

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

1-003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое наименьшее значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$y = x^2$$

Парабола пересекает прямые $y = 169$ и $y = 64$ в точках $x = \pm 13$ и $x = \pm 18$ соответственно. Сл-но т.к. по т. косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ и $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, то получим совокупность:

$$\begin{cases} a^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \\ 26^2 = a^2 + 16^2 - 16 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \\ 16^2 = a^2 + 26^2 - 26 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 676 + 256 - 208 \\ 676 = a^2 + 256 - 8a \\ 256 = a^2 + 676 - 13a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 212 \\ a^2 - 8a - 420 = 0 \\ a^2 - 13a + 420 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \sqrt{212} = \pm 2\sqrt{53} \\ a = 6,5 + 2\sqrt{109} \\ a = 6,5 - 2\sqrt{109} \end{cases}$$

$$1) D = 64 + 1680 = 1744, \quad 2) D = 64 - 169 - 1680 < 0,$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1609 \cdot 16} = 4\sqrt{109}$$

$$a_1 = \frac{13 + 4\sqrt{109}}{2} = 6,5 + 2\sqrt{109}$$

$$a_2 = \frac{13 - 4\sqrt{109}}{2} = 6,5 - 2\sqrt{109}$$

Ответ: $a = \pm 2\sqrt{53}; a = 6,5 \pm 2\sqrt{109}$.

№3.

Т.к. ~~число~~ цифр в числе 18 и из них в ~~шестёрке~~ - шестёрки, то посчитаем количество чисел,

в которых 5 стоит на первом месте: $k = 2^{(18-6)} =$

$$= 2^{12}$$

Теперь посчитаем перестановки шестёрок в этом числе: $x = (18 - 6 + 1) = 13$. Сл-но мы получим

$n = k \cdot x$ чисел, т.е. $n = 13 \cdot 2^{12}$, но т.к. все цифры должны присутствовать в числе, то исключим $2 \cdot x$

шмеев, и-но $n = 13 \cdot 2^{12} - 13 \cdot 2 = 13 \cdot (2^{12} - 2) = 4094 \cdot 13 =$
 $= 53222$ шмеев.

Ответ: $n = 53222$ шма.

№4.

Т.к. для того, чтобы разность чисел не была кратна какому-либо числу, нулем, чтобы разность ~~этих~~ остатков при делении на это число была равна нулю, то получим, что остатки взятые нами числа при делении на 35 не должны повторяться, и-но получается формула вида:

$$S = (a_1 + \dots + a_5) + 0 \cdot 5 \cdot 5 + (b_1 + \dots + b_5) + 5 \cdot 5 + (c_1 + \dots + c_5) + 2 \cdot 5 \cdot 5 + (d_1 + \dots + d_5) + 3 \cdot 5 \cdot 5 + (e_1 + \dots + e_5) + 4 \cdot 5 \cdot 5 = (a_1 + \dots + a_5) + (b_1 + \dots + b_5) + (c_1 + \dots + c_5) + (d_1 + \dots + d_5) + (e_1 + \dots + e_5) + 10 \cdot 5 \cdot 5,$$

и-но подставив в эту формулу максимальные значения из множества получим:

$$S = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (36 + 37 + 38 + 39 + 40) + ~~5~~(71 + 72 + 73 + 74 + 75) + (106 + 107 + 108 + 109 + 110) + (141 + 142 + 143 + 144) + 250 =$$

$$= 2452045.$$

Ответ: $S_{\min} = 2045$.

№5.

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1.$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$$

ОДЗ:

$$\sqrt{x+3}-x > 0.$$

$$\sqrt{x+3} > x.$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+3 > x^2 \\ x > 0 \\ x+3 > x^2 \\ x \leq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 - x - 3 < 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 3 < 0 \\ x \leq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \\ x > 0 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \\ x \leq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Leftrightarrow x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$$

$$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ 2x+5 \geq 0 \\ x+3 \leq 4x^2+20x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq -2,5 \\ 4x^2+19x+22 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2,5 \\ x \in (-\infty; -2,75] \cup [2; +\infty) \end{cases} \begin{matrix} (\Leftrightarrow x \in [-2,5; -2,75] \cup \\ \cup [-2; +\infty)) \end{matrix}$$

$$D = 361 - 352 = 9$$

$$x_1 = \frac{-19+3}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{8} = -2,75$$

Вернёмся к ОДЗ:

$$\begin{cases} x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ x \in [-2,5; -2,75] \cup [-2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2,5; -2,75] \cup \left[-2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-2,5; -2,75] \cup \left[-2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 5x - \sin 9x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3 = \sin(4x-2x) \sin(4x+x) - \\ &- \sin^2 4x - \cos^2 x - 3 = 2 \sin^2 2x \cos^2 2x - \sin^2 2x \cos^2 4x - \sin^2 4x - \\ &- \cos^2 x - 3 = \sin^2 2x (\cos^2 2x - 1) - \sin^2 2x \cos^2 4x - \cos^2 x - 3 \end{aligned}$$

Максимальное значение, которое может принимать $\sin^2 2x (\cos^2 2x - 1)$ это 1 и максимальное значение, которое может принимать $\sin^2 2x \cos^2 4x$ 1, как и максимальное значение $\cos^2 x$. И-но в нашей случае функция может иметь мак-

сильное значение $1+1+1+3=0$, и минимальное значение $всрд -1+1-1-3=-6$.

Ответ: $\min g(x) = -6$; $\max g(x) = 0$.

№ 6.

Дано: $\frac{S_{ABD}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$; $|ON|=9$; $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{3}{4}$

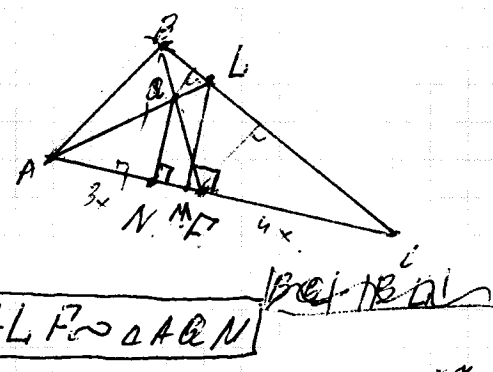
Найти: $|AM|$.

Решение:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BAC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{ABN} = \frac{3}{4} S_{BAC}.$$

$$\frac{S_{ABD}}{2} = \frac{1}{2} |AM| \cdot 3x = \frac{1}{2} x \cdot 9 + \frac{5x}{8} S_{BAC}.$$

$S_{ABE} = \frac{3}{4} S_{ABC}$
 $S_{ABC} = 1 \frac{3}{4} S_{ABE} \Rightarrow S_{ABE} = \frac{4}{7} S_{ABC}$
 $S_{ABE} = 4,5 \cdot 3x = 13,5x$



$\frac{1}{2} |LM| \cdot |AC| = \frac{1}{2} |AF| \cdot |NQ| + \frac{5x}{64} S_{BMC}$

10.
[1, 35]

- ~~1, 2, 3, 4, 5, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100~~
- 1, 2, 3, 4, 5, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

~~(1+1) + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4+5) + (1+2+3+4+5+6)~~

~~1+1+2+1+2+3+4+5+(36+5+37+...)~~
 $(1+2+3+4+5) \cdot 5 = 35$
 $(36+37+38+39+40) \cdot 5 = 195$
 $(41+42+43+44+45) \cdot 5 = 205$
 $(106+107+108+109+110) \cdot 5 = 535$
 $(141+142+143+144+145) \cdot 5 = 715$
 $3 \cdot 5 = 15$
 $5 \cdot 5 = 25$
 $10 \cdot 5 = 50$
 $15 \cdot 5 = 75$
 $20 \cdot 5 = 100$
 $3 \cdot 5 + 38 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 43 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 108 \cdot 5 + 15 \cdot 5 + 143 \cdot 5 = 2045$

1) $\frac{1+5}{2} \cdot 5 = 35$

2) $\frac{36+40}{2} \cdot 5 = 195$

3) $\frac{41+45}{2} \cdot 5 = 205$

$= (41 + 38 + 118 + 158 + 20) \cdot 5 =$

$= (119 + 236 + 20) \cdot 5 = (395 + 20) \cdot 5 =$

$= 415 \cdot 5 = 2075$ ✓

12.

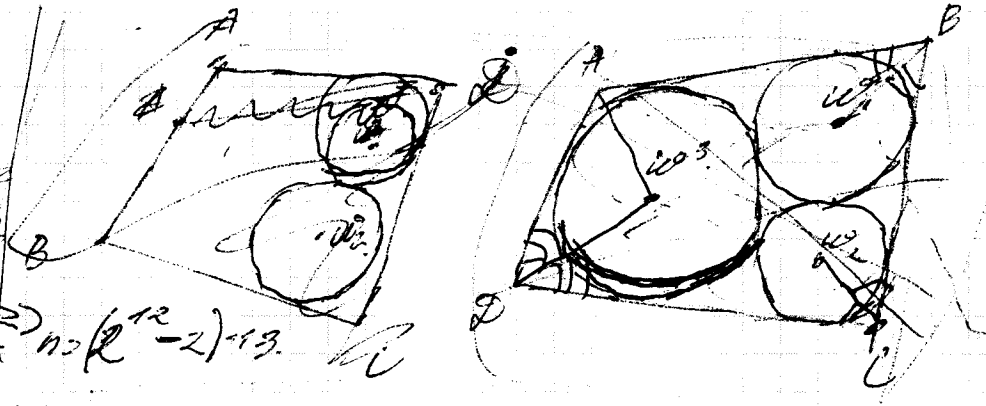
$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \sin(7x-2x) \cdot \sin(7x+2x) -$
 $- \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = (\sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x)(\sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x) -$
 $\sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = (\sin 7x \cos 2x)^2 - (\sin 2x \cos 7x)^2 -$
 $\sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$2x \cdot 2x = 4x^2$
 $2x \cdot 2x = 4x^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$n = \frac{18-6}{2} = 6$
 $\Rightarrow n = 6$
 $\Rightarrow n = (k-2) \cdot 13$



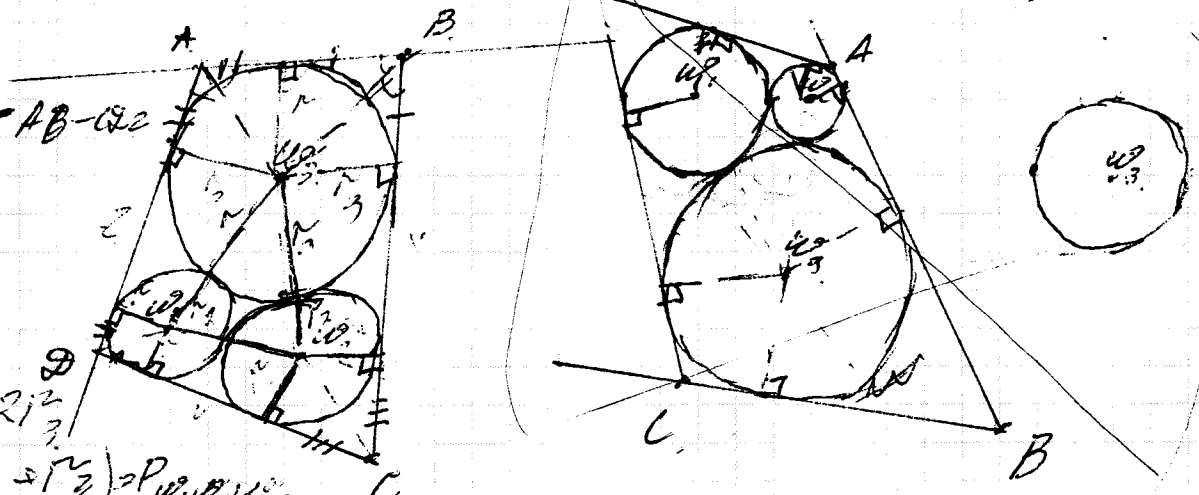
№2.

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3 = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x - 1 + \sin^2 x - 3 =$
 $= \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x + \sin^2 x - 4 =$
 $= \sin 5x \cdot \sin 9x - (\sin 9x - \sin x)(\sin 4x + \sin x) - 4 = \sin 5x \cdot \sin 9x$



№4.

$AB + BC = AB - AC = 2$
 $\Rightarrow 10$
 $|AB| = 2$
 $2r_1 + 2r_2 + 2r_3 =$
 $2(r_1 + r_2 + r_3) = R + r_1 + r_2 + r_3$



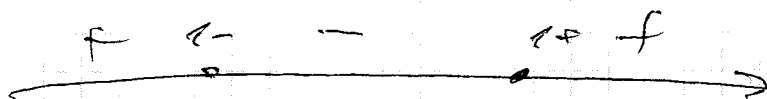
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

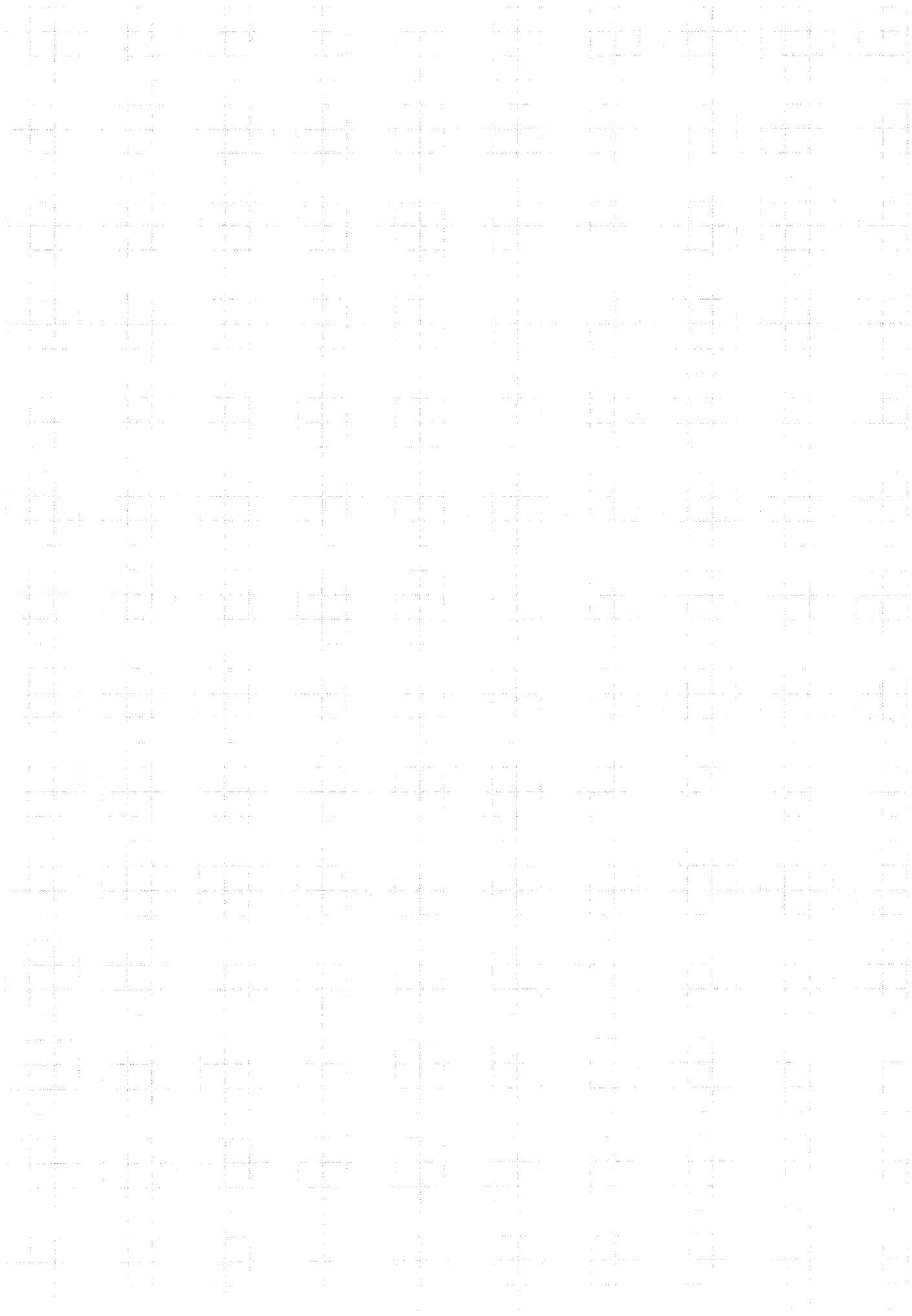
$$\begin{aligned} & \Rightarrow \sin^2 4x (\cos^2 2x - \sin^2 2x \cdot \cos^2 4x) - \\ & \Rightarrow \sin^2 4x (\cos^2 2x - 1) - \sin^2 2x \cos^2 4x - \cos^2 4x - 3 = \\ & \Rightarrow (1 - \cos^2 4x)(\cos^2 2x - 1) - \sin^2 2x \cos^2 4x - \cos^2 4x - 3 = \\ & \quad ? \end{aligned}$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

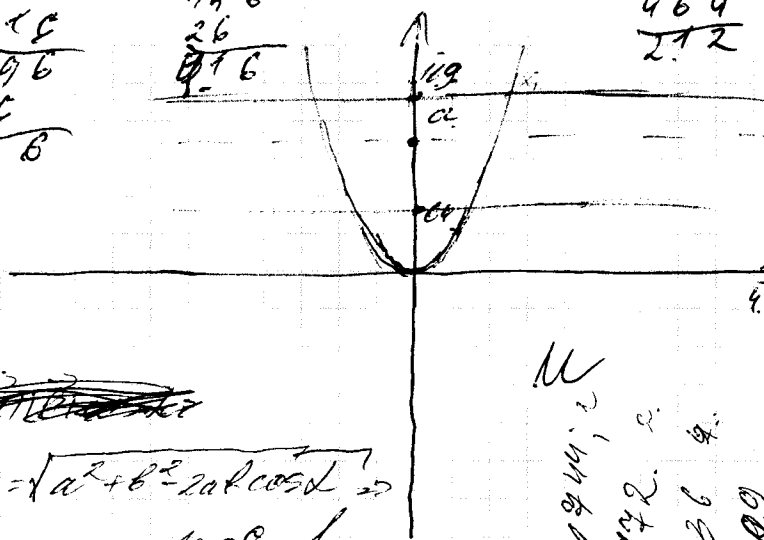
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№
 $y = x^2$
 $x^2 = 26$
 $x = \pm \sqrt{26}$

$x^2 = 26$
 $x = \pm \sqrt{26}$

676
 -464
 212

626
 -256
 420
 $4094 - 2 = 4094$
 12282
 4094
 53222



$v = 169$
 $x = \pm \sqrt{13}$
 $x \neq \pm 13$

W
 $1944, 2$
 $872, 2$
 $436, 4$
 $109, 109$

$\frac{1}{2} = \frac{a^2 + 26 - 16}{2 \cdot 26 \cdot 16}$
 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2ab \cos \alpha$
 $\cos 120^\circ = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} = \frac{a^2 + 16 - 26}{2 \cdot 26 \cdot 16}$
 $\frac{1}{2} = \frac{26 + 16 - a^2}{2 \cdot 26 \cdot 16}$

see знамен $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$

$\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \cos \alpha$
 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos \alpha$

$\frac{7}{2} = \frac{a^2 + 10}{832}$
 $\frac{1}{2} = \frac{a^2 - 10}{832}$
 $\frac{1}{2} = \frac{42 - a^2}{832}$

$832 = 2a^2 + 20$
 $832 = 2a^2 - 20$
 $832 = 84 - 2a^2$

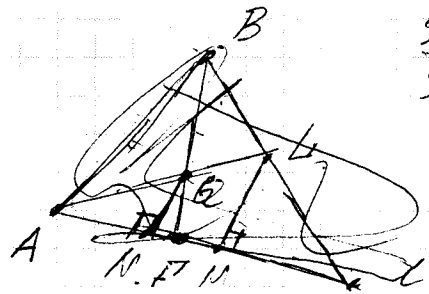
$2a^2 = 812$
 $2a^2 = 852$
 $2a^2 = 84 \cdot 832 \text{ с } 0 \text{ а } \in \emptyset$

$a^2 = 406$
 $a^2 = 426$
 $a = \pm \sqrt{406}$
 $a = \pm \sqrt{426}$

676
 436
 240
 16

$f(x) = \sin 5x + \sin 4x - \sin^2 4x - \cos^2 4x - 3 = 2$

№
~~№~~
 №



$\frac{S_{BOL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$
 $|CN| = 9 \cdot \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$

$\angle ANB = \angle BNC$

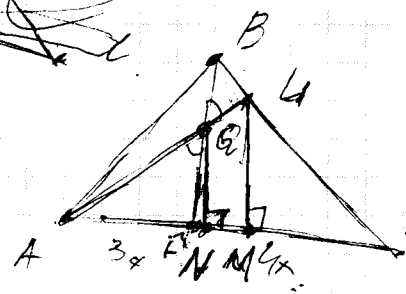
$\frac{S_{ABN}}{S_{BNC}} = \frac{3}{4}$

$S_{ANB} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 9$

$2 \cdot S_{ABN} = \frac{3}{4} S_{BNC}$

$\frac{3}{64} S_{BNC} = S_{BOL}$

$S_{BAC} = 1 \cdot \frac{3}{4} S_{BNC} = 16 S_{BOL}$



$S_{ABC} = S_{ANB} + S_{BNC} - \frac{1}{64} S_{BAC}$

$\frac{1}{2} |LM| \cdot |AC| = \frac{1}{2} |AN| \cdot |CN| + \frac{1}{64} S_{BAC}$
 $\frac{1}{2} |LM| \cdot 7x = \frac{1}{2} 3x \cdot 9 + \frac{3^2}{64} S_{BAC}$

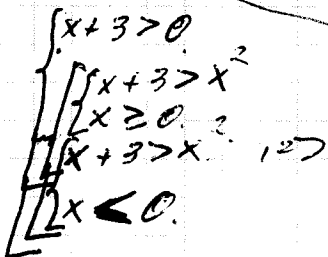
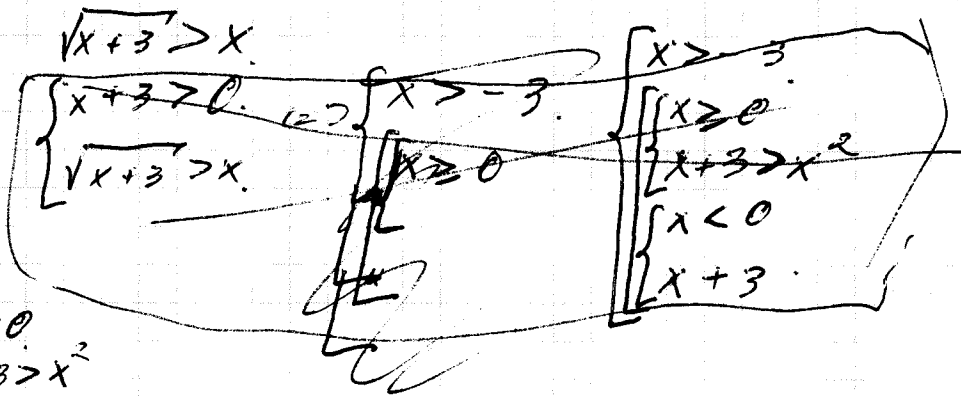
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1/5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$$

ОДЗ: $\sqrt{x+3}-x > 0$.



$$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$$

$$\sqrt{x+3} - 2x - 5 \leq 0$$

$$\sqrt{x+3} \leq 2x+5 \quad \text{ОДЗ: ?}$$

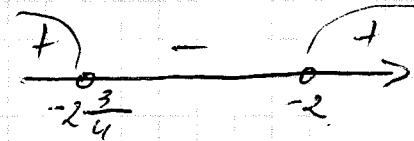
$$x+3 \leq 4x^2 + 20x + 25$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

$$D = 361 - 352 = 9$$

$$x_1 = \frac{-19+3}{8} = -\frac{16}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{8} = -\frac{22}{8} = -2 \frac{3}{4}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$y = x^2$$

Парабола пересекает прямые $y = 169$ и $y = 64$ в точках:

$x = \pm 13$ и $x = \pm 8$ соответственно, а не т.к.

по т. косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ и $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

то получим систему: совокупности:

~~$$16^2 = 169 + 64$$~~

$$a^2 = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}$$

$$26^2 = a^2 + 16^2 + 16 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$16^2 = a^2 + 26^2 + 26 \cdot a \cdot \frac{1}{2}$$

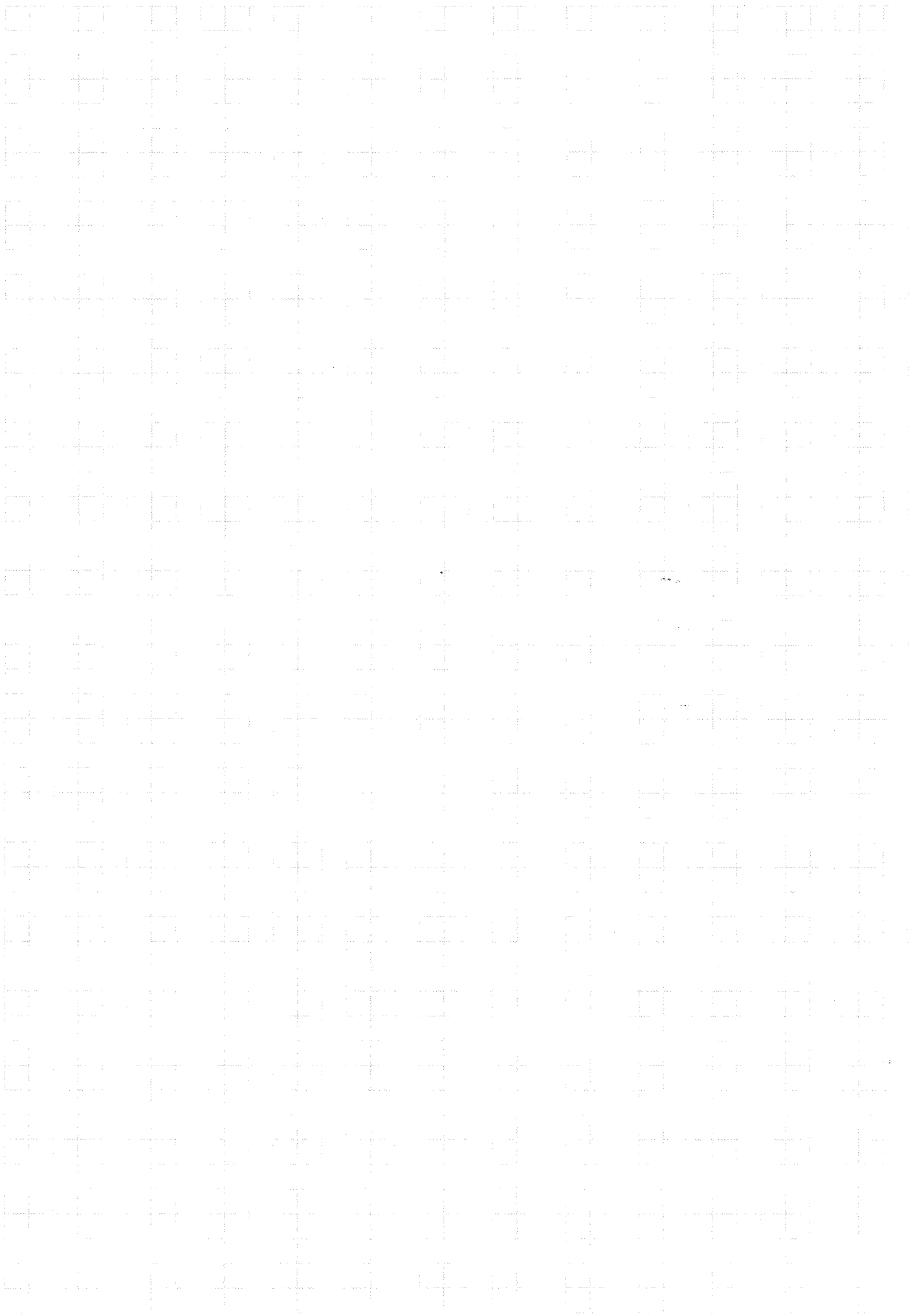
$$a^2 = 676 + 256 - 208$$

$$676 = a^2 + 256 - 8a \Leftrightarrow$$

$$256 = a^2 + 676 - 13a$$

~~$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 212 \\ a^2 - 8a - 420 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 212 \\ a^2 - 8a - 420 = 0 \end{cases}$$~~

\Leftrightarrow



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)