоугольном, $\angle AO_3K_2 = 90° - \alpha$,

В $\triangle AK_3O_3$ – прямоуг., $\angle K_3O_3A = 90° - \alpha = \angle AO_3K_2$

Аналог. $\angle K_3O_3B = \angle K_4O_3B = 90° - \beta$

$\Rightarrow \angle AO_3B = 180° - \alpha - \beta$

$\angle O_1O_3O_2 = 60°$ ($\triangle O_1O_2O_3$ – равностор.)

$\angle K_2O_3N_1 = \angle K_4O_3N_2 = 90°$ (из доказ. прямоугольников)

$\Rightarrow \angle K_2O_3K_4 = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$

с др. стороны $\angle K_2O_3K_4 = 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta$

$\Rightarrow 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 120° \quad | : 2$

$90° - \alpha + 90° - \beta = 60°$

$180° - \alpha - \beta = 60°$ но, $\angle AO_3B = 180° - \alpha - \beta$

$\Rightarrow \underline{\angle AO_3B = 60°}$

в) $S_{\triangle AO_3B} = \frac{1}{2} \sin 60° \cdot AO_3 \cdot BO_3$ с др. стороны $S_{\triangle AO_3B} = \frac{1}{2} AB \cdot R$

приравняем: $\frac{1}{2} \sin 60° \cdot AO_3 \cdot BO_3 = \frac{1}{2} AB \cdot R \quad AB = \frac{AO_3 \cdot BO_3 \sin 60°}{R}$

$\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{58}{6} = \frac{29}{2\sqrt{3}}$

Ответ: а) $R = 6$ б) $\angle AO_3B = 60°$ в) $AB = \frac{29}{2\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $[1;45], [46;90], [91;135], [136;180]; [181;225]$

Если разность любых двух не делится на 45, то они имеют разные остатки при делении на 45 (все 30 выбранных). Наименьшее значение суммы — когда остатки от деления на 45 будут 1, 2, 3, 4, 5, ..., 30. (0 не берем, т.к. 0 у последнего числа промежутка)

Заметим, что каждый промежуток начинается с числа, которое делится на 45 с остатком 1, а предпоследнее: с остатком 44.

Последнее число промежутка не будет в нашей сумме, будем брать числа меньше, в итоге сумма получится меньше. Тогда все 6 чисел из соответствующего промежутка запишем как 1) $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ 2) $45+n_7; 45+n_8; 45+n_9; \dots; 45+n_{12}$

3) $90+n_{13}; 90+n_{14}; 90+n_{15}; \dots; 90+n_{18}$ 4) $135+n_{19}; \dots; 135+n_{24}$

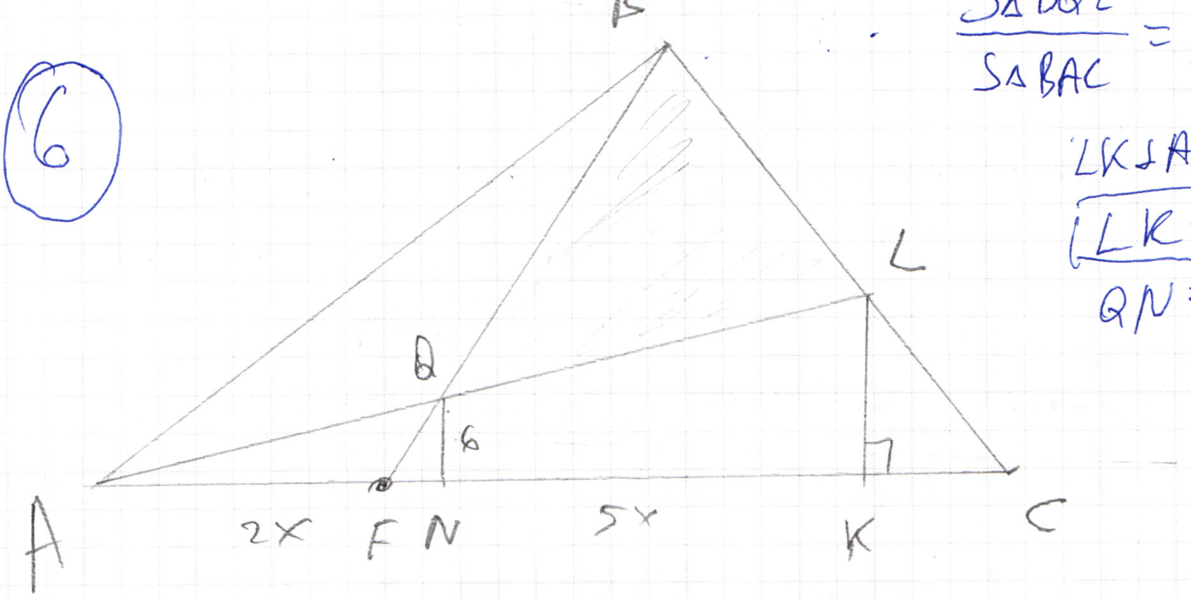
5) $180+n_{25}; \dots; 180+n_{30}$, где n_i — какой-то остаток из наших $(1,2,3,4,\dots,30)$, при любых n_i числа лежат в соотв. промежутке. Тогда сумма 30 чисел будет: $\frac{(1+30)\cdot 30}{2}+45\cdot 6+90\cdot 6+135\cdot 6+180\cdot 6=465+6\cdot 45+12\cdot 45+18\cdot 45+24\cdot 45=$

$= 465 + (6+12+18+24)\,45 = 465 + 60\cdot 45 = 465 + 30\cdot 90 =$

$= 465 + 2700 = 3165$

Ответ: 3165

6



$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{5}{12}$

$LK \perp AC$

$\boxed{LK - ?}$

$QN = 6$

Решение:

Обозн. $AF = 2x$, $FC = 5x$

$S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} H \cdot 2x \quad S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2} H \cdot 5x$, где H – высота из т. B. $\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle BFC}} = \frac{2}{5}$, обозн. $S_{\triangle ABF} = 2y$, $S_{\triangle BFC} = 5y$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 7y \quad \Rightarrow S_{\triangle BQL} = \frac{5}{12}\cdot 7y = \frac{35}{12} y$

$\Rightarrow S_{FQLC} = 5y - \frac{35}{12} y = \frac{25}{12} y$

$S_{\triangle AQF} = \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot 6 = 6x \quad S_{\triangle LAC} = \frac{1}{2} LK \cdot 7x$

$\Rightarrow S_{FQLC} = \frac{1}{2} LK \cdot 7x - 6x = \frac{25}{12} y$

$LK = \frac{\frac{25}{6} y + 12x}{7x} = \frac{25}{42}\frac{y}{x} + \frac{12}{7} =$

$= \frac{25}{42}\cdot\frac{H}{2} + \frac{12}{7}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} H \cdot 7x$

$S_{\triangle ABC} = 7y$

$7y = \frac{1}{2} H \cdot 7x$

$Hx = 2y \quad \frac{y}{x} = \frac{H}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-10

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$1 = \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

ОДЗ учтём в системе.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$\log_{(\sqrt{x+7}-x)}\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1 \\ x > -4 \\ \frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1 \\ 0 < \frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} < 1 \\ x > -4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -4 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x > 1 \quad \Rightarrow x > -3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x+4 \leq \sqrt{x+7}-x < 1 \quad \Rightarrow x > -4 \\ x > -4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+4 \geq \sqrt{x+7}-x > 1 \\ 0 < x+4 \leq \sqrt{x+7}-x < 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -4 \\ x^2+8x+16 \geq x+7 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1 \\ x+7 > x^2+2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -1 \\ x > -7 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x > -4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -7 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ x+7 \geq 4x^2+16x+16 \end{cases} \end{array}\right. \\ x+7 < x^2+2x+1 \\ x > -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -4 \\ x^2+7x+9 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1 \\ x^2+x-6 < 0 \; (-3;2) \end{cases} \\ x \in (-7;-1] \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x > -1 \\ \left[\begin{array}{l} -7 \leq x < -2 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2+15x+9 \leq 0 \end{cases} \; D < 0 \end{array}\right. \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$D = 49-36 = 13$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in (-1;2) \\ x \in (-4;-1] \end{array}\right. \\ x \in \left(-\infty; \frac{-7-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right) \end{cases} \\ \begin{cases} x > -1 \\ -7 \leq x < -2 \\ (-\infty;-3) \cup (2;+\infty) \end{cases} \quad x \in \varnothing \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: $x \in \left[\frac{-7+\sqrt{13}}{2}; 2\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-10

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-10

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\log_{(\sqrt{x+7}-x)}(x+4) \geq 1$

$x > -7$, $x > -4$, $\sqrt{x+7}-x > 0$, $\sqrt{x+7}-x \neq 1$

$\sqrt{x+7} \neq x+1$, $x > -1$

$x+7 \neq x^2+2x+1$

$x^2+x-6 \neq 0$

$x \neq -3 < -1$

$x \neq 2$

$x \neq 2$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$\log_{\sqrt{x+7}-x} \dfrac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1 \\ \dfrac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1 \\ 0 < \dfrac{x+4}{\sqrt{x+7}-x} < 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\sqrt{x+7} > x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x+7 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x+7 > x^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} -7 < x < 0 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-7 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$D = 1+28 = 29$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x \in (-7;0) \\ x \in [0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \end{array}\right.$

$x \in (-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$x \in (-4; 2) \cup$

$\cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+4 \geq \sqrt{x+7}-x > 1 \\ 0 < x+4 \leq \sqrt{x+7}-x < 1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4 \geq \sqrt{x+7} \\ \sqrt{x+7} > x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > \cancel{0}-4 \\ \sqrt{x+7}-x \geq x+4 \\ \sqrt{x+7}-x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-4; -1) \\ x \in (\frac{-7+\sqrt{13}}{2}; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-3; 2) \\ x \in (\frac{-7+\sqrt{13}}{2}; +\infty) \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x > -4 \\ x^2+8x+16-x-7 \geq 0 \quad x^2+7x+9 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1 \\ x+7 > 0 \end{cases} \quad x \in (-7; -1) \\ \begin{cases} x > -1 \\ x+7 > x^2+2x+1 \end{cases} \quad x^2+x-6 < 0 \quad x \in (-3; 2) \end{array}\right. \end{cases}$

$49-36 = 13$

$(-\infty; \frac{-7-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{-7+\sqrt{13}}{2}; +\infty)$

$\begin{cases} x > -4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \quad 1 > 0 \; x > -1 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ x+7 \geq 4x^2+8x+16 \end{cases} \quad 4x^2+7x+9 \leq 0 \quad x \in \varnothing \end{array}\right. \\ x > -1 \\ x+7 < x^2+2x+1 \end{cases}$

$D = 49-144 < 0$

$\left[\begin{array}{l} x \in (\frac{-7+\sqrt{13}}{2}; -1) \\ x \in (\frac{-7+\sqrt{13}}{2}; 2) \end{array}\right.$ $x \in [\frac{-7+\sqrt{13}}{2}; 2)$

$\times \begin{array}{r} 16 \\ 9 \end{array}$

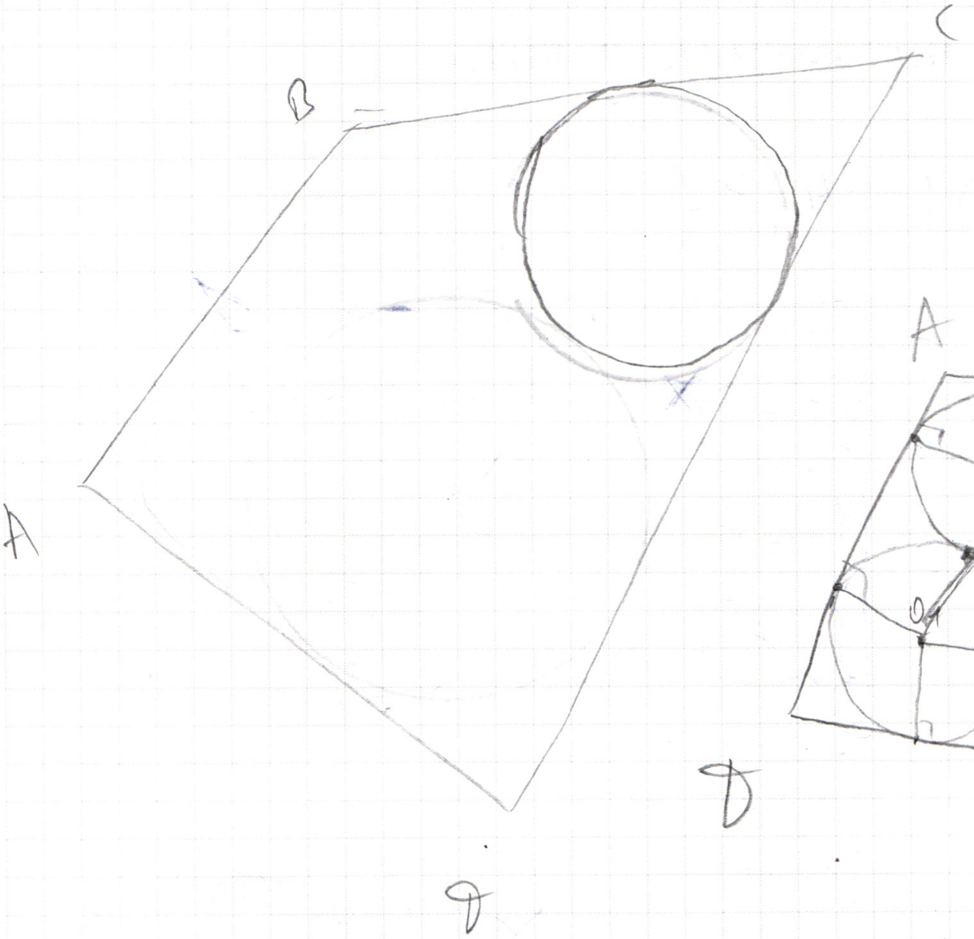
$\overline{144}$

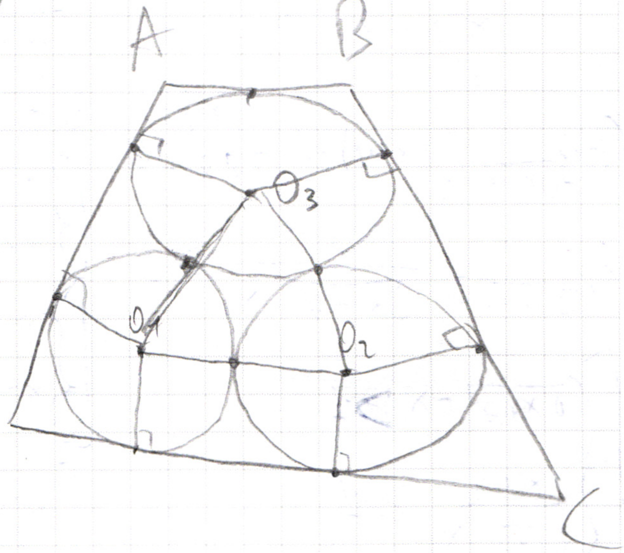
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

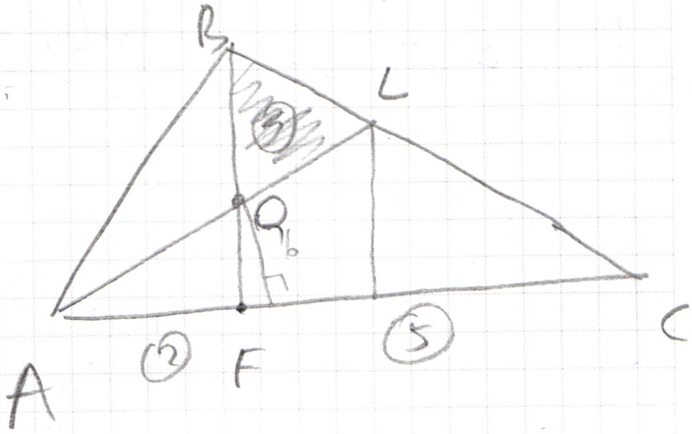
(Нумеровать только чистовики)





1 , 3, 5, 7, 9, 11   45, 47, 49, 51, 53, 55

136	138	140	142	144	146
− 45	− 45	− 45	− 45	− 45	− 45
91	93	95	97	99	101
92	94	96	98	100	102
− 45	− 45	− 45	− 45	− 45	− 45
47	49	51	53	55	57
48	50	52	54	56	58
− 45	− 45				
3	5	7	9	11	13
4	6	8	10	12	15



74 =

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) 17 знаков

8 – 7 штук

8, 7, 0

9 знаков – 3 варианта расставить 8888888

17 знаков – 11 вариантов

(первая 8 стоит на местах 1-11)

шт 8 — $10 \cdot 2^9 + 2^{10} = 6 \cdot 2^{10}$

8 шт 8 —

$$11 \begin{cases} \sqcup \ldots\ldots 88 - 2\cdot 3^9 \\ \sqcup \ldots 88\sqcup - 2^2\cdot 3^8 \\ \sqcup \ldots 88\sqcup\sqcup - 2^2\cdot 3^8 \\ \sqcup \ldots 88\sqcup\sqcup\sqcup - 2^2\cdot 3^8 \\ \sqcup \ldots 88\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup - 2^2\cdot 3^8 \\ 88888888\sqcup \ldots \sqcup - 2\cdot 3^9 \end{cases}$$

$2 \cdot 2 \cdot 3^9 + 9 \cdot 2^2 \cdot 3^8 = 4 \cdot 3^9 + 2^2 \cdot 3^{10} = 4 \cdot 3^9 + 12 \cdot 3^9 =$

$= 16 \cdot 3^9$

$\frac{29}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{29}{2\sqrt{3}}$

$$\begin{array}{r} \times\, 31 \\ 15 \\ \hline 155 \\ 31 \\ \hline 465 \end{array}$$

1) $2x^2=98$ $x^2=49$ $x=\pm 7$ $x_1 x_2=14$

$2x^2=18$ $x^2=9$ $x=\pm 3$ $x_3 x_4=6$

$2x^2=a$ $x^2=\frac{a}{2}$ $x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ $x_5 x_6=2\sqrt{\frac{a}{2}}$

Δ со сторока

$39+89=128$

$89-39=40$

$14 \times 6 = 84$, $14 \times 14 = 56 + 14 = 196$

$128 : 2 = 89$

$80 \cdot 80$

$40 \cdot 160$

$20 \cdot 320$

2) $g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4=$

$=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 10x)+3+\cos^2 x+\cos^2 5x=$

$=\frac{1}{2}(\cos^2 2x-\sin^2 2x)-\frac{1}{2}\cos 10x+3+\cdot\frac{\cos 2x+1}{2}+$

$+\frac{\cos 10x+1}{2}=$

$=\frac{2\cos^2 2x-\cancel{1}\cancel{-\cos 10x}+6+\cos 2x+1\cancel{+\cos 10x}\cancel{+1}}{2}=$

$=\frac{2\cos^2 2x+\cos 2x+7}{2}$ $\frac{1}{4}=\cos 2x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)