МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 9-13

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

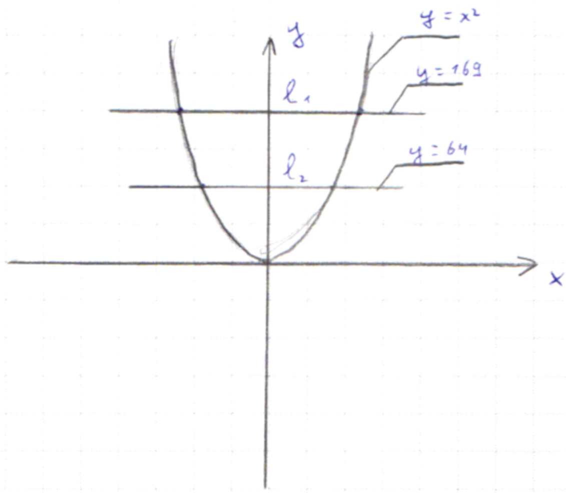
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.



Пусть l_1, l_2, l_3 – отрезки, высекаемые параболой на соответствующих прямых $y=169$, $y=64$, $y=a$.

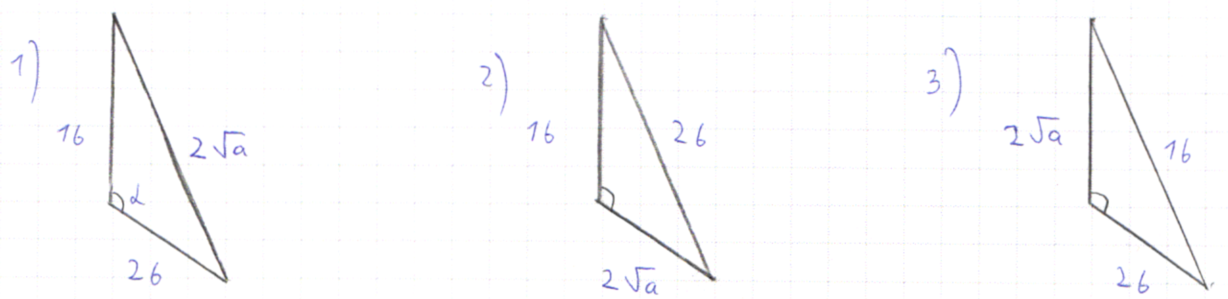
Тогда:

$l = 2\sqrt{y}$

$$\boxed{\begin{aligned} l_1 &= 2\sqrt{169} = 26 \\ l_2 &= 2\sqrt{64} = 16 \\ l_3 &= 2\sqrt{a} \end{aligned}}$$

Из этих отрезков нужно составить треугольник с одним из углов $\alpha = 120°$.

Есть три варианта взаиморасположения угла α и стороны l_3:



Первый случай:

По т. косинусов:

$(2\sqrt{a})^2 = 16^2 + 26^2 - 2\cdot 16\cdot 26\cdot \cos\alpha$

$4a = 256 + 676 + 832\cdot \frac{1}{2}$

Из этого:

$\boxed{a_1 = 339}$

Второй случай:

По т. косинусов:

$26^2 = 16^2 + (2\sqrt{a})^2 - 2\cdot 16\cdot 2\sqrt{a}\cdot \cos\alpha$

$676 = 256 + 4a + 64\cdot \frac{1}{2}\sqrt{a}$

$4a + 32\sqrt{a} - 420 = 0$

Пусть $t = \sqrt{a}$, $t^2 = a$

$4t^2 + 32t - 420 = 0$

$t^2 + 8t - 105 = 0$

$D = 484$

$t_1 = \frac{-8+22}{2} = 7$; $\boxed{a_2 = t_1^2 = 49}$

$t_2 = \frac{-8-22}{2} = -15$ (не подходит, т.к. в т. косинусов корень арифметический)

Третий случай:

$16^2 = (2\sqrt{a})^2 + 26^2 - 2\cdot 26\cdot 2\sqrt{a}\cos\alpha$

$256 = 4a + 676 + 52\sqrt{a}$

$4a + 52\sqrt{a} + 420 = 0$

$t = \sqrt{a}$; $t^2 = a$

$4t^2 + 52t + 420 = 0$

$t^2 + 13t + 105 = 0$

$D < 0$.

Ответ: $a_1 = 339$; $a_2 = 49$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$. Чтобы минимизировать $g(x)$:

$$g(x) = \underbrace{\sin 5x \cdot \sin 9x}_{\to -1} - \underbrace{\sin^2 7x}_{\to 1} + \underbrace{\sin^2 x}_{\to 0} - 4$$

Больше всех остальных значений подходит $x = 0$.

Тогда $\boxed{g(x)_{min} = -4}$.

Чтобы максимизировать $g(x)$:

$$g(x) = \underbrace{\sin 5x \cdot \sin 9x}_{\to 1} - \underbrace{\sin^2 7x}_{\to 0} + \underbrace{\sin^2 x}_{\to 1 / \to -1} - 4$$

Больше всех остальных значений подходит $x = \pi$.

Тогда $\boxed{g(x)_{max} = -3}$.

Ответ: $g(x)_{min} = -4$; $g(x)_{max} = -3$.

3. Для того, чтобы решить эту задачу, нужно сначала вычислить количество комбинаций из элементов "0" и "9" длиной 12 цифр, т.к. остальные 6 цифр занимают "5". И при этом мы не должны учитывать комбинации 000...000 и 999...999. Их всего две. Тогда количество всех комбинаций: 2^{12}, количество комбинаций без учета ненужных нам: $(2^{12} - 2)$. Теперь ~~нам~~ мы можем вставить между любыми двумя рядом стоящими цифрами комбинацию "555555" (а также по краям нашего числа).

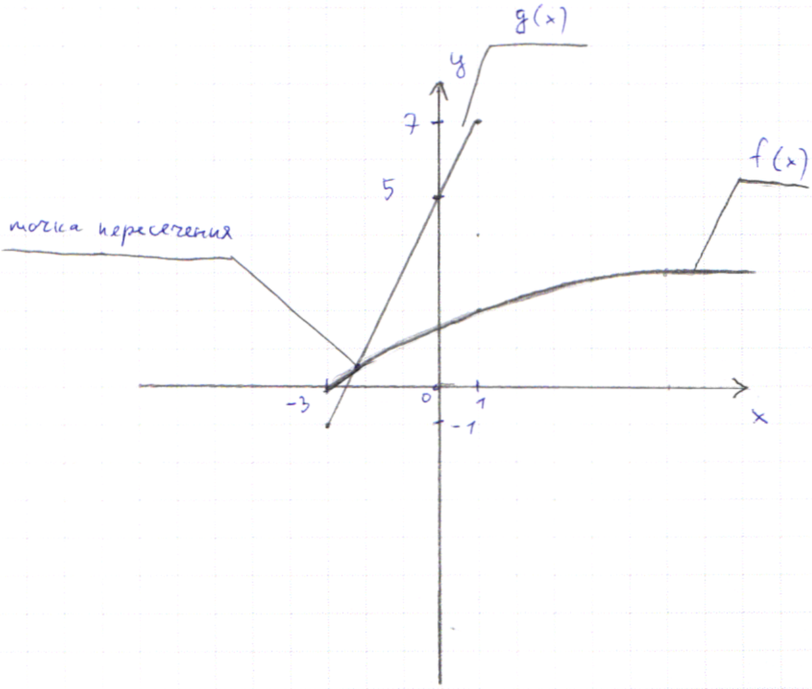
Если посчитать, то в число, в котором 12 разрядов, можно таким образом вставить "555555" 13 разными способами:

$$\uparrow * \uparrow * \uparrow * \uparrow \ldots \uparrow * \uparrow * \uparrow * \uparrow$$

Следовательно, ответом будет являться число $(2^{12}-2)\cdot 13$.

Ответ: $(2^{12}-2)\cdot 13$.

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$



$\sqrt{x+3}-x \geqslant x+5$

$\sqrt{x+3} \geqslant 2x+5$

$f(x)=\sqrt{x+3}$

$g(x)=2x+5$

$f(x) \geqslant g(x)$

На графике видно, что искомый интервал начинается с точки $x=-3$ и продолжается до точки пересечения $f(x)$ и $g(x)$. Найдем эту точку:

$f(x)=g(x)$

$\sqrt{x+3}=2x+5 \quad (x \geqslant -3)$

$x+3=4x^2+20x+25$

$4x^2+19x+22=0$

$D=9$

$x_1=\frac{-19+3}{8}=-\frac{16}{8}=-2$

$x_2=\frac{-19-3}{8}=-\frac{11}{4}$ (не подходит). Следовательно, решением является интервал: $x\in[-3;-2]$. Ответ: $x\in[-3;-2]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-13

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. (продолжение)

Второй случай:

По т. косинусов:

$26^2 = 16^2 + (2\sqrt{a})^2 - 2\cdot 16\cdot 2\sqrt{a}\cdot\cos 120^\circ$

$676 = 256 + 4a + 64\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a}$

~~676 = 288~~ $4a + 32\sqrt{a} - 420 = 0$

$t = \sqrt{a}$; $t^2 = a$

$4t^2 + 32t - 420 = 0$

$2t^2 + 16t - 210 = 0$

$t^2 + 8t - 105 = 0$

$D = 64 + 4\cdot 105 = 64 + 420 = 484$

$t_1 = \frac{-8+22}{2} = \frac{14}{2} = 7$; $\boxed{a_2 = 7^2 = 49}$

$t_2 = \frac{-8-22}{2} = \frac{-30}{2} = -15$ (не подходит, т. к. в т. косинусов корень арифметический)

$676 - 256 = 420$

$22\cdot 22 = 22\cdot 20 + 22\cdot 2 =$

$= 20\cdot 20 + 2\cdot 20 + 20\cdot 2 + 2\cdot 2 =$

$= 400 + 40 + 40 + 4 = 484$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1. (продолжение №2) $676 - 256 =$

Третий случай:

$16^2 = (2\sqrt{a})^2 + 26^2 - 2\cdot 26\cdot 2\sqrt{a}\cos \alpha$

$256 = 4a + 676 + 52\sqrt{a}$

$4a + 52\sqrt{a} + 420 = 0$

$t = \sqrt{a}\ ;\ t^2 = a$

$4t^2 + 52t + 420 = 0$

$2t^2 + 26t + 210 = 0$

$t^2 + 13t + 105 = 0$

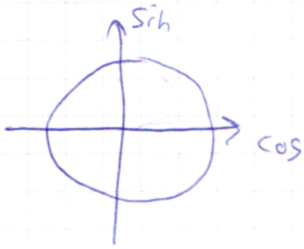
$D = 169 - 4\cdot 105 = 169 - 420 < 0$

Ответ: $a_1 = 339\ ;\ a_2 = 49$

2. $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x + 1 - \cos^2 x - 4$

$g(x) = \overbrace{\sin 5x \cdot \sin 9x}^{\to -1} - \underbrace{\overset{\to 1}{\sin^2 7x}}_{[0;1]} + \underbrace{\overset{\to 0}{\sin^2 x}}_{[0;1]} - 4$



$\sin 7x = 1$

$7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\ ;\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{2}{7}\pi n$

$x = \pi$

$g(x) = \sin(\pi + 2\pi\cdot 2)\cdot \sin(\pi + 2\pi\cdot 4) - \sin^2(\pi + 2\pi\cdot 3) + \sin^2\pi - 4 =$

$= (-1)(-1) - 1 + 1 - 4 = 1 - 4 = -3$

$x = 0$

$g(x) = -4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

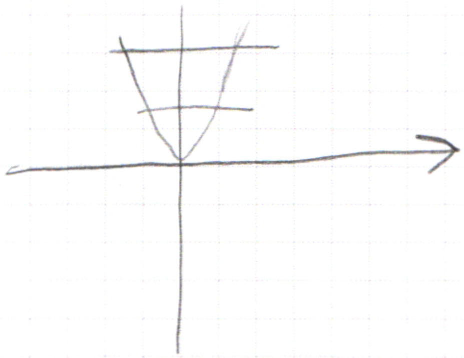
9-13

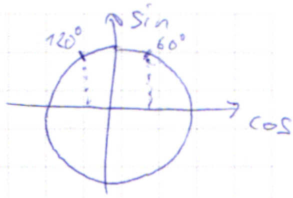
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

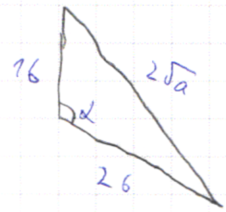
1.



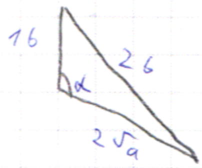


$\cos 120° = -\frac{1}{2}$

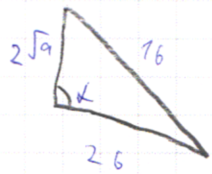
1)



2)



3)



$\alpha = 120°$

$256 + 676 =$

$= 932$

$l = 2\sqrt{y}$

$l_1 = 2\sqrt{169} = 2 \cdot 13 = 26$

$l_2 = 2\sqrt{64} = 2 \cdot 8 = 16$

$l_3 = 2\sqrt{a}$

Первый случай

По т. косинусов: $l \dots l$

$(2\sqrt{a})^2 = 16^2 + 26^2 + 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos\alpha$

$4a = 256 + 676 + 832 \cdot \frac{1}{2}$

$4a = 932 + 416$

$\cancel{4a = 516}$

$\cancel{2a = 258}$

$\cancel{\boxed{a_1 = 129}}$

$4a = 1348$

$2a = 674$

$\boxed{a_1 = 339}$

$26 \cdot 26 =$

$= 26 \cdot 20 + 26 \cdot 6 =$

$= 20 \cdot 20 + 6 \cdot 20 +$

$+ 20 \cdot 6 + 6 \cdot 6 =$

$= 400 + 120 + 120 + 36 =$

$= 640 + 36 = 676$

$32 \cdot 26 = 32 \cdot 20 + 32 \cdot 6 =$

$= 30 \cdot 20 + 2 \cdot 20 + 30 \cdot 6 +$

$+ 2 \cdot 6 = 600 + 40 + 180 +$

$+ 12 = 640 + 192 =$

$= 792 + 40 = 832$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2. (продолжение)

$$g(x) = \overbrace{\sin 5x \cdot \sin 9x}^{\to 1} - \overset{\to 0}{\sin^2 7x} + \overset{\to 1}{\sin^2 x} - 4$$

3. 000000 99999

$2^{12} \cdot 1$

2 2 2 2 2 2 2

5 5 5 5

1, и 2 и 3

$2^2 - 2 =$

* * 3 3

$C_2^2 = \frac{2!}{1 \cdot 2!}$

$n = 12$

$$C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{12!}{10!\,2!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 11 \cdot 6 = 66$$

$n = 2$

$$C_{12}^n = \frac{n!}{(n-12)!\,12!} = \frac{2!}{}$$

1233 2133 2233 1133

3312 3321 3322 3311

1332 2331 2332 1331

1323

3123

1 и 2

12, 21 −11, −22

121, 211, 221, 212, 112, 122

121 122

112

211 212

2 2 1 1

между каждыми двумя рядом стоящими цифрами можно вставить "555555"

$$\boxed{(2^{12} - 2) \cdot (12 + 1)}$$

вычитаем две комбинации: 000...000 и 999...999

количество комбинаций цифр "0" и "9"

Ответ: $(2^{12} - 2) \cdot 13$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

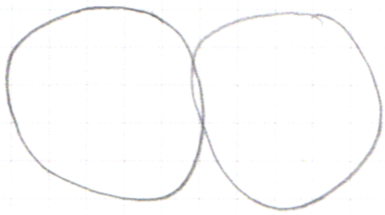
9-13

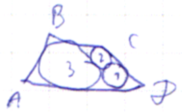
ШИФР

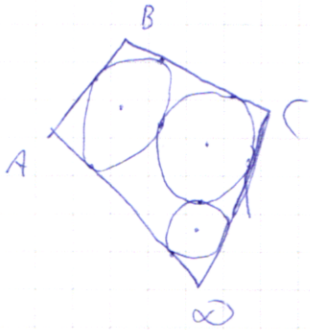
(заполняется секретарём)

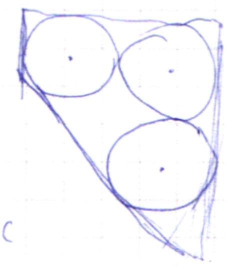
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

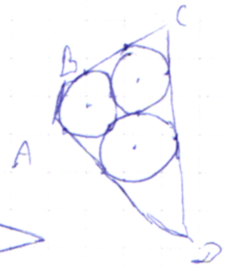
4.











☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

5. $\log_{\sqrt{x+5}-x}(x+5) \geqslant 1$

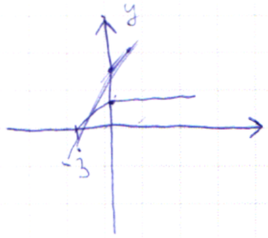
$\cancel{\log_2 4 = 2}$ $\log_3 9 = 2$

$3^2 = 9$

$(\sqrt{x+3}-x) \geqslant x+5$

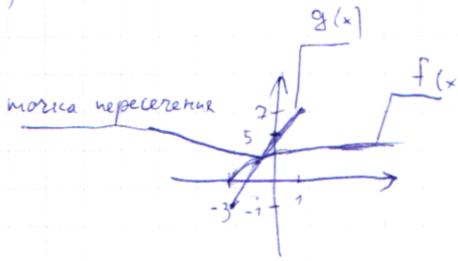
$\sqrt{x+3}-2x-5 \geqslant 0$

$\sqrt{x+3} \geqslant 2x+5$



$f(x)=\sqrt{x+3}$; $g(x)=2x+5$

$f(x) \geqslant g(x)$



$2x+5$

x	0	1
y	5	7

$19\cdot19=$
$=19\cdot10+19\cdot9=$
$=10\cdot10+9\cdot10+$
$+10\cdot9+9\cdot9=$
$=100+90+90+81=$
$=280+81=361$

$16\cdot22=$
$=16\cdot20+16\cdot2=$
$=10\cdot20+6\cdot20+$
$+10\cdot2+6\cdot2=$
$=200+120+20+12=$
$=352$

$\sqrt{x+3}=2x+5$

$x+3=4x^2+20x+25$

$4x^2+19x+22=0$

$D=361-4\cdot4\cdot22=361-352=9$

$x_1=\frac{-19+3}{8}=-\frac{16}{8}=-2$

$x_2=\frac{-19-3}{8}=\frac{-22}{8}=-\frac{7}{2}$ (не подходит) $-\frac{11}{4}\approx-2,6$

Ответ:
$[-3; -\frac{5}{4}]$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

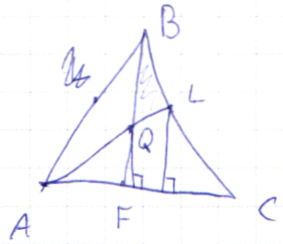
9-13

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



7. 1, 2, 3, 4, 5, 36, 37, 38, 39, 40,

$35 \cdot 5 = 175$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-13

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)