МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-014

Заполняется ответственным секретарем

√ 1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

√ 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

√ 3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

√ 4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

√ а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

√ б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

√ в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

√ 5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

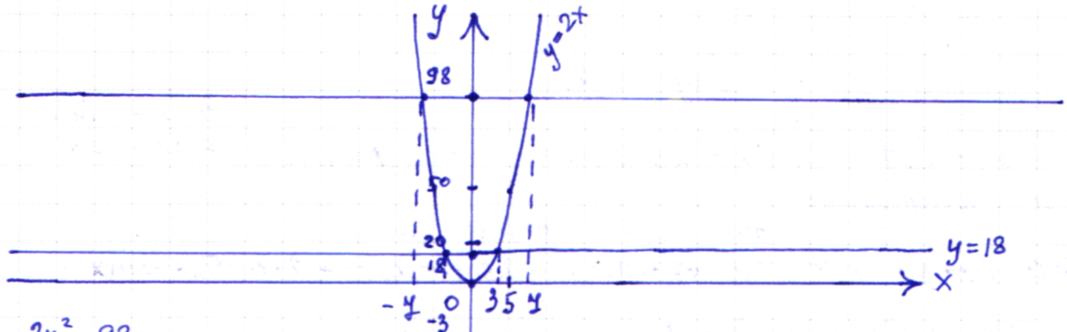
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

√ 7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1;45]$, $[46;90]$, $[91;135]$, $[136;180]$, $[181;225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1:

$y = 2x^2$
$y = 98$
$y = 18$
$y = a$



$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 98 \end{cases}$ $2x^2 = 98$
$x^2 = 49$
$x = \pm 7$

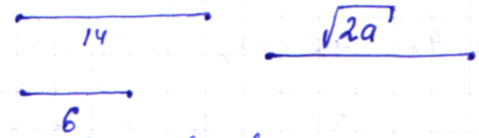
отрезок, получившийся высечением прямой $y = 98$, имеет длину 14

$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 18 \end{cases}$ $2x^2 = 18$
$x^2 = 9$
$x = \pm 3$

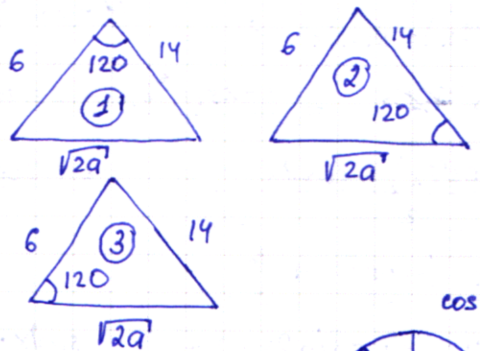
отрезок, получившийся высечением прямой $y = 18$, имеет длину 6.

$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = a \end{cases}$ $2x^2 = a$
$x^2 = \frac{a}{2}$
$x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

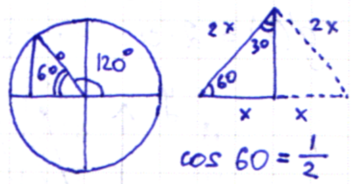
отрезок, получившийся высечением прямой $y = a$, имеет длину $2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$



составим все возможные треугольники с этими сторонами и углом 120°



$\cos 120° = -\cos 60$



$\cos 60 = \frac{1}{2}$

① $(\sqrt{2a})^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos 120°$
$2a = 36 + 196 + 168 \cdot \frac{1}{2}$
$2a = 36 + 196 + 84$
$2a = 316$
$\boxed{a = 158}$

$+\begin{array}{r} 196 \\ 84 \\ 36 \\ \hline 316 \end{array}$ $\quad 316 : 2 = 158$ $\quad \begin{array}{r} 160 \\ \times 8 \\ \hline 1280 \\ + 36 \\ \hline 1316 \end{array}$

② $36 = 196 + 2a - 2 \cdot 14 \cdot \sqrt{2a} \cdot \cos 120°$
$36 = 196 + 2a + 14\sqrt{2a}$
$2a + 14\sqrt{2a} + 196 - 36 = 0$
$2a + 14\sqrt{2a} + 160 = 0$
$D = 14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 160 = 196 - 4 \cdot 160 < 0$
не может быть такого треугольника

продолжение

$2a + 6\sqrt{2a} + 36 - 196 = 0$
$2a + 6\sqrt{2a} - 160 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 160 = 834$

$\sqrt{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{834}}{2}$

продолжение

③ $196 = 36 + 2a - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2a} \cdot \cos 120°$
$196 = 36 + 2a + 6\sqrt{2a}$

продолжение 3-его варианта треугольника

$\sqrt{2a} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{834}}{2}$ корень с минусом не подходит

$2a = \left(\dfrac{-6+\sqrt{834}}{2}\right)^2$ $\quad 2a = \dfrac{(-6+\sqrt{834})^2}{4}$ $\quad \boxed{a = \dfrac{(-6+\sqrt{834})^2}{8}}$

Ответ: при $a = 158$

$a = \dfrac{(-6+\sqrt{834})^2}{8}$

Задача 2:

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ $\quad \max, \min - ?$

упростим выражение

$g(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(7x-3x) - \cos(7x+3x)\right) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \left(\frac{1}{2}(\cos 4x - \underset{(2\cos^2 5x - 1)}{\underset{\parallel}{\cos 2\cdot 5x}}) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4\right) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}(2\cos^2 5x - 1) -$

$- \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\cos^2 5x} + \frac{1}{2} - \sin^2 x + \cancel{\cos^2 5x} + 4 =$

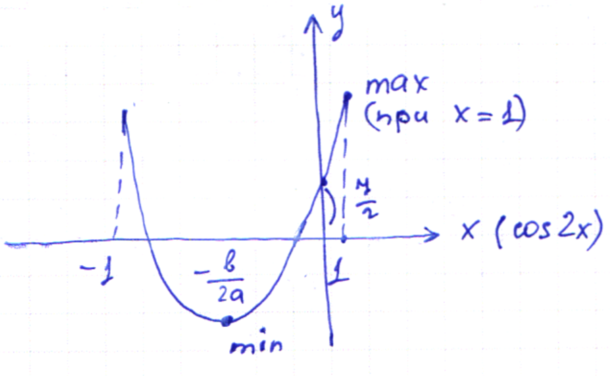
$= \frac{1}{2}\underset{(1-2\sin^2 2x)}{\underset{\parallel}{\cos 4x}} - \sin^2 x + \frac{1}{2} + 4 =$

$= \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 2x) - \sin^2 x + \frac{9}{2} =$

$= \dfrac{1 - 2\sin^2 2x - 2\sin^2 x + 9}{2} = \dfrac{-2\sin^2 2x + \overbrace{1 - 2\sin^2 x}^{\cos 2x} + 9}{2} =$

$= \dfrac{-2(1-\cos^2 2x) + \cos 2x + 9}{2} = \dfrac{-2 + 2\cos^2 2x + \cos 2x + 9}{2} = \dfrac{2\cos^2 2x + \cos 2x + 7}{2} =$

$= \boxed{\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{7}{2}}$



$\min = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

max будет при $\cos 2x = 1$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{5} = \boxed{5}$

Ответ: $\min = -\frac{1}{4}$

$\max = 5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3:

7 0 0 0 ... 0
8 7 7 7 ... 7
8 8 8 ... 8

2 цифры, так как не может быть 0.

$2\cdot 3^{16}$ – всего чисел (17 значных)

число содержит цифры: 0, 7, 8 (только их)

цифра 8 будет встречаться всегда, следовательно надо учесть варианты, когда будут только 0 или 7 оставшиеся цифры

1) $\underbrace{8\,8\,8\,8\,8\,8\,8}_{7}$ $\begin{matrix}0&0\\7&7\end{matrix}$ (2^{10} вариантов оставшихся) $\begin{matrix}0\\7\end{matrix}$ – 2 (варианта, когда последние числа все 0 или все 7)

всего таких 11 вариантов

2) $\underbrace{\ }_{7}\underbrace{8\,8\,8\,8\,8\,8\,8}_{7}$ 2^9 вариантов – 1 (777...7) когда нет 0.

~~0~~ не может быть 0.

3) $\underbrace{\ }_{7}\underbrace{\ }_{0}\underbrace{\dots 8 \dots}_{7}\underbrace{\ }_{2^8}$

(1) 7
(2)

дальше варианты идут аналогичные
всегда есть 7 и 8
(исключаем везде вариант с 7)
~~788...877...7~~

$2^{10}-2+2^9-1+(2^9-1)\cdot 9=$

$=2^{10}-2+2^9\cdot 10-10=2^{10}+10\cdot 2^9-12=2^{10}+5\cdot 2^{10}-12=6\cdot 2^{10}-12$

Ответ: всего таких чисел $6\cdot 2^{10}-12=\boxed{3\cdot 2^{11}-12}$

Задача 5.

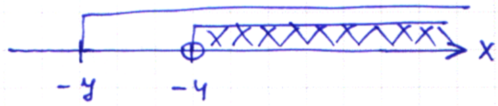
$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ: $x+7 \geq 0$ | $\cancel{x \geq -7}$

$\sqrt{x+7}-x>0$ | $\sqrt{x+7}>x$

$\sqrt{x+7}-x \neq 1$ | $\sqrt{x+7}-x \neq 1$

$x+4>0$ | $x>-4$



$-4 \overset{<}{\vee} \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$-8 \overset{<}{\vee} 1-\sqrt{29}$

$\sqrt{29} \overset{<}{\vee} 9$

$29<81$

1) $x>-4$ ✓

2) $\sqrt{x+7}>x$ ✓

если $x<0$, то $\sqrt{x+7}>x$ всегда

$x \in (-\infty; 0)$

если $x \geq 0$, то

$\sqrt{x+7}>x$

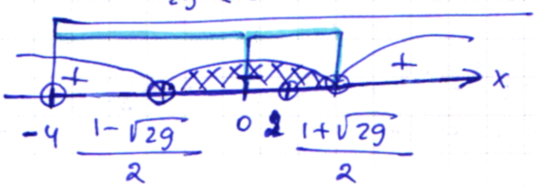
$x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$

$D=1+4\cdot 7=29$

$x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

$x \in [0; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$



3) $\sqrt{x+7} \neq 1+x$ ✓

$x \neq -3$; $x \neq 2$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7}-x-1)\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}-1\right) \geq 0$

$(\sqrt{x+7}-x-1)\left(\frac{x+4-\sqrt{x+7}+x}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0$

$(\sqrt{x+7}-x-1)\left(\frac{2x+4-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0$

$2 \overset{<}{\vee} \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$3 \overset{<}{\vee} \sqrt{29}$

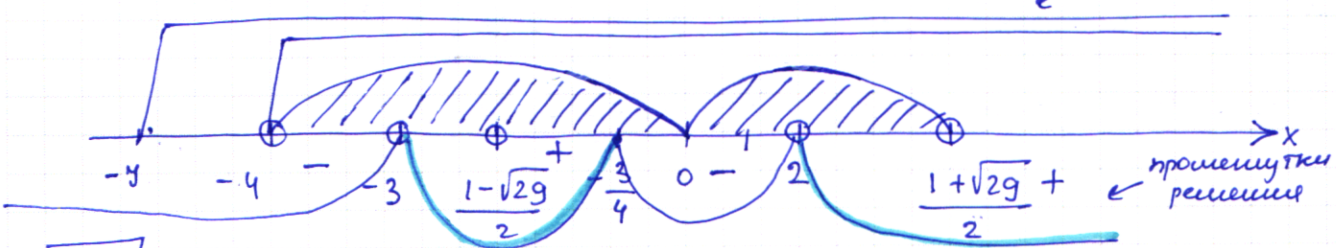
$-3 \overset{<}{\vee} \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$-6 \vee 1-\sqrt{29}$

$-7 \vee -\sqrt{29}$

$\sqrt{29} \overset{<}{\vee} 7$

промежутки по ОДЗ:



$\sqrt{x+7} \vee x+1$ – функция меняет знак при переходе через

заменим на $(x-2)/x+3)$

$(x-2)/x+3) \cdot \left(\frac{2x+4-\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+7}-x}\right) \geq 0$

$\vee_0$ всегда (по ОДЗ)

$(x-2)(x+3)((2x+4)-\sqrt{x+7}) \geq 0$

$2x+4=\sqrt{x+7}$ (найдем 0 и тоже заменим)

$4x^2+16x+16=x+7$

$4x^2+15x+9=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение 5-ой задачи:

$4x^2+15x+9=0$

$\mathcal{D}=15^2-4\cdot 9\cdot 4=225-144=9^2$

$x=\frac{-15+9}{8}=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4}$

$x=\frac{-15-9}{8}=-3$

$(x-2)(x+3)(x+3)(x+\frac{3}{4})\geqslant 0$

$16\cdot 9=144 \quad 15\cdot 15=225 \quad 225-144=81 \quad 15+9=24 \quad 15-9=6$

$-\frac{3}{4} \overset{>}{\vee} \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$-3 \overset{>}{\vee} 2-2\sqrt{29}$

$2\sqrt{29} \overset{>}{\vee} 5$

$4\cdot 29 \overset{>}{\vee} 25$

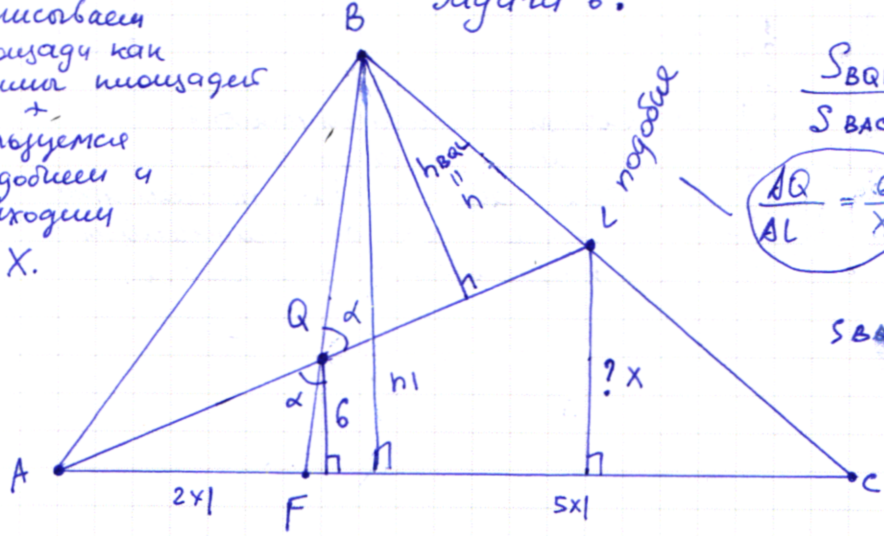
вернемся на нашу ось x с ОДЗ и отметим промежутки.

Запишем ответ:

Ответ: $\left(-3;\ \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\ -\frac{3}{4}\right]\cup\left(2;\ \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

Задача 6:

записываем площади как сумма площадей + пользуемся подобием и находим X.



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}}=\frac{5}{12}$

$\frac{AQ}{AL}=\frac{6}{x}$

запишем S по Σ S маленьких

$\frac{hQL}{2}+\frac{hAQ}{2}+\frac{7x}{2}=S_{BAC}$

$S_{BQL}=\frac{hQL}{2}$

$\frac{AQ}{AQ+QL}=6/x$

$\frac{h_1\cdot 2}{2}+\frac{h_1\cdot 7}{2}=S_{BAC}$

$\frac{h_1\cdot 9}{2}=S_{BAC}$

$\frac{9h_1}{2}=\frac{h\cdot AL+7x}{2}$

$9h_1=h\cdot AL+7x$

$\frac{h\cdot QL}{h(QL+AQ)+7x}=\frac{5}{12}$

$7h\cdot QL=5\cdot h\cdot QA+35x$

$7h\cdot\left(\frac{x}{6}-1\right)AQ=5\cdot h\cdot QA+35x$

$\frac{7}{6\cdot 12}-\frac{35}{12\cdot\frac{2}{9}(h\cdot AL+7x)-12)}$

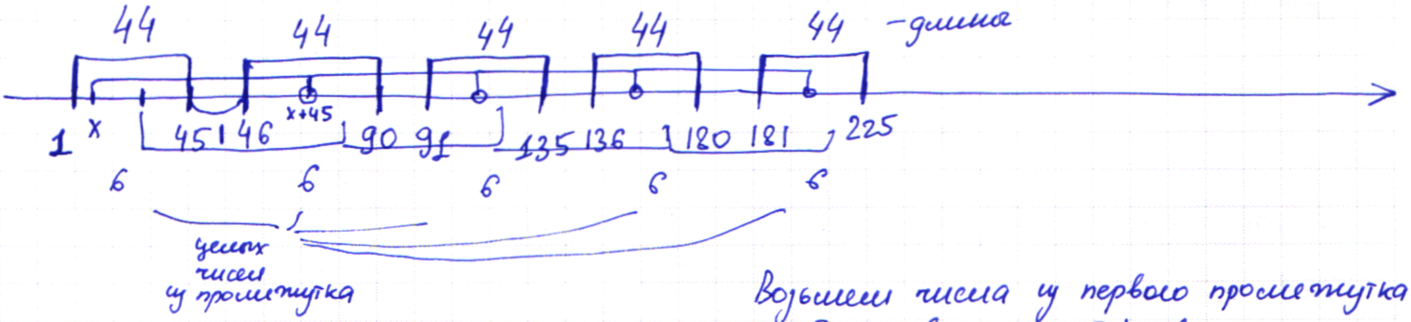
$\frac{7}{6}hx\cdot AQ-7hAQ-5hAQ-35x=0$

$\frac{7}{6}hx\cdot AQ-12hAQ-35x=0$

$x\left(\frac{7}{6}h\cdot AQ-35\right)=12hAQ$

$x=\frac{\frac{7}{6}h\cdot AQ-35}{12\cdot h\cdot AQ}=\frac{7}{6\cdot 12}-\frac{35}{12hAQ}$

Задача 7:



$6 \cdot 5 = 30$ чисел всего

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \ldots\ a_{29}\ a_{30}$

$a_n - a_m \not\vdots\ 45$

$\min \sum a_{1-30}$

Возьмем числа из первого промежутка и уберем все $x_i + 45 \cdot k$ в других

В последнем возьмем самые min числа, поскольку потом придется сдвигаться

$\left.\begin{array}{l} 181 \\ 182 \\ 183 \\ 184 \\ 185 \\ 186 \end{array}\right\}$ 6 min чисел

В предпоследнем надо брать

$136 + 6 = 142$
143
144
145
146
147

и т.д. берем со сдвигом 6, чтобы не попасть на кратность 45.

181	142	103	64	25
182	143	104	65	26
183	144	105	66	27
184	145	106	67	28
185	146	107	68	29
186	147	108	69	30
1101	867	633	396	165

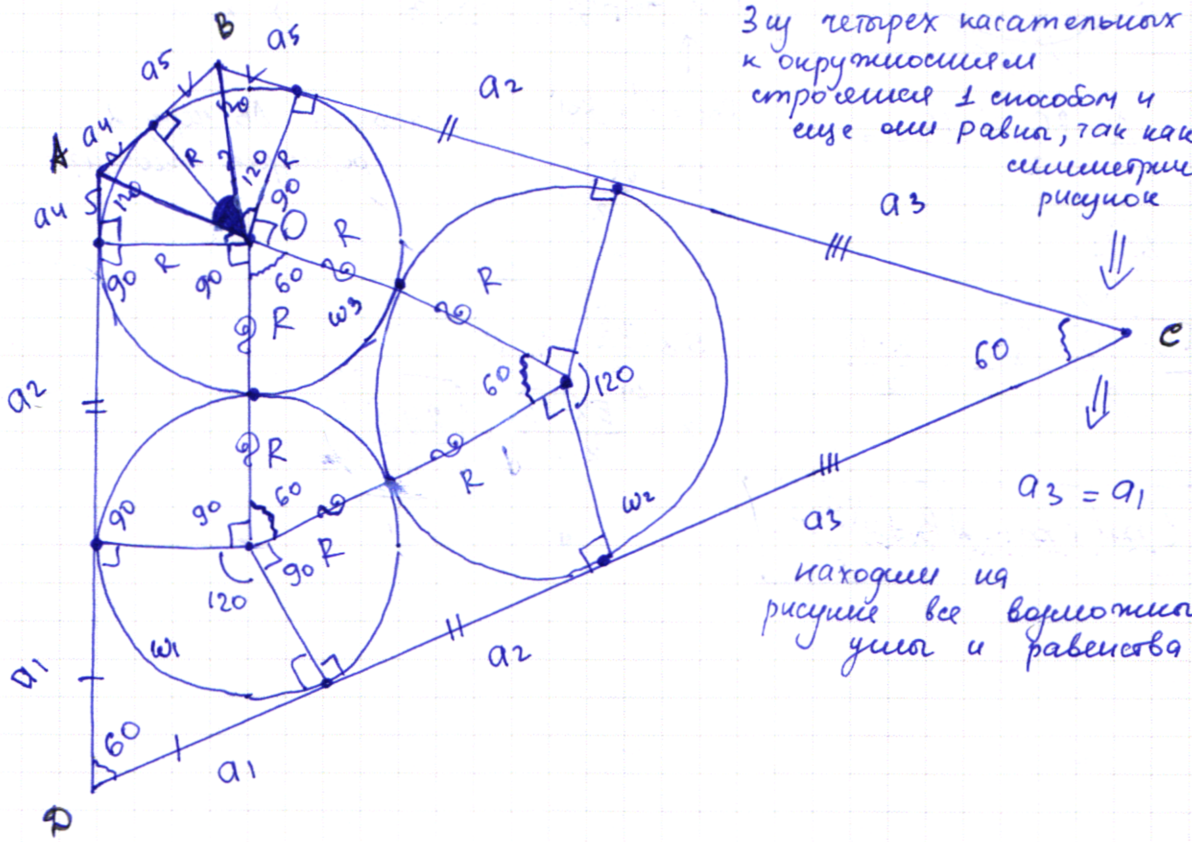
самый минимальный по сумме набор чисел, так как в тех промежутке берем самые минимум и постепенно уменьшаем

$1101 + 867 + 633 + 396 + 165 = 3162$

Ответ: $\min \sum = 3162$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4:



Из четырех касательных к окружностям строится 1 способом и еще они равны, так как симметричен рисунок

⇓

$a_3 = a_1$

находим из рисунка все возможные углы и равенства

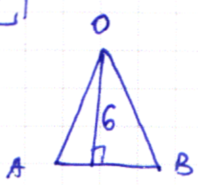
а) $AD + BC - AB - CD = 12$ (доказываем с помощью равенства касательных)

$\cancel{a_4} + a_2 + \cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{a_5} + \cancel{a_3} - \cancel{a_4} - \cancel{a_5} - \cancel{a_1} - \cancel{a_2} - \cancel{a_3} = 12$

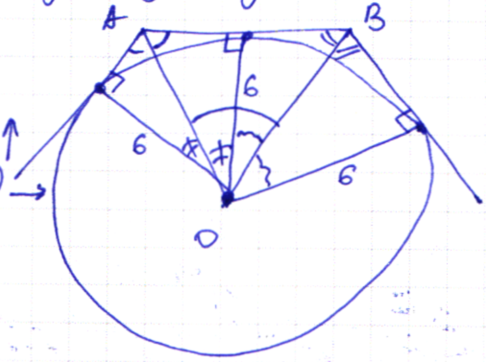
$a_2 = 12 \qquad a_2 = 2R \Rightarrow R = \frac{12}{2} = 6$

$\boxed{\text{Ответ: } R = 6}$

б) $\angle AOB = ?$



в построении у нас изменяется только AB, ее можно выбрать по-разному, но угол $AOB = const$

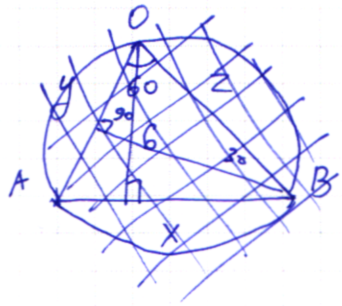


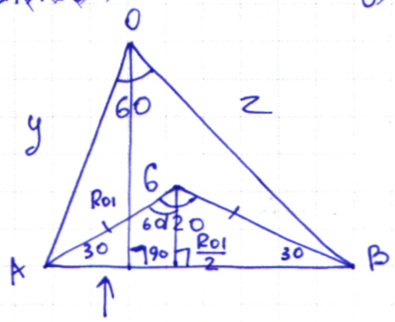
получаем из равенства огромного количества углов + вычислений, что $\angle AOB = 60°$ (см. рисунок)

Ответ: $\boxed{\angle AOB = 60°}$

в) $AO \cdot BO = 58$
$AB - ?$

~~$\frac{x}{\sin 60} = 2R_{01}$~~ ~~$y \cdot z = 58$~~





~~$AB = \sqrt{3} \cdot R_{01}$~~
~~$\frac{\sqrt{3} \cdot R_{01}}{\sin 60} = 2R_{01}$~~

$S = \frac{AO \cdot BO \cdot \sin 60}{2} =$

$= \frac{x \cdot h}{2}$

$R_{01}^2 = ?^2 + \frac{R_{01}^2}{4}$

$?^2 = \frac{\sqrt{3} R_{01}}{2}$

найдем AB через 2 формулы площади

$\frac{\overset{58}{AO \cdot BO} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{2}} = \frac{x \cdot 6}{\cancel{2}}$

$58 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x \cdot 6$

$x = \frac{\overset{29}{\cancel{58}} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2} \cdot 6} = \boxed{\frac{29\sqrt{3}}{6}}$

$\boxed{\text{Ответ: } AB = \frac{29\sqrt{3}}{6}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

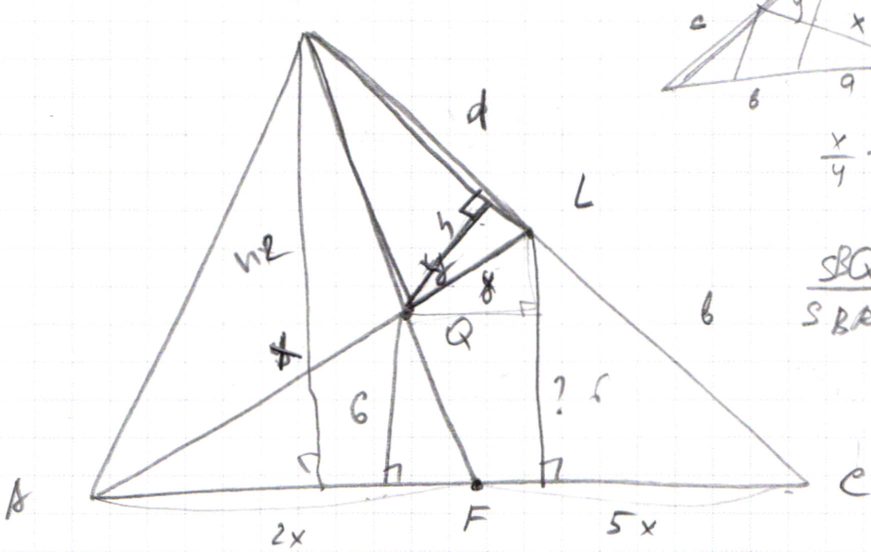
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

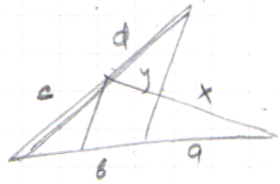
15-014

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+1\right)$

$\frac{a}{b}\left(\frac{c+d}{d}\right)$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

$\frac{x}{y} = \frac{2}{5}\left(\frac{b}{d}+1\right)$

$$\frac{\frac{h\cdot d}{2}}{\frac{yx\cdot h_2}{2}}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №10

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{AQ}{AL} = \frac{6}{x}$

$\frac{h \cdot QL}{2} + \frac{h \cdot AQ}{2} + \frac{x \cdot y}{2} = S_{BAC}$

$\frac{h(QL + AQ) + yx}{2} = S_{BAC}$

$S_{BQL} = \frac{h \cdot QL}{2}$

$\frac{h_1 \cdot 2x}{2} + \frac{h \cdot y}{2} = S_{BAC}$

$\frac{h \cdot QL}{h(QL + AQ) + yx} = \frac{5}{12}$

$12 \cdot h \cdot QL = 5 \cdot h QL + 5h \cdot AQ + yx \cdot 5$

$7 \cdot h \cdot QL = 5 \cdot h \cdot AQ + 35x$

$\frac{AQ + QL}{AQ} = \frac{x}{6}$

$1 + \frac{QL}{AQ} = \frac{x}{6}$

$QL = \left(\frac{x}{6} - 1\right) AQ$

$\frac{9h_1}{2} = \frac{h(QL + AQ)}{2} + \frac{yx}{2}$

$9h_1 = h(QL + AQ) + yx$

$h_1 = \frac{h(QL + AQ) + yx}{9}$

$h_1 = \frac{h \cdot AL + yx}{9}$

$\frac{(h \cdot AL + yx)}{9} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} - \frac{2 \cdot 6}{2} = \frac{h \cdot AQ}{2}$

$2\frac{(h \cdot AL + yx)}{9} - 12 = h\,AQ$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-014

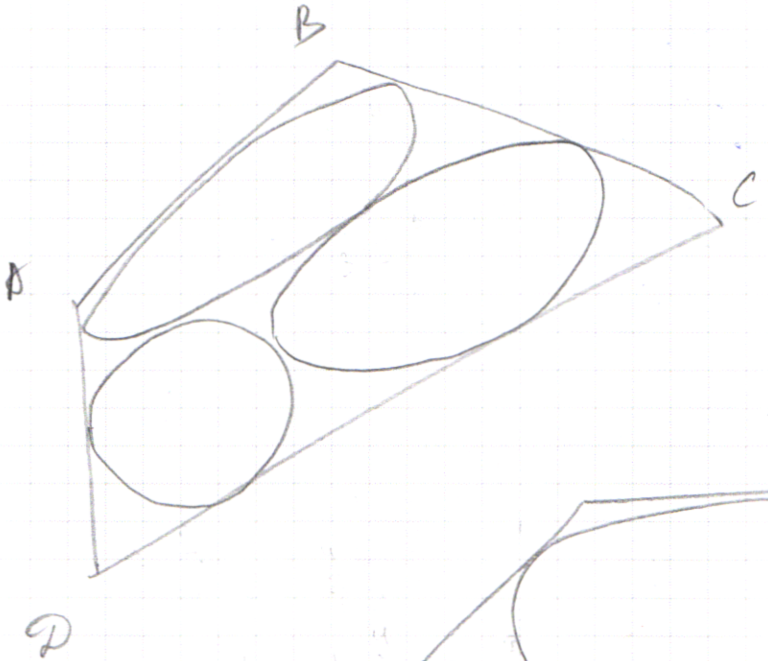
ШИФР

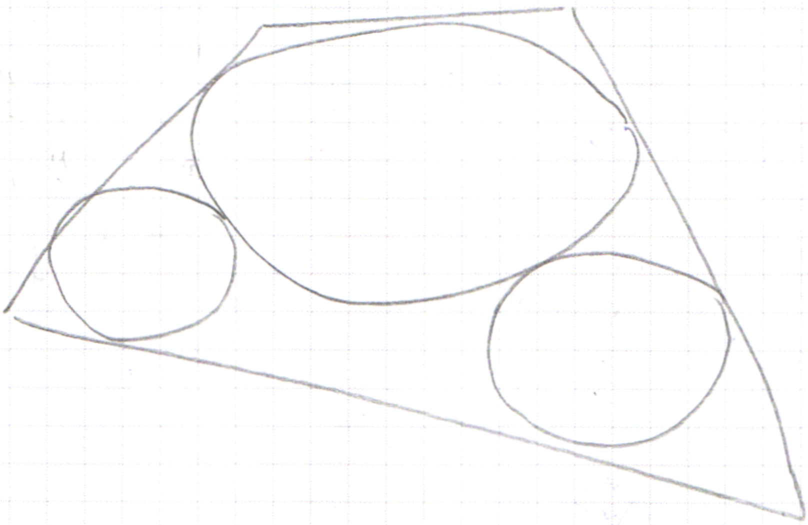
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$196 + 640$

$$\begin{array}{r} {}^{2}\\ \times\, 160 \\ 4 \\ \hline 640 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}\\ +\, 640 \\ 194 \\ \hline 834 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -834 & 2 \\ \underline{8} & \overline{417} \\ 3 & \\ \underline{2} & \\ 14 & \end{array}$$





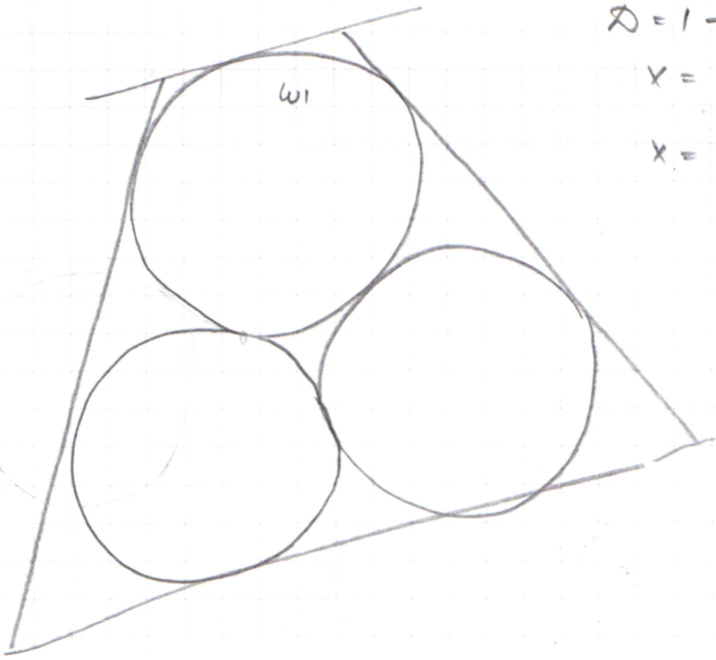
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

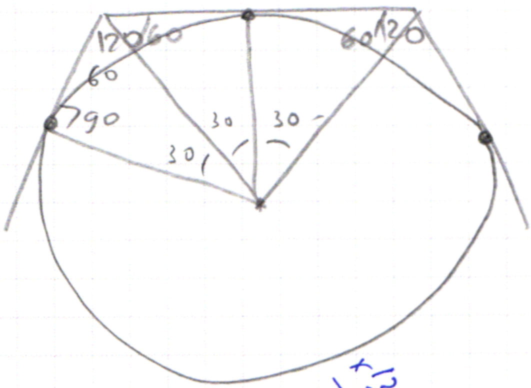
Страница № 11

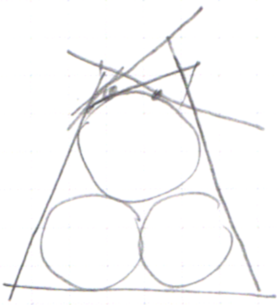
(Нумеровать только чистовики)

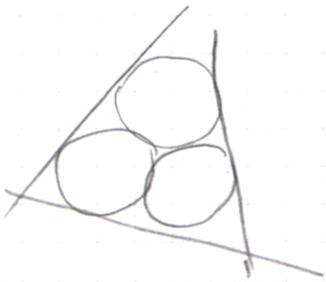
$$\sqrt{x+7} = 1+x$$
$$x+7 = x^2+2x+1$$
$$x^2+x-6=0$$
$$D = 1+4\cdot 6 = 5^2$$
$$x = \frac{-1+5}{2} = 2$$
$$x = \frac{-1-5}{2} = -3$$

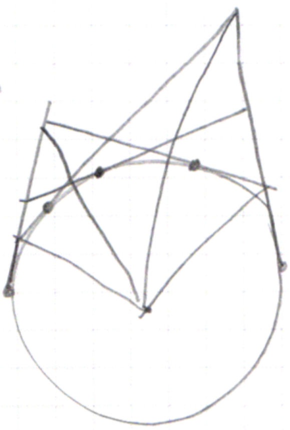


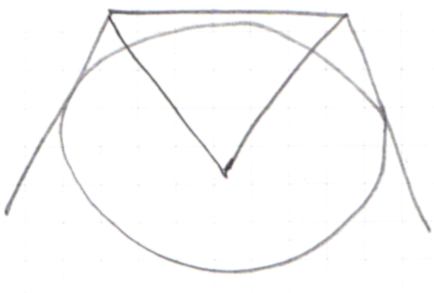
$$\begin{array}{r} 360 \\ -\,120 \\ \hline 240 \end{array}$$











$91+12$

$46+18$

$1+24$

$2\cdot 5=10$