МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 9-9

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-9

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Найдем отрезки, которые парабола высекает на данных прямых. Для этого решим ур-я: ~~y=98~~ 1) $2x^2=98$ 1) $x=\pm 7$

2) $2x^2=18 \Rightarrow$ 2) $x=\pm 3$

3) $2x^2=a$ 3) $x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ — координаты точки пересечения прямой и параболы.

Как видно длина первого отрезка 14; второго 6; третьего $2\sqrt{\frac{a}{2}}$ или $\sqrt{2a}$. Это длины нашего треугольника с углом $120^\circ \Rightarrow$ напротив данного угла, т.к. он тупой $\Rightarrow$ угла больше него в Δ нет, лежит наибольшая среди сторон $\Rightarrow$ это либо сторона 14, либо $\sqrt{2a}$, т.к сторона длиной 6 меньше как минимум стороны длиной 14. Рассмотрим теперь 2 случая когда напротив угла 120° лежит 1) сторона $\sqrt{2a}$;

2) сторона 14.

Запишем Т. cos $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $2a = 14^2+6^2-2\cdot14\cdot6\cdot\cos120^\circ$.

$2a = 196+36+84$;

$2a = 196+120$

$a = 98+60 = 158$.

2) $14^2 = 2a+36-2\cdot\sqrt{2a}\cdot6\cdot\cos120^\circ$

$196 = 2a+36+6\sqrt{2a}$.

$2a+6\sqrt{2a}-160=0$.

Замена: $\sqrt{2a}=t$; $2a=t^2$;

$t^2+6t-160=0$.

$t_{1,2} = 10; -6$; -6 — не подходит ($\sqrt{2a}>0$) $\Rightarrow$ $2a=10^2$;

$a=50$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Ответ: $a = 158; 50$.

№3 Т.к. цифры „8" идут подряд и их ровно семь => будем считать их как одно целое, одна „большая цифра" => решение равносильно задаче, => ~~от~~ типа "как составить одиннадцатизначное число, с помощью цифр „0", „7" и „88...8".

На первом месте может стоять либо „7" либо „88...8", а на остальных любое из трех, но с условием, что „88...8" встречается только один раз, а „7" и „0" хотя бы один раз.

1) Закрепим цифру „88....8" на первом месте =>
=> составить таких чисел всего вариантов $N_1 = 2^{10} - 2$, где „-2" — вычитание случаев, когда в числе нету „0" или „7".

2. Переместим цифру „88...8" на любое со второго места ~~на~~ по 11-ое место => => теперь вариантов чисел $N_2 = 2^9 - 2$, так как на первом месте теперь будет только ~~одна~~ цифра „7";

Всего вариантов перемещения цифры „88...8" на место со второго по 11-тое — 10 =>
=> Всего кол-во семнадцатизначных ~~цифр~~ чисел удовлетворяющих условию задачи $N_0 = N_1 + 10N_2 = 2^{10} - 2 + 10 \cdot 2^9 - 20 = 2^{10} + 2^9 - 22$.

Ответ: $2^{10} + 2^9 - 22$.

№2. Упростим нашу ф-цию

$g(x)$ $\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - (1 - \cos^2 x) + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) - \frac{1}{2}(2\cos^2 5x - 1) + \cos^2 x + 3 + \cos^2 5x =$

$= \cos^2 2x - \cancel{\cos^2 5x} + \cos^2 x + \cancel{\cos^2 5x} + 3 = \cos^2 2x + \frac{\cos 2x + 1}{2} + 3 =$

$= \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + 3,5 = (\cos 2x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + 3\frac{1}{2} = (\cos 2x + \frac{1}{4})^2 + 3\frac{7}{16}$ =>

=> Получаем, что $g(x) = (\cos 2x + \frac{1}{4})^2 + 3\frac{7}{16}$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Наименьшее значение ф-ции будет, когда значение квадрата будет равно 0 => $g(x)_{min} = 0 + 3\frac{7}{16} = 3\frac{7}{16}$.

$-\frac{3}{4} \le \cos 2x + \frac{1}{4} \le 1\frac{1}{4}$ => максимальное значение выр-я будет, когда квадрат ~~cos 2x~~ $(\cos 2x + 1)^2$ будет максимально большим => при $\cos 2x + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$ =>

=> $g(x)_{max} = (1\frac{1}{4})^2 + 3\frac{7}{16} = (\frac{5}{4})^2 + 3\frac{7}{16} = \frac{25}{16} + \frac{55}{16} = \frac{80}{16} = 5$.

Ответ: $g(x)_{max} = 5$

$g(x)_{min} = 3\frac{7}{16}$.

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \ge 1$.

Найдем О.Д.З

$$\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \ne 1 \\ x+7 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ \sqrt{x+7}>x \\ \sqrt{x+7} \ne x+1 \\ x \ge -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x+7 \ne (x+1)^2 \\ \left[\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x+7 \ge x^2 \end{cases} \right. \\ x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-4 \\ x+7 \ne x^2+2x+1 \\ \left[\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2-x-7 \le 0 \end{cases} \right. \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x^2+x-6 \ne 0 \\ x \in (-\infty;0] \cup [4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4;-3) \cup (-3;0] \cup [4;+\infty)$$

$$\begin{cases} x \ge -4 \\ x \ne -3; 2 \\ x \in (-\infty; 4] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4;-3) \cup (-3;2) \cup (2;4].$$

Рассмотрим два случая: 1) $0 < \sqrt{x+7} - x \leq 1$;

2) $\sqrt{x+7} - x > x+1$

1) Рассмотрим первый случай:

$$0 < \sqrt{x+7} - x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} - x < 1 \\ x \in \text{О.Д.З.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} < x+1 \\ x \in [-4; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7 < x^2+2x+1 \\ x \in [-4; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty) \\ x \in [-4; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; 4] \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in [-4; -3) \cup (2; 4]. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{(x+7)} - x)$$

$$x+4 \leq \sqrt{x+7} - x.$$

$$\sqrt{x+7} \geq 2x+4.$$

$\Updownarrow$ на О.Д.З.

$$\left[\begin{array}{l} 2x+4 < 0 \\ \begin{cases} x+7 \geq (2x+4)^2 \\ 2x+4 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2. \\ \begin{cases} 4x^2 + 16x + 16 \leq x+7 \\ x \geq -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ \begin{cases} x \in \left[-\frac{9}{4}; -\frac{3}{4}\right] \\ x \geq -2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{3}{4}]. \Rightarrow$ С учетом О.Д.З $\Rightarrow x \in$ ~~$[-4; -\frac{3}{4}]$~~. $[-4; -3)$ ~~$\cup(-3; -\frac{3}{4}]$~~

2) Рассмотрим второй случай.

$\sqrt{x-7} - x > 1 \Rightarrow$ С учетом О.Д.З $x \in (-3; 2)$.

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x-7}-x}(\sqrt{x-7} - x.)$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) Из $\angle LBAN \Rightarrow$ по т. Фалеса (т.к $BF \parallel LN$) $\Rightarrow \frac{QL}{AQ} = \frac{NF}{AF}$.

$\frac{NF}{AF} = m.$

$\frac{k}{k+1} \cdot \frac{CF}{AF} = m$

$\frac{k}{k+1} \cdot \frac{5}{2} = m.$

$5k = 2m(k+1);$

$5k = 2mk + 2m$

$5k - 2mk = 2$

$k = \frac{2m}{5-2m}.$

5) $S_{\triangle BQL} = \frac{1}{2} BL \cdot QL \cdot \sin\angle BLQ$

$S_{\triangle ABL} = \frac{1}{2} BL \cdot AL \cdot \sin\angle BLQ$ $\Rightarrow \frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle ABL}} = \frac{QL}{AL} = \frac{m}{m+1}.$

6) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC$

$S_{\triangle ABL} = \frac{1}{2} AB \cdot BL \cdot \sin\angle ABC$ $\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BL}{BC} = \frac{k}{k+1}$

7) $\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{5}{12}$

Т.к. $k = \frac{2m}{5-2m} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{m \cdot \frac{2m}{5-2m}}{\left(\frac{2m}{5-2m}+1\right)(m+1)} = \frac{2m^2}{5(m+1)}.$

$24m^2 = 25m + 5$

$24m^2 - 25m - 5 = 0.$

$D = 1125 \Rightarrow m = \frac{25 + 15\sqrt{5}}{48}.$

$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$\Updownarrow$ на О.Д.З

$(2x+4)^2 \geq x+7$

$4x^2+16x+16 \geq x+7$

$4x^2+15x+9 \geq 0.$

$D = 81$

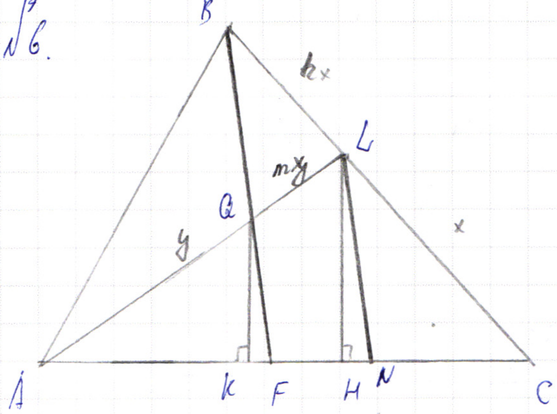
x_1 $4(x+\frac{3}{4})(x+3) \geq 0$

$x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ С учетом О.Д.З и „условий" второго случая $\Rightarrow x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

Ответ: $x \in [-4; -3) \cup [-\frac{3}{4}; 2)$

№6.



Дано: $\triangle ABC$.

$L \in BC$; $F \in AC$

$AF : FC = 2:5.$

$BF \cap AL = Q$

$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}.$

$QK \perp AC$; $QK = 6$;

$LH \perp AC$

Найти: LH.

Решение.

1. Чтобы найти LH нам надо узнать отношение $AQ : QL$.
2. Пусть $LN \parallel BF$; $N \in AC$;

   $\frac{BL}{LC} = k$; $\frac{QL}{AQ} = m.$
3. Из $\angle BCK \Rightarrow$ по т. Фалеса (т.к $BF \parallel LN$) $\Rightarrow$ $\frac{NF}{CN} = \frac{BL}{CL} = k \Rightarrow FN = \frac{kCF}{k+1}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8) ~~Из~~ $\triangle ALH \sim \triangle AQK$ по ~~трем~~ двум углам т.к. они прямоугольные $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ($\angle LAH$ - общий; $QK \perp AC$; $LH \perp AC$ $\Rightarrow$ $\frac{QK}{LH} = \frac{AQ}{AL} = \frac{1}{1+\frac{QL}{AQ}} = \frac{1}{1+m}$ $\Rightarrow$

9) $LH = \frac{QK \cdot AL}{AQ} = 6\,(m+1) = 6\,\frac{25+15\sqrt{5}}{48} = 8 \cdot \frac{(25+15\sqrt{5}}{8}$.

Ответ: $\frac{25+15\sqrt{5}}{8}$

№7. Пронумеруем числа в данных промежутках:

1) В первом промежутке $1 - 1_1$

$2 - 2_1$

$3 - 3_1$

$4 - 4_1 \ldots$

2) Во втором промежутке. $46 - 1_2$

$47 - 2_2$

$48 - 3_2 \ldots$

3.) В третьем $91 - 1_3$

$92 - 2_3$ и т.д., то есть каждое число будет иметь номер a_i, где a - порядковый номер этого числа в его группе (считая по возрастанию) i - номер группы.

4. Как видно $a_{i+1} - a_i = 45$. $\Rightarrow$ это означает, что среди выбранных 30 чисел нету чисел с одинаковым порядковым номером. $\Rightarrow$ Если $a-b=k$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_{i+m} - b_i = 45m + k = 45m+(a-b)$ $\Rightarrow$??

$a_{i+m} + b_i = 2b_i + a_{i+m} - b_i = 2b_i + 45m+(a-b) = 2b_i + 45m + k$

~~Пронумеруем~~ При сложении этих чисел => необходимо, чтобы $\sum b_i$ была наименьшая ~~и~~; $\sum k_i$ ~~бы~~ тоже =>

=> необходимо брать наименьшие возможные числа в группах =>

пусть в первой группе первые 6; во второй с 7 по 12, в третьей с 13 по 18 и т.д. =>

$\Rightarrow \sum a_i = (1+2+3+4+5+6) + (\cancel{5}2+53+54+55+56) + (103+104+105+106 \dots) \dots +$

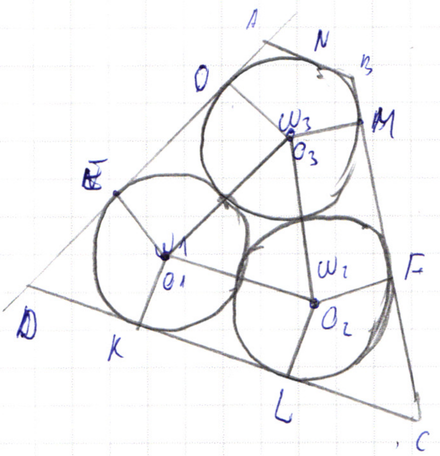
$+ \cancel{18}(205+206+207+208+209+210) = 1+2+3+4+5+6+\dots+30+ 6\cdot 45+$

$+12\cdot 45 + 18\cdot 45 + 24\cdot 45 = \sum_{i=1}^{n=0} \cancel{a_i}\ 1+2+3+4+\dots+30 + 45\cdot 60.$

3160

Ответ: $1+2+3+\dots+30+45\cdot 60 = \frac{1+30}{2}\cdot 30 + 2700 = \frac{1}{2}31\cdot 30 + 2700 = 460+2700 = \cancel{3160}$

№4.



1) Пусть $AB \cap \omega_3 = N$

$AD \cap \omega_3 = O$

$BC \cap \omega_3 = M$

$AD \cap \omega_1 = E$

$DC \cap \omega_1 = K$

$CD \cap \omega_2 = L$

$BC \cap \omega_2 = \cancel{O}F.$

2) Рассмотрим фигуру EOO_3O_1; => т.к. $EO_1 = OO_3$; $\angle OEO_1 = \angle EOO_3 = 90°$ (AD - касательная)

=> EOO_3O_1 - прямоугольник => $EO = O_1O_3 = 2R$, R - радиус ω_1.

3. Аналогично O_3MFO_2 и O_1O_2KL - прямоугольники => $MF = KL = 2R$.

4. Как отрезки касательных выходящих из одной точки к точка касания => $OA = NA$; $BN = BM$; $FC = CL$; $ED = DK$ =>

5. $AB + DC - AB - CD = \cancel{DE =} (AN + BN + DK + LC + KL) + DE + EO + AO - BM + MF + FC =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-9

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$= 2R = 12)$

$R = 6.$

Ответ: 6.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-9

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$24\cdot 5\cdot 4=$

$224\cdot 20=$

$$\frac{k^2}{(k+1)^2\left(\frac{6k+1}{k+1}\right)}=\frac{1}{12}$$

$12k^2=6k^2+7k+1$

$6k^2-7k-1=0$

$D=49+24=73$

$$\frac{\frac{2m^2}{5-2m}}{\left(\frac{2m}{5-2m}+1\right)(m+1)}=\frac{5}{12}$$

$$\frac{2m^2}{5(m+1)}=\frac{5}{12}$$

$24m^2=25m+5$

$24m^2-25m-5=0$

$D=625+\cancel{57}\,480=$

$=1125$

35×35: 175, 105, 1225

$x^2+x-6>0$

$3;\,{-2}$

$(3;+7)$

45, 90, 135, 180, 225, 170

1-6, 7-12, 12-18, 19-24, 25-30

$\sqrt{9}$

$D=$ $4;-3$

-3, 4

$-3;4$

$2-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$

$-3;2$

-3, 2

$-\infty;4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$16 \cdot 9$

$4x^2+15x+9 \leq 0$

$D = 225-144=81$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = -\frac{6}{8};\ -\frac{24}{8};\quad -\frac{3}{4};\ -3.$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)$

5

3.

$\sqrt{6}=1$

2.

$\frac{NF}{CF} = \frac{kx}{kx+x} = \frac{k}{k+1}.$

35×35

175.

105

1225

$625+20\cdot 24 = 625+480 = 1125.$

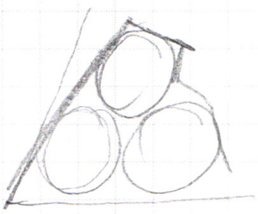
30+30.

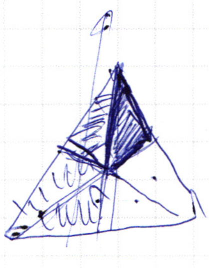
$\cancel{1125}\ |\ \cancel{25}$

2

$1125\ |\ 5$

$225\ |\ 5 \quad 15^2$





$15^2 \cdot 5$

$a - b = 3$

$\frac{920}{2} = 460$

46

$45+6=51$

$1+2+3+4+5+6+$

a_i

$45+7$

$m = \frac{FN}{AK} = \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{5}{2}$

$a_{i+1} - b_i = 45+2$

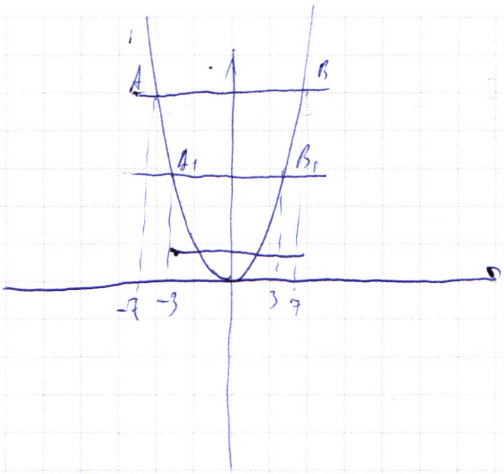
k

$625+480 = 1125$

$\frac{1}{4}$

$\frac{FN}{CF} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = \frac{k+1}{k+1}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AB = 14$

$A_1B_1 = 6.$

$A_2B_2 = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}.$

1) $x^2 = 49$ $\qquad x^2 = 9$ $\qquad x^2 = \frac{a}{2}$

$x = \pm 7$ $\qquad x = \pm 3$ $\qquad x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

x^2 $\quad 2a = 14^2 + 6^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 6$

$2a = 196 + 36 + 84$

$2a = 196 + 120.$

$a = 98 + 60 = 158.$

a

$196 = 2a + 36 + \sqrt{2a}\cdot 6$

$160 = 2a + 6\sqrt{2a}.$

$80 = a + 3\sqrt{2a}.$

$3\sqrt{2a} = t; \quad a = \frac{t^2}{2}$

$\frac{t^2}{2} + 3t - 80 = 0$

$t^2 + 6t - 160 = 0.$

$\cancel{D = 36+}$ $\quad t = -16; 10.$ $\qquad \sqrt{2a} = 10$

$2a = 100$

$a = 50.$

$\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)$

$\cos 4x - \cos 10x = -2 \sin\frac{14x}{2} \cdot \sin -\frac{6x}{2}$.

$\cos 4x - \cos 10x = \frac{1}{2}(\cos^2 2x - \sin^2 \cancel{10x}) - \cos^2 \cancel{10x} + \sin^2 \cancel{10x} =$

$=$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

$\frac{1}{2}(\cos^2 2x + 1 - \cos 2x)$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \frac{1-\cos 2x}{2} + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) - \cancel{\frac{1}{2}\cos^2 5x} + \frac{1}{2} + \cancel{\cos^2 5x} + 4 =$

$= \frac{2}{2}\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 =$

$= \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + 4 = \boxed{\cos^2 2x + \cos^2 x - \frac{1}{2} + 4} =$

$= (2\cos^2 x - 1)^2 + \cos^2 x + 3{,}5 = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x + 4{,}5$.

$4t^2 - 3t + 4{,}5 = 0$.

$8t^2 - 6t + 9 = 0$ $\qquad t_0 = \frac{3}{8}$ y

$D = 36 - 4 \cdot 8 \cdot 9$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-9

ШИФР

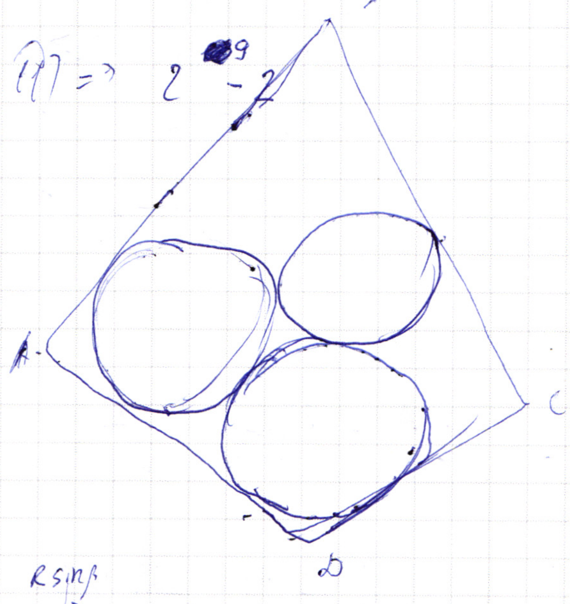
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

10

$2^{10}-2$

2) - (1) => $2^{9}-2$

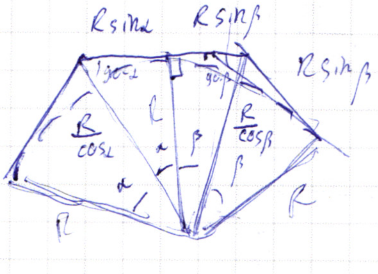


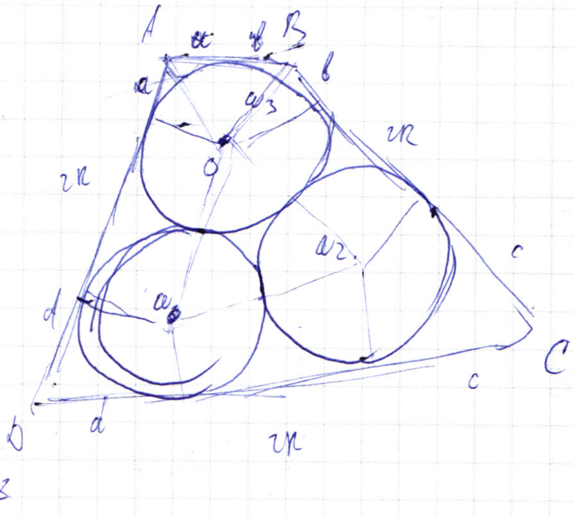
$AD+BC-AB-CD=12$

$2R+2R-2R=12$

$R=6$

$\alpha+\beta-?$





$(R^2\sin\alpha+R^2\sin\beta)^2=$

$=\frac{R^2}{\cos^2\alpha}+\frac{R^2}{\cos^2\beta}-\frac{2R^2}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}\cdot\cos(\alpha+\beta)$

$R^2\sin^2\alpha+2R^2\sin\alpha\sin\beta+R^2\sin^2\beta=\frac{R^2}{\cos^2\alpha}$

$(\sin^2\alpha+\sin\beta)^2=\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}-\frac{2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x-7}-x} \frac{(x+4)}{\sqrt{x+7}-x} \geq 0$

O.D.З

1) $\begin{cases} 0<\sqrt{x-7}-x<1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x-7}-x>1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$

O.D.З. $x+4>0$

$\sqrt{x+7}-x>0$

$\sqrt{x+7}-x \neq 1$

$\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$

$a \geq b$. ?

$\sqrt{168} = 2\sqrt{79} \approx 2 \cdot 8.8$.

$16 \cdot 9 = 12^2$.

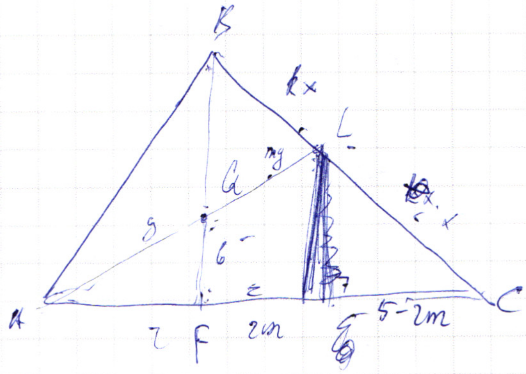
$\begin{cases} (2x+4)^2 \leq x+7 \\ (2x+4)^2 \geq x+7 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2+16x+16 \leq x+7 \\ 4x^2+16x+16 \geq x+7 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2+15x+9 \leq 0 \\ 4x^2+15x+9 \geq 0. \end{cases}$

$D = 225-144 = 81 = 9^2$

$x_{1,2} = \frac{15 \pm 9}{2} = 3; 12.$



$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = \frac{BL}{BC} = \frac{k}{k+1}$.

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAL}} = \frac{m}{m+1}$.

$\frac{m}{m+1}$ $\frac{m+1}{m}$ $\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{k}{k+1}$.

$\frac{km}{(k+1)(m+1)} = \frac{5}{12}$.

$\frac{z}{y} = \frac{z}{my}$

$z = 2m$

$\frac{kx}{2my}$ $\frac{x}{(5-2m)a}$

$k(5-2m) = 2m$

$m = \frac{5k}{k+1}$.

$\frac{k \cdot \frac{5k}{k+1}}{(k+1)(1+\frac{5k}{k+1})} = \frac{5}{12}$

$k = \frac{2m}{5-2m}$