

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

15-056

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$$

Воспользуемся методом рационализации:

$$\left(\sqrt{x+3} - x - 1 \right) \left(x+5 - \sqrt{x+3} + x \right) \geq 0$$

$$1) \begin{cases} \sqrt{x+3} = x^2 + 2x + 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

↓ не годится
 $x = -2; 1$

$$2) 2x + 5 = \sqrt{x+3}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ 4x^2 + 19x + 22 = x + 3 \end{cases}$$

$$4x^2 + 18x + 19 = 0$$

$$x = -\frac{18}{8}; -2 \text{ не годится}$$

$$3) \begin{cases} x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ \sqrt{x+3} > x \end{cases}$$

$$4) \sqrt{x+3} > x$$

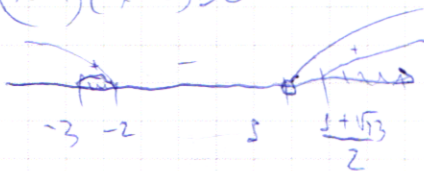
$$\begin{cases} x+3 > x^2 \\ x > 0 \\ x+3 > 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x > 0 \\ x > -3 \\ -3 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty \right) \\ x \in [-3; 0] \end{cases}$$

5) :

$$x \in [-3; -2) \cup (-2; 0] \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; \infty \right)$$

$$(x-1)(x+2) \geq 0$$



Ответ: $[-3; -2) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; \infty \right)$

№ 3

18-е место
"0", "5", "9"
5-ки (6) идут подряд
каждая цифра верна
хотя бы 1 раз
Сколько чисел -?

Т.к. "5" - раз 6 штук, и стоят они подряд, мы можем принять их за непрерывную часть числа, которую мы будем видеть 12-ю цифрой (+6 штук пятерок). Т.е., например,

$$\underbrace{x \times 555555 \times \dots \times}_{6 \quad 10}, \text{ или } \underbrace{55 \dots 5 \times \dots \times}_{6 \quad 12} \text{ и т.д.}$$

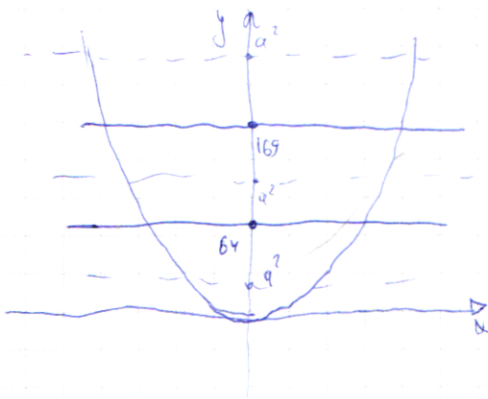
Рассмотрим случаи:

$555555 \times \dots \times$ - число 12 цифр, на каждом месте может стоять либо "0", либо "9". Всего $2^{12} - 2$ вариантов (начинается, когда нет "0" или нет "9")

Возможных раскладок нет, 5-рас - 12 \Rightarrow Всего случаев = $12(2^{12} - 2) =$
 $= 12 \cdot 4094 = 49128$

Ответ: 49128.

№2



$$\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 169 \\ y = 64 \\ y = a \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y = 169 & y = 64 \\ x = 13 & x = 8 \end{array}$$

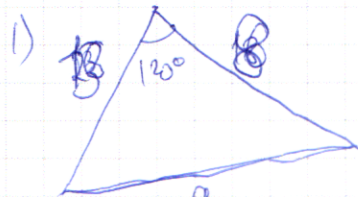
Таким образом, ^{трижды} $y = 169$ и $y = 64$

Векторот срежки углами $2 \cdot 13$ и $2 \cdot 8$
 (Для проверки вычислений векторот срежки в 2 раза меньше) (26) (16)
 Значит, чтобы ~~был~~ угол 120° необходимо выполнение условия ~~существов.~~ Δ в ~~теореме косинусов.~~ ~~каждый~~ 3-го случая.

Возможны 3 случая:

~~1) $a^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 120^\circ$~~
 ~~$a^2 = 169 + 169 - 2 \cdot 169 = 169$~~

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

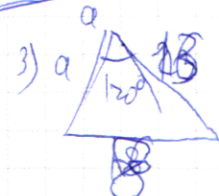
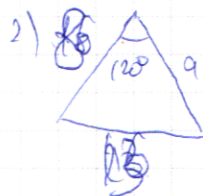


2) $a^2 = 169 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \cos 120^\circ$
 $a^2 = 337$

$a = \sqrt{337}$

$18 < \sqrt{337} < 19$

Такой Δ может существовать



2) $13^2 = a^2 + 64 - 2 \cdot a \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$

$a^2 - 8a - 105 = 0$

$D = 22^2$

$a = 15$, т.к. $a > 0$

Такой Δ тоже может существовать

3) $64 = a^2 + 169 + 26a$

$a^2 + 26a + 104 = 0$

$D = 26^2 - 4 \cdot 104 = 676 - 416 = 260$

макс. корень: $a = \frac{-26 + \sqrt{260}}{2} = -13 + \sqrt{65} < 0 \Rightarrow$ такого Δ не существует

Ответ: $a = 15$; $\sqrt{337}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (\cos(4x) - \cos(14x)) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 14x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \cos^2 x - 3$$

~~$$g'(x) = -2 \sin 4x + 2 \sin x \cos x \quad g(x) = 2 \cos^2 x - \frac{3}{2} - \cos^2 x - 3$$~~

~~$$g'(x) = 4 \cos^2 x - 4 \cos^2 x + \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3$$~~

$$g(x) = 4 \cos^4 x - 5 \cos^2 x - 2,5$$

~~$$g'(x) = -16 \sin^3 x - 10 \sin x$$~~

$$\cos^2 x = t, \quad t \in [0, 1]$$

~~$$f(t) = 4t^2 - 5t - 2,5$$~~

~~$$f'(t) = 8t - 5$$~~

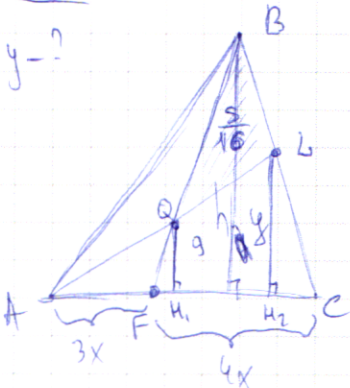
~~$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{8}$$~~

~~$$\min f(t) = f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{2} - \frac{25}{8} - \frac{5}{2} = \frac{100 - 25 - 20}{8} = \frac{55}{8}$$~~

Ответ: $\min = \frac{55}{8}$, max-нет.

№ 6

y-?



По Г. Менелас: $\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{3x}{4x} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABF} = \frac{3S}{4}, S_{\triangle BCF} = \frac{4S}{4} \text{ (т.к. общая высота)}$$

$$S_{\triangle QH_1C} = S_{\triangle BCF} - S_{\triangle BQH_2} = \frac{4S}{4} - \frac{S}{16} = \frac{57S}{102}$$

$$S_{\triangle AQH_1} + S_{\triangle BQH_2} = \frac{4S}{4} - \frac{S}{16} - \frac{57S}{102} = \frac{4S}{102}$$

$$\triangle AQH_1 \sim \triangle BQH_2 \text{ (по 2 углам)}$$

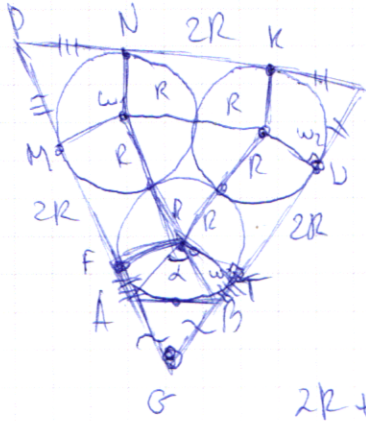
$$2xh = \frac{4S}{4}$$

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{AH_1}{BH_2} = \frac{QH_1}{QH_2} = \frac{3}{4}$$

$$xh = \frac{2S}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{4}{3}$$

№ 4



С а) $AP + BC - AB - CP = 10$. Докажем, что $AP + BC - AB - CP = 10$.
 По в-ву касательных отрезки CK и CL будут равны, аналогично и все остальные (DN и MP ;
 $GF = GT$
 $AF = BT$)

Значит, после преобразования получим, что
 $2R + 2R + 2R = 10$ (т.к. все отрезки касательных отрезков)

$$6R = 10 \Rightarrow R = \frac{5}{3}$$

~~Зная радиус, по теореме косинусов найдем AB~~

б) Зная угол, по теореме косинусов найдем AB (т.к. $AO \cdot OB = 4^2 = AO^2 = OB^2$ ΔAOB - равнобедренный)

$$AB^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$

$$AB = \sqrt{84(1 - \cos \alpha)}$$

$$\delta) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2R}$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{2\sqrt{\frac{AB^2}{4} + R^2}}$$

~~cos~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g'(x) = 5 \cos 5x \sin 9x + 9 \sin 5x \cos 9x - 14 \sin 7x \cos 7x$$

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

Воспользуемся методом разложения:

$$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5) \geq 0$$

$$1) \sqrt{x+3}-x-1=0$$

$$2) 5+x = \sqrt{4+x}$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$25 + 10x + x^2 = 4 + x$$

$$x+1 \geq 0$$

$$x^2 + 9x + 21 = 0$$

$$x+3 \geq 0$$

$$D = 81 - 84 < 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2; 1$$

$$(x-1)(x+2) \geq 0$$



$$\text{Ответ: } (-5; -4] \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$\text{Ответ: } (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

№2

$$f(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - 2 \sin^2 7x - 4 \cos^2 x - 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 14x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g'(x) = -\frac{3}{2} \sin 3x + 7 \sin 14x - 14 \cos 7x$$

$$g(x) = -\frac{3}{2} \sin 3x + 7 \sin 14x - 14 \cos 7x$$

$$\cos 14x = 1 - 2 \sin^2 7x$$

$$\frac{1}{2} \cos 3x - \cos^2 x = 4 \cos^2 x - 3 \cos x - \cos^2 x$$

$$\frac{1}{2} \cos 14x = \frac{1}{2} - \sin^2 7x$$

OD3:

$$\begin{cases} x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -5 & (1) \\ \sqrt{x+3} > x & (2) \\ \sqrt{x+3} \neq x+1 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+3 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-3; 0]$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, x > 0$$

$$x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$(3) x+3 \neq x^2+x+1$$

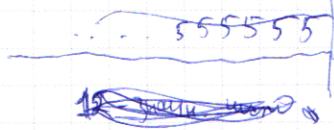
$$x \in (-5; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$x \in (-5; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

503

18-знач. число

"0" ; "5" ; "9"



~~2¹² · 2~~ - 2 · 12

Т.к. "5" - раз 6 штук, и они стоят подряд
 можем представить их же непрерывно как шест, которую мы зовем взорь 12-ного числа.

Т.е. $\underbrace{**555555}_{12}$ $\underbrace{*...*}_{10*}$, или $555555 \underbrace{*...*}_{12}$ и т.д.

Рассмотрим случай:

$555555 \underbrace{*...*}_{12}$ - имеем 12* на каждом месте может стоять одна из 2-х цифр "0" или "9". Всего ~~2¹²~~ $2^{12}-2$ вариантов

исключением случаев когда все (кроме 5-го раз) "0" или все "9".

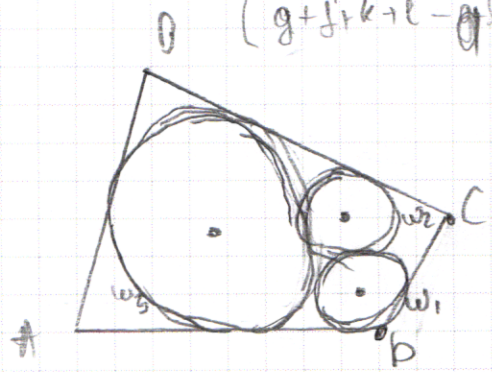
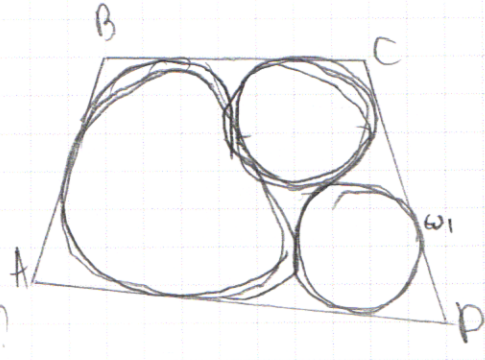
возможных расположениях 5-го раз 12 \Rightarrow всего случаев $12(2^{12}-2) = 12 \cdot 4094 = 49128$

$$\begin{array}{r} 4094 \\ \times 12 \\ \hline 8188 \\ + 4094 \\ \hline 49128 \end{array}$$

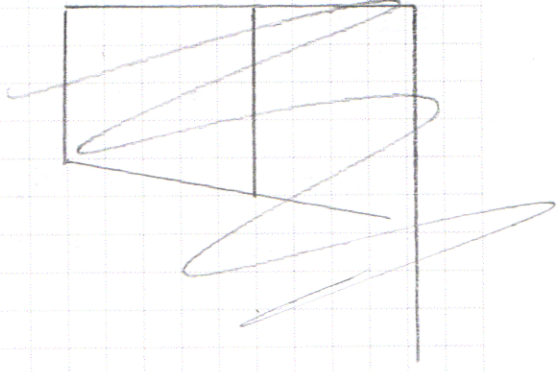
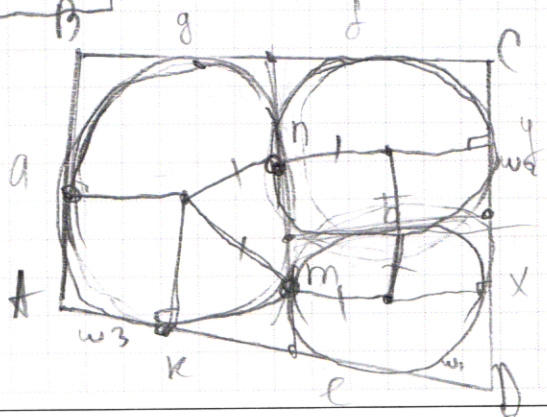
ответ: 49128.

$$\begin{cases} d+b = n+y \\ b+l = x+m \\ a+m+n = g+k \\ g+d+k+l - a-x-y = 10 \end{cases}$$

504

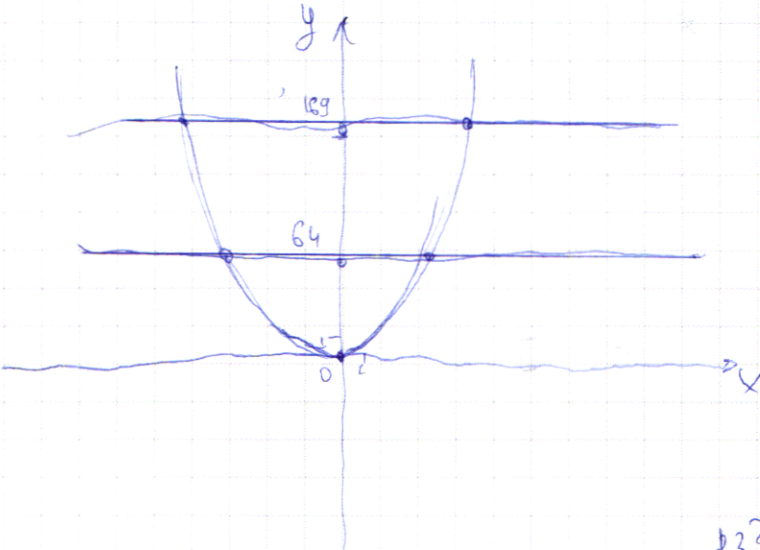


$AD+BC - AB - CD = 10$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

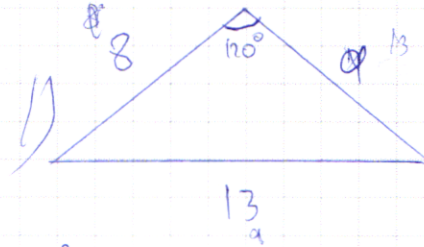
№1



$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} x > 0 & \quad x > 0 \\ 64 = x^2 & \quad 169 = x^2 \\ x = 8 & \quad x = 13 \end{aligned}$$

$$\frac{169}{105} - \frac{64}{105}$$



При $a = 15$ мт положение треугольника
е угол 120° .

$$13^2 = a^2 + 64 - 2a \cdot \cos 120^\circ$$

$$169 = a^2 + 64 - 8a \quad a > 0$$

$$a^2 - 8a - 105 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 484 = 22^2$$

$$a = \frac{8 + 22}{2} = 15$$

~~Другие а не в~~ ~~Т.к. не треугольник~~
~~с этими длинами сторонами и углом 120° не существует~~
~~(Т.к. другие стороны тоже не существуют)~~
яают ~~рез-тат~~:

$$a^2 = 64 + 169 + 8 \cdot 13$$

$$a^2 = 233 + 104 = 337$$

$$2) a^2 = 64 + 169 + 8 \cdot 13$$

$$a^2 = 233 + 104 = 337$$

$$a = \sqrt{337}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1$$

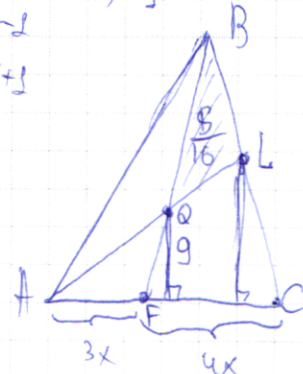
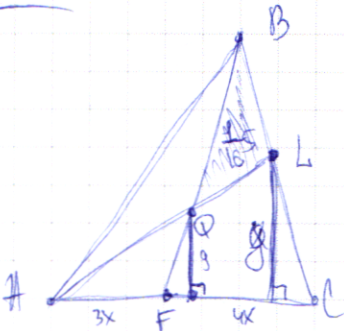
$$2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{1}{16}$$

$$p(L, AC) = ? (y)$$

$$p(Q, AC) = 9$$

№2



$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$2(2 \cos^2 x - 1) - 1$$

$$4 \cos^2 x - 3$$

$$g'(x) = -2 \sin 4x + 7 \sin 14x - 14 \sin^2 x \cos 7x + 2 \sin x$$

$$14 \sin^2 x \cos 7x - 14 \sin^2 x \cos 7x + 2 \sin x - 4 \sin 2x \cos 2x = 0$$

$\sqrt{0.4}$
расширять множитель
 $\cdot 35 \Rightarrow x; 7$

$$\frac{1}{2} \cos 4x - \cos^2 x - 3,5$$

$$\cos^2 7x = 4 \cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 2x - 1 - \cos^2 x - 3,5$$

$$4 \cos^2 x - \cos^2 x - 5,5$$

$$[1; 35]; [36; 70]; [41; 105]; [108; 140]; [141; 175]$$

5 значений мин

$S_{\min} = ?$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 14x)$$

$$\sin^2 7x + \cos^2 x + 3$$

$$\frac{1}{2} \cos 14x = \frac{1}{2} - \sin^2 7x$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \frac{1}{2} + \sin^2 7x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 14x$$

OP3:

$$\begin{cases} x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ \sqrt{x+3} > x \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} > x \\ \sqrt{x+3} > x^2 \\ x > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 < 0 \\ x > 0 \\ x > -3 \\ -3 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad x > 0 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$OPB: \begin{cases} x \in \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \infty\right) \\ x \in [-3; 0] \\ x > -5 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$x \in [-3; -2) \cup (-2; 0] \cup$$

$$\cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \infty\right)$$

$$(\cos 4x)' = -4 \sin x$$

$$(\cos^2 x)' = 2 \cos x \sin x$$

$$2 \sin x \cos x - 4 \sin x = 0$$

$$\log \sqrt{x+3} - x (x+5) \geq 1$$

$$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x+5 - \sqrt{x+3} + x) \geq 0$$

$$1) \begin{cases} x+3 = x^2 + 2x + 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = -2; 1$$

не подходит

$$(x-1)$$

$$(x-1)(x+2) \geq 0$$

$$2) 2x+5 = \sqrt{x+3}$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$$4x^2 + 20x + 25 = x + 3$$

$$4x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$D = 361 - 16 \cdot 22 = 9$$

$$x = \frac{-19 \pm 3}{8} = -\frac{22}{8}; -2$$

$$\frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{22}$$

$$\frac{1}{352}$$

$$\frac{1}{352}$$

$$\frac{1}{352}$$

$$\frac{1}{352}$$

$$\frac{1}{352}$$

$$\frac{1}{352}$$

$$\frac{1}{352}$$

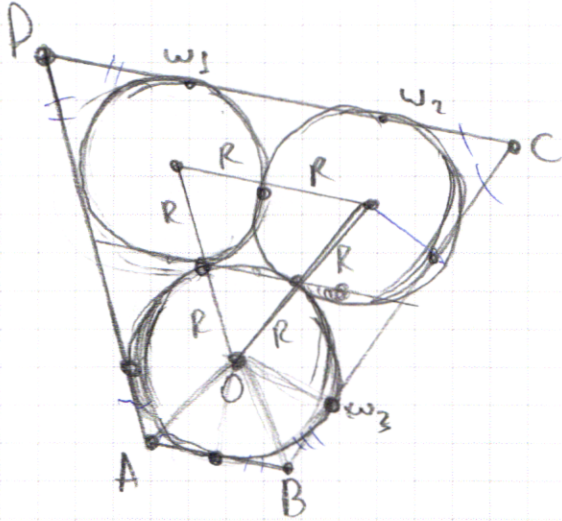
$$\frac{1}{352}$$

$$\frac{1}{352}$$

$$\frac{1}{352}$$

$$\frac{1}{352}$$

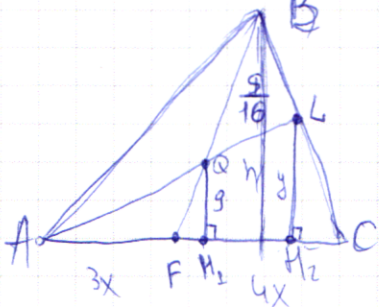
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AD + BC - AB - CD = 10$$

$$6R = 10$$

$$R = \frac{5}{3}$$



$$\triangle AQH_1 \sim \triangle ALH_2$$

$$\frac{AQ}{AL} = \frac{AH_1}{AH_2} = \frac{QH_1}{LH_2} = \frac{9}{y}$$

$$S_{\triangle ABF} = \frac{3S}{7}$$

$$S_{\triangle BFC} = \frac{4S}{7}$$

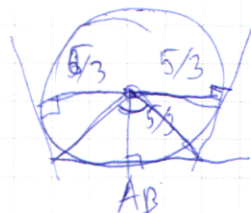
$$S_{\triangle FH_1Q} + S_{\triangle QH_1L} = \frac{4S}{7} - \frac{57S}{102} = \frac{4S}{102} \quad S_{\triangle FQLC} = \frac{4S}{7} - \frac{15S}{16} = \frac{(16 \cdot 4 - 7)S}{102} = \frac{57S}{102}$$

$$2xh = \frac{4S}{7}$$

$$xh = \frac{2S}{7}$$

$$\frac{S_{\triangle FQLC}}{2} = \frac{2S}{7}$$

$$\frac{2}{7} = \sqrt{\frac{3+4}{9+1}}$$



$$2R = \frac{AB}{\sin \alpha}$$

