МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 7-008

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

Для начала введём ОДЗ для всех „x":

$x+4>1$, так как при $0 \geq 1$ равенство ложно, поэтому $x+4>1$, а не $x+4 \geq 1$.

$x+4>1 \Rightarrow x>-3$. (Также аргумент логарифма не может быть ~~больше~~ равен 0, поэтому не $x+4 \geq 0$ и не $x+4>0$).

Следующее: $\sqrt{x+7}-x>1$, т.к. по принципу выше основание логарифма также не равно 0 или 1:

$\sqrt{x+7}>x+1$

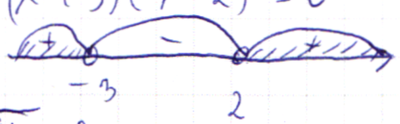
$x+7>x^2+2x+1$

$x^2+x-6>0$

$D = 1+24 = 25 = 5^2$

$x_{1/2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \end{array}\right]$

$(x+3)(x-2)>0$



Поскольку посредством квадратирования обеих сторон мы получаем один лишний корень, то делаем проверку, методом подстановки выясняем, что $x=2$ <u>не</u> подходит, как и $x=3$, если подставить его в исходное нер-во.

Исключаем все числа, меньше -3.

Проверяя числа из промежутка $(-3;2)$, видим, что числа -2 и -1 также не подходят. Решим дополнительно неравенство:

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$x+7 \leq 4x^2+16x+16$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$D = 225-144 = 9^2$

$x_{1/2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ -\frac{3}{4} \end{array}\right]$

Т.к. -3 не подходит, то остаётся $-\frac{3}{4}$.

Подставляем в исходное нер-во:

$\log \sqrt{7-\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \left(4-\frac{3}{4}\right) \geq 1$

Получим

$\log_{\frac{13}{4}} \frac{13}{4} \geq 1$

$1 \geq 1$, что соответствует.

Также получим методом интервалов:

Т.к. мы исключим числа меньше -3, то отбрасываем лишнюю часть. Остаётся промежуток $\left[-\frac{3}{4}; 2\right)$. Цифра 2 также не подходит и не делает логичным неравенство ибо при $x=2$, аргумент равен 6, а основание логарифма 1, что невозможно. Отбрасываем её. Подставив 1, также убеждаемся в ~~не~~ верности нер-ва:

$\log_{2\sqrt{2}-1} 5 \geq 1$

$\log_{1,8} 5 \geq 1$

$\log_{1,8} 5 \geq \log_{1,8} 1,8$

$5 \geq 1,8$ – может быть.

Следуя из этого, делаем вывод, что $x \in \left\{-\frac{3}{4}\right\}; [0; 1]$.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{3}{4}\right\}; [0; 1]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Из заданных промежутков определим, какие числа при выборе Пиноккио невозможны, исходя из условия, что ни одна из двух выбранных чисел разница не делится на 45, то исключим те числа выбор которых невозможен:

1 и 46 | 45 и 90 | 45 и 135 | 91 и 46 | 46 и 181
1 и 91 | 90 и 135 | 45 и 180 | 91 и 181 | (46 и 1)
1 и 136 | 135 и 180 | 45 и 225 | 136 и 181 | (46 и 136)
1 и 181 | 180 и 225 | 91 и 136 | 46 и 136 | 135 и 225
90 и 225
90 и 180.

Всего из данного (данных) промежутков их 20.
Обнаруживаем, что последовательный отбор из любых двух промежутков также невозможен, например: 2 и 47, 3 и 48, 4 и 49 и т.д. У одного из двух промежутков вариантов чисел, делящихся на 45 столько: $C_{90}^{2} = \frac{90!}{88!\cdot 2!} = \frac{89\cdot 90}{2} = 89\cdot 45$. Следовательно из остальных следующих: $C_{180}^{2} = \frac{180!}{178!\cdot 2!} = \frac{179\cdot 180}{2} = 179\cdot 90$ из 180 чисел, делящихся на 45. Всего: $C_{225}^{2} = \frac{225!}{223!\cdot 2!} = \frac{224\cdot 225}{2} = 112\cdot 225$ чисел делящихся на 45.
Наименьшая сумма: $2+46 = 48 + 48 + 93 + 138 + 183 + 139 + \dots$ Больше 1000, но меньше 2000.

$4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$

№5

$7-\frac{3}{4}=\frac{25}{4}$ $\quad 16 \cdot 9 = 144$

$225 - 144 = 81$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

$\frac{25}{4}+\frac{3}{4}=7$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$\sqrt{7-\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$ $\quad 4-9$

1) $\log_5 1\geq 1$

$2x+4\geq\sqrt{x+7}$ $\quad \sqrt{7-3}+3=2+3=5$

$\log_5 1\geq\log_5 5$

~~$1\geq 5$ ложь~~

$4x^2+16x+16\geq x+7$

$x+4\geq 1$

$x\geq -3$

$4x^2+15x+9\geq 0$ $\quad \sqrt{x+7}-x \geq 1$ ~~(2) $\log_7 \frac{13}{4}$~~

~~$D = 121-144 = -23$~~ $\quad \log_1(6)\geq 1$

2) $\log_{\frac{13}{4}}\frac{13}{4}\geq 1$

$1\geq 1$ уд.

$\log_{\sqrt{10}-3}7\geq 1$

$\log_{\sqrt{10}-3}7\geq\log$

~~$D\geq R$~~ $\quad D=225-144=81=9^2$

$x_{1/2}=\frac{-15\pm 9}{8}=\left[\begin{array}{l}-\frac{24}{8}=-3\\ -\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}\end{array}\right.$

$\log_{\sqrt{7}}4\geq 1$

$\log_7 16\geq 1$

$\left[-\frac{3}{4};2\right)$

$7\geq\sqrt{10}-3$

$10\geq\sqrt{10}$

~~$x_1=-3$~~

$x_2=-\frac{3}{4}$

$\begin{cases}\sqrt{x+7}-x>1\\ x>-3\\ (x+3)(x+\frac{3}{4})\geq 0\end{cases} = \begin{cases}\sqrt{x+7}>x+1\\ x>-3\end{cases}$

$\log_7 16\geq\log_7 7$

$16\geq 7$

$-3 \quad -\frac{3}{4}$

с ивазрятом - не входит

$=\begin{cases}x+7>x^2+2x+1\\ x^2+x-6>0\\ x>-3\end{cases} = \begin{cases}x^2+x-6>0\\ x>-3\end{cases}$

$D=25=5^2$

$x_{1/2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\left(\begin{array}{l}2\\ -3\end{array}\right.$

$(x-2)(x+3)>0$

$-3 \quad -\frac{3}{4} \quad 2$

3

$-3 \quad 2$

$+ \quad - \quad +$

$-3 \quad 2$

-3

$\log_{\sqrt{10}-3}7\geq 1$

$\log_{\sqrt{10}-3}7\geq\log_{\sqrt{10}-3}\sqrt{10}-3$

$7\geq\sqrt{10}-3$

$10\geq\sqrt{10}$

$100\geq 10$

$\log_{\sqrt{11}-4} 8 \geq 1$

$\log_{\sqrt{11}-4} 8 \geq \log_{\sqrt{11}-4} \sqrt{11}-4$

$8 \geq \sqrt{11}-4$

$144 \geq 11$

$\log_{\sqrt{12}-5} 9 \geq 1$

$9 \geq \sqrt{12}-5$

$196 \geq 12$

$\log_{\frac{1}{10}} 7 \geq 1$

$\log_{10} \frac{1}{7} \geq 1$

$\log_{10} \frac{1}{7} \geq \log_{10} 10$

$\frac{1}{7} \geq 10$

$\log_{\sqrt{x}-4} 8 \geq 1$

$\log_5 1 \geq 1$

$\log_{\sqrt{6}+1} 3 \geq 1$

$\log_{3,38} 3 \geq \log_{3,38} 3,38$

$\log_{\sqrt{7}} 4 \geq 1$

$\log_7 16 \geq \log_7 7$

$16 \geq 7$

$2x^2 = a$

$x = \sqrt{\frac{a}{2}}$

$2x^2 = 80 - a$

$2x^2 + a - 80 = 0 \quad b^2 - 4ac \quad -4 \cdot 2 \cdot -80 = 640$

$\cancel{2x^2 - 80}\ a = 80 - 2x^2$

$a = 2(40 - x^2)$

$640 = (8\sqrt{10})^2$

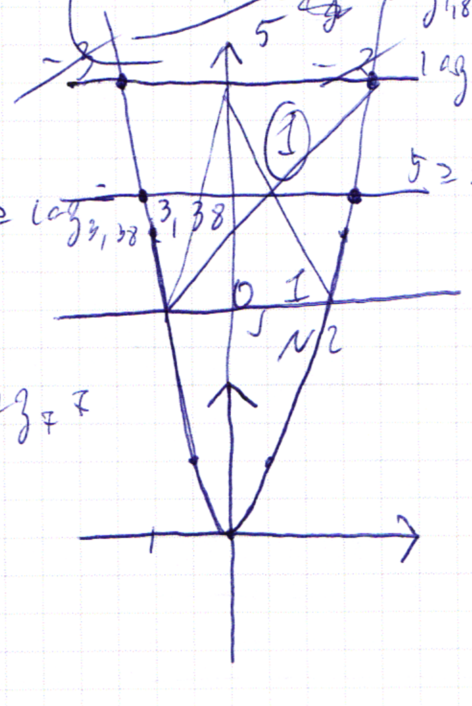
1,4,1,7

$\log_7 3$

(-3)

$[0;1]$

$\log_{2\sqrt{2}-1} 5 \geq 1$



$\log_{2,2} 2 \geq 1$

$\log_{\frac{11}{5}} 2 \geq \log_{\frac{11}{5}} \frac{11}{5}$

$\log_{1,8} 5 \geq 1$

$\log_{1,8} 5 \geq \log_{1,8} \frac{11}{5}$

$5 \geq 1,8$

$\log_{4,2} 2 \geq 1$

$\log_{4,2} 2 \geq \log_{4,2} 4,2$

$2 \geq 4,2$

$\begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 14 \\ \times 17 \\ \hline 98 \\ 14 \\ \hline 238 \end{array}$

$\begin{array}{r} 33 \\ \times 33 \\ \hline 99 \\ 99 \\ \hline 1089 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$

2.

$\frac{22}{10} = \frac{11}{5}$

2 11

$y = 2x^2$

x	-1	0	1	2
y	2	0	2	8

x	-2
y	8

$x = 2\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

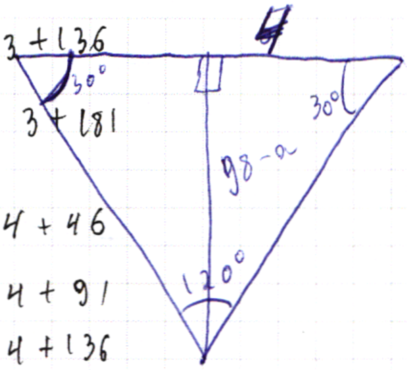
7-008

ШИФР

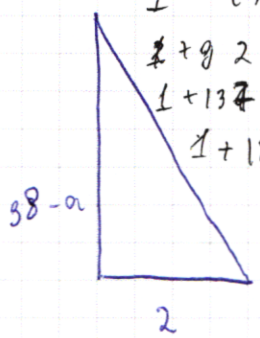
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 + 46
2 + 91
2 + 136
2 + 181
3 + 46
3 + 91
3 + 136
3 + 181
4 + 46
4 + 91
4 + 136
~~4 + 181~~



1 + 47
1 + 92
1 + 137
1 + 182



$c^2 = \sqrt{(98-a)^2 - 4}$

$c^2 =$

$S = \frac{1}{2} a h$

$S = (98-a) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(98-a)^2 - 4} = t \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{t^2 - 4}$

$S^2 = t^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (t^2 - 4)$

$S^2 = \frac{t^2}{4} \cdot t^2 - 4$

$S = \frac{(98-a)^2}{4} \cdot ((98-a)^2 - 4)$

$C_{17}^{10} = \frac{17!}{7! \cdot 10!}$

$\log \sqrt{6} + 1^2 3 \geq 1$

$\log_{3,38} 3 \geq \log_{3,38} 3,38$

264 · 13 = 792 + 264 = 3432

22 · 12 = 44 + 22

3432 · 17 = 24024 + 3432 = 58344

$x + 4 \geq 1$

$x \geq -3$

$\sqrt{x+7} > 0$

$x + 7 > 0$

$x \geq -7$

$x \geq -3$

$(x+3)(x-2) > 0$

−3 2

$\sqrt{x+7} - x > 1$

$\sqrt{x+7} > x + 1$

$x + 7 > x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 6 > 0$

$D = 5^2$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ 2 \end{array}\right.$

−3

−7 −3 2

$C_{17}^{7} = \frac{17!}{10! \cdot 7!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} =$

$= \frac{11 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 17}{4 \cdot 6} =$

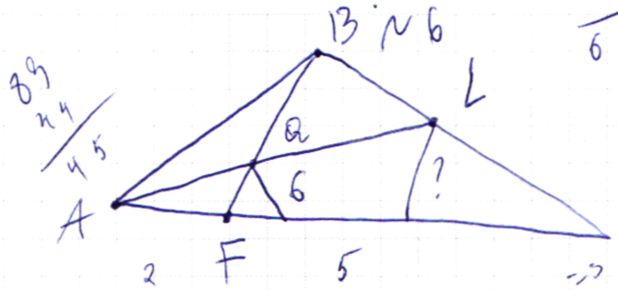
$\frac{11 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 17}{3} =$

$\frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{11 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17}{2} =$

$= 22 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 17 = 58364$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{12}$

$C_{17}^3 = \frac{17!}{3!\,14!} = \frac{15\cdot16\cdot17}{6} \Rightarrow$

$C_{17}^3 = \frac{15\cdot17\cdot8}{3} = 40\cdot17 = 680$

44 и 89

680 – кол-во 17-значных чисел, содержащих только цифры 0, 7, 8.

C_{680}

~~20 невозможных~~

всего 225

из них воз-но только 135

1 и 46 | 45 и 90 | 45 и 135 | 136 и 181
1 и 91 | 30 и 135 | 45 и 180 | ~~136 и~~
1 и 136 | 135 и 180 | 45 и 225 | 46 и 136
1 и 181 | 180 и 225 | 91 и 136 | 46 и 181
~~180 и 225~~ | 90 и 180 | 91 и 46 | 135 и 225
90 и 225 | 91 и 181

2

44 и 89
43 и 88
42 и 87
30 75
20 и 65
10 и 55
2 и 47
1 и 46

$C_{90}^1 = \frac{90!}{89!\cdot1!} = 90$

5
5
5
5

22 четных [1; 45]

[46; 90] – 22 нечет.
23 чет

C_{22}

[1; 45] – 22 чет., 23 нечет.
[46; 90] – 23 чет., 22 нечет.
[91; 135] – 22 чет., 23 нечет.
[136; 180] – 23 чет., 22 нечет.
[181; 225] – 22 чет., 23 нечет.

$\underbrace{112 + 113}_{225}$

$C_{17}^8 = \frac{17!}{8!\,9!} = \frac{10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} = \frac{5\cdot11\cdot13\cdot14\cdot17}{7} = 55\cdot2\cdot13\cdot17 =$

=

- [x] черновик
- [ ] чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-008
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$C_{90}^{2}=\frac{90!}{2!\cdot 88!}=\frac{89\cdot 90}{2}=\underline{89\cdot 45}$ $\quad 89 \quad 45$

$45 \quad 45$

$C_{45}^{6}=\frac{45!}{39!\cdot 6!}=\frac{40\cdot 41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{20\cdot 41\cdot 14\cdot 43\cdot 11\cdot 9}{6}=$

$=20\cdot 41\cdot 14\cdot 43\cdot 11\cdot 3=\frac{410\cdot 14\cdot 43\cdot 33}{45}=\frac{82\cdot 14\cdot 43\cdot 33}{9}=\frac{82\cdot 14\cdot 43\cdot 11}{3}=$

$C_{45}^{6}=\frac{45!}{}$

$\frac{40\cdot 41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{10\cdot 41\cdot 21\cdot 43\cdot 44\cdot 45}{3\cdot 5\cdot 6}=10\cdot 41\cdot 21\cdot 43\cdot 22\cdot$

30

$g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$g'(x)=3\cos 3x\cdot\sin 7x+7\cos x\cdot\sin 3x-2\sin x\cdot\cos x+$

$2\sin 5x\cdot\cos 5x=\sin 10x$

$\cancel{\sin x\cdot\sin x)'=\cos x\cdot\sin x+\cos x}$

$-5\sin 5x\cdot -5$

$\cos 5x\cdot\cos 5x=-5\sin 5x\cdot\cos 5x-5\sin x\cdot$

$g'(x)=3\cos 3x\cdot\sin 7x+7\cos 7x\sin 3x+2\sin x\cdot\cos x-10\sin 5x\cdot\cos 5x$

$\sin 10x-\sin 2x-5\sin 10x=-4\sin 10x-\sin 2x$

$g(0)\Rightarrow x=0\Rightarrow 5$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$

$C_{45}^{2}=\frac{45!}{43!\cdot 2!}=\frac{44\cdot 45}{2}=$

$\cancel{\frac{1}{2}\sin}$

$\frac{180\cdot 179}{2}=2\cancel{1}\cdot 45$

$\frac{1}{2}(\cos 10x+\cos 5x)-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$C_{180}^{2}=\frac{180!}{178!\cdot 2!}=$

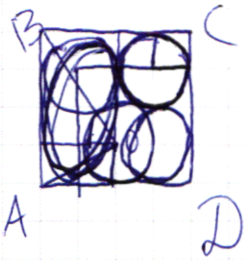
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$58 \mid \frac{6}{9}$

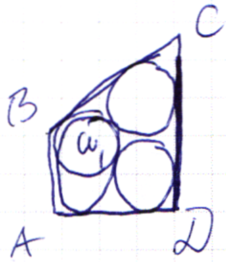
$\frac{58}{8} = \frac{29}{4}$

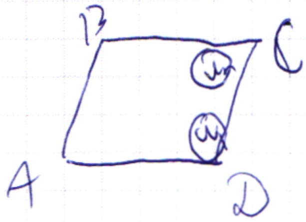
$AD + BC - AB - CD = 12$

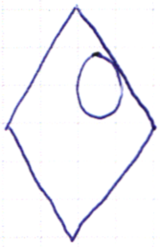


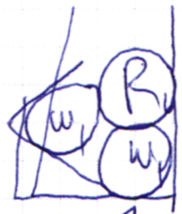
$AO \cdot BO = 58$

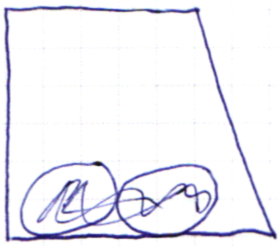
$AB - ?$

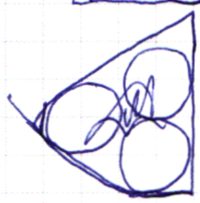


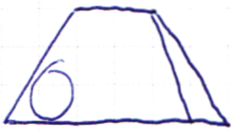


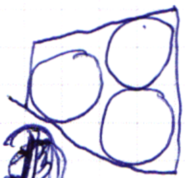


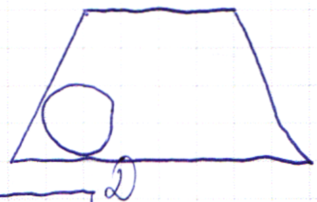




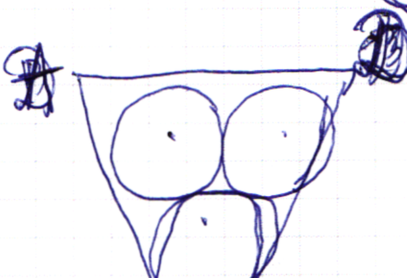








4.8



48
93
138
183
49
94
405

4

3

139
184
138
183
674

2