МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 6-011

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка [1; 45], [46; 90], [91; 135], [136; 180], [181; 225]. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~(sinxcosy − cosxsiny)(sinxcosy + cosxsiny)~~

N3.

Так как цифр „8" ровно семь, и они идут подряд, то „8888888"-блок, цифр „8" больше нет в 17-значном числе. Обозначим данный блок „A". Пусть „A" – одна цифра, и теперь число 11-значное, причём одна из цифр – A.

Значит, для цифр „0" и „7" осталось ровно 10 мест. Рассмотрим все варианты расположения цифры „A" в нашем 11-значном числе

1) Пусть A стоит в начале числа на первом месте

$$A\ \underbrace{\overset{2}{0}\ \overset{3}{0}\ \overset{4}{0}\ \overset{5}{0}\ \overset{6}{0}\ \overset{7}{0}\ \overset{8}{0}\ \overset{9}{0}\ \overset{10}{0}\ \overset{11}{0}}_{10\ \text{цифр}}$$

Последующая за „A" цифра (обозначим её „2") может принимать 2 значения: „7" и „0". Следующая за ней цифра „3" тоже может принимать значения „7" и „0". Все остальные цифры числа, кроме A, принимают значения „7" и „0". Значит, всего чисел можно составить $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^{10}$.

2) Пусть A стоит на втором месте (вторая цифра) числа, тогда число имеет вид:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
o A o o o o o o o o o

На первом месте может стоять только цифра „7", т.к. число не может начинаться с „0". На всех остальных местах в числе могут стоять либо „0", либо „7".
Число имеет вид:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
7 A o o o o o o o o o

Значит, таких чисел можно составить:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9$.

3) Пусть A стоит на любом другом месте, кроме первого в числе. Тогда на первом месте должна стоять только цифра „7". Значит, число принимает такой вид:

7 o A o o o o o o o o
7 o o A o o o o o o o
7 o o o A o o o o o o
7 o o o o A o o o o o
7 o o o o o A o o o o
7 o o o o o o A o o o
7 o o o o o o o A o o
7 o o o o o o o o A ~~o~~
7 o o o o o o o o o A

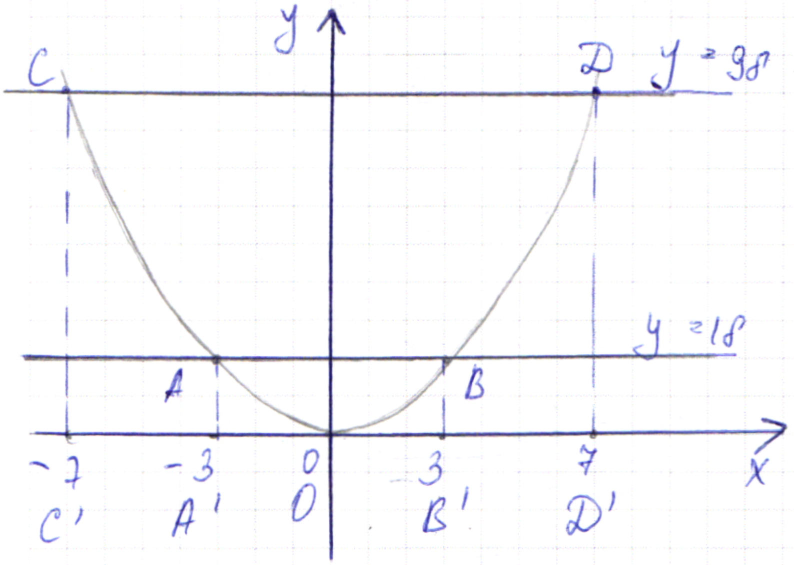
Во всех этих вариантах все остальные цифры, кроме A и первой „7" могут принимать два значения: „7" или „0". Всего таких цифр – 9. Значит, мы можем составить по 2^9 чисел в каждом варианте.

Итого: $2^{10} + 2^9 + 2^9 + 2^9 + 2^9 + 2^9 + 2^9 + 2^9 + 2^9 + 2^9 + 2^9 =$
$= 2^{10} + 2^9 \cdot 10 = 2^9(2+10) = 12 \cdot 2^9 = 32 \cdot 16 \cdot 12 = 6144$ – количество 17-значных чисел, содержащих только цифры „0", „7" и „8" (цифр „8" ровно 7, и они идут подряд).

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.



Т.к. парабола $y=2x^2$ пересекает прямые $y=98$ и $y=18$, то

1) $y=2x^2$ и $y=98$

$2x^2=98$

$x^2=49$

$\left[\begin{array}{l} x_1=-7 \\ x_2=7 \end{array}\right.$

Значит, графики пересекаются в точках $C(-7;98)$, $D(7;98)$.

Длина отрезка CD: $CD = C'D' = C'O + D'O = \cancel{3+3=6}$
$= 7+7=14$

2) $y=2x^2$ и $y=18$

$2x^2=18$

$x^2=9$

$\left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=3 \end{array}\right.$

Значит, графики пересекаются в точках:

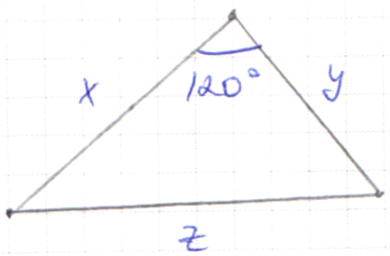
$A(-3;18)$, $B(3;18)$

Длина отрезка AB: $AB = A'B' = OB' + OA' = 3+3=6$.

3) $y=2x^2$ и $y=a$ Длина отрезка, высекаемая на прямой $y=a$, равна $|2x|$.

$2x^2=a$.

4) Рассмотрим треугольник с углом $120°$.



Чтобы такой треугольник можно было составить должна выполняться теорема косинусов:

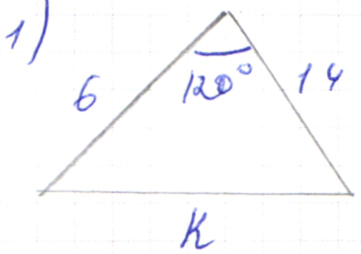
$z^2 = x^2+y^2-2xy\cdot\cos 120° =$

$= x^2+y^2+2xy\cdot\cos 60^\circ = x^2+y^2+2xy\cdot\frac{1}{2} = x^2+y^2+xy.$

$z^2 = x^2+y^2+xy.$

Т.к две стороны нашего треугольника равны 6 и 14 то рассмотрим и найдем все варианты значений третьей стороны

1)



$k^2 = 6^2+14^2+6\cdot 14 = 316$

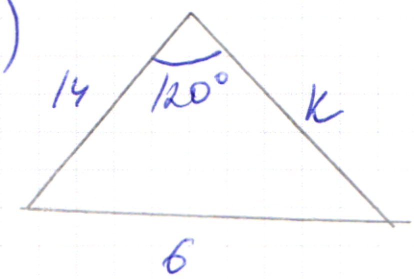
$k = \sqrt{316} = 2\sqrt{79} = |2x|$

$x = \pm\sqrt{79}$

$2x^2 = a$

$a = 2(\sqrt{79})^2 = 2\cdot 79 = 158.$

2)



$6^2 = k^2+14^2+14k$

$k^2+14k+160=0$

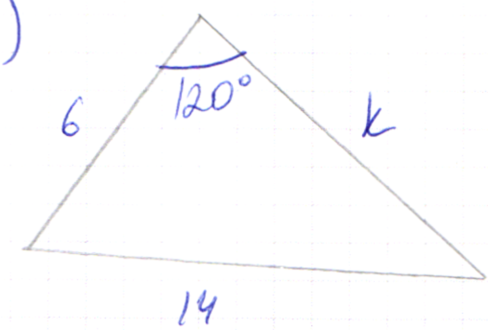
$k_{12} = \cancel{\frac{-14\pm\sqrt{196-4\cdot 160}}{2} = \frac{-14\pm\sqrt{836}}{2}} =$

$= \cancel{\frac{-14\pm 2\sqrt{209}}{2}} = \cancel{-7\pm\sqrt{709}}.$

$D = 14^2-4\cdot 160 = 196-640 < 0 \Rightarrow$ корней нет.

Значит, такой вариант невозможен.

3)



$14^2 = k^2+6^2+6k$

$k^2+6k-160=0$

$D = 36+4\cdot 160 = 676 = 26^2$

$k_{12} = \frac{-6\pm\sqrt{26^2}}{2} = \frac{-6\pm 26}{2} = \left[\begin{array}{l}10\\-16\end{array}\right.$

1) $k_1 = 10 = |2x|$

$\left[\begin{array}{l}10=2x\\10=-2x\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-5\end{array}\right.$ $a = 2x^2 = 2\cdot 25 = 50$

2) $k_2 = -16 = |2x|$, противоречие!

Ответ: 50; 158.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Однако, среди посчитанных вариантов есть числа, в которых цифры „0“ или „7“ могут вообще не встречаться в числе.

Это такие числа, как

12 {
A 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
A 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7
7 A 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7
7 7 A 7 7 7 7 7 7 7 7 7
7 7 7 A 7 7 7 7 7 7 7 7
7 7 7 7 A 7 7 7 7 7 7 7
7 7 7 7 7 A 7 7 7 7 7 7
7 7 7 7 7 7 A 7 7 7 7 7
7 7 7 7 7 7 7 A 7 7 7 7
7 7 7 7 7 7 7 7 A 7 7 7
7 7 7 7 7 7 7 7 7 A 7 7
7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 A 7
7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 A

~~A000000000000~~

Других таких чисел не существует, потому что во всех остальных случаях число имеет хотя бы одну цифру „7“ => при хотя бы одном нуле число является искомым

Значит, количество 17-значных чисел, содержащих только цифры „0“, „7“, „8“ (при этом каждая цифра встречается хотя бы 1 раз), цифр „8“ ровно пять, и они идут подряд, равно:

$6144 - 12 = 6132$.

Ответ: 6132.

№5

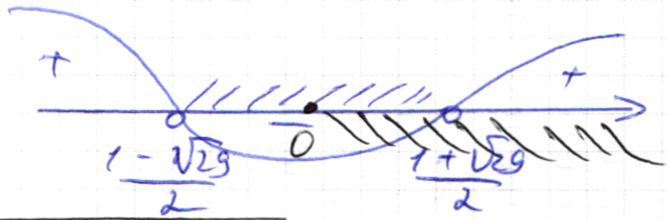
$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$$

1) ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ \sqrt{x+7} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+7} > x \\ x \geq -7 \\ \sqrt{x+7} \neq x \end{cases}$ $\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+7 > x^2 \end{cases} \\ x \geq -7 \\ x^2 \neq x+7 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 7 < 0 \\ x \geq -7 \\ x^2 - x - 7 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 7 < 0 \\ x^2 - x - 7 \neq 0 \end{cases}$ $D = 1 + 4 \cdot 7 = 29$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \frac{1+\sqrt{29}}{2} \approx \frac{1+5}{2} \approx 3 \\ x \neq \frac{1-\sqrt{29}}{2} \approx \frac{1-5}{2} \approx -2 \\ \left(x - \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)}$$

2) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x} \sqrt{x+7}-x$

Допустим, что функция $y = \sqrt{x+7}-x$ – возрастающая ~~тогда~~

$\sqrt{x+7} - x \leq x+4$

$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$

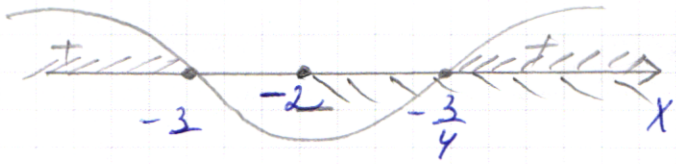
$2x + 4 \geq \sqrt{x+7}$

$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ (2x+4)^2 \geq x+7 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2 + 16x + 16 \geq x+7 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2 + 15x + 9 \geq 0 \end{cases}$

$D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 225 - 144 = 81 = 9^2$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ -\frac{3}{4} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ (x+3)\left(x+\frac{3}{4}\right) \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right) \end{cases} \qquad x \in \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right).$$

Учитывая ОДЗ, $\begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right) \\ x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases}$ $\boxed{x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right).}$

Допустим, что функция $y = \sqrt{x+7} - x$ – убывающая, тогда

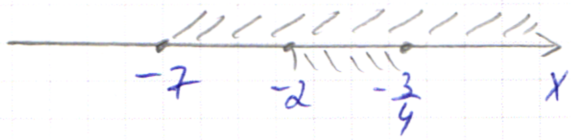
$$x + 4 \leq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x + 4 \leq \sqrt{x+7}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+4 < 0 \\ 2x+4 \leq \sqrt{x+7} \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ 2x+4 \leq \sqrt{x+7} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x+7 \geq 0 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ (2x+4)^2 \leq x+7 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \geq -7 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -7 \\ 4x^2+16x+16 \leq x+7 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq -7 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2+15x+9 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in [-7; +\infty) \\ \begin{cases} x \in [-2; +\infty) \\ (x+3)\left(x+\frac{3}{4}\right) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in [-7; +\infty) \\ \begin{cases} x \in [-2; +\infty) \\ x \in \left[-3; -\frac{3}{4}\right] \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-7; +\infty) \\ x \in \left[-2; -\frac{3}{4}\right] \end{array}\right.$$



$$x \in [-7; +\infty)$$

Учитывая ОДЗ; $\begin{cases} x \in [-7; +\infty) \\ x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases}$ $\boxed{x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right).}$

Значит, $x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

Ответ: $\left[0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right).$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

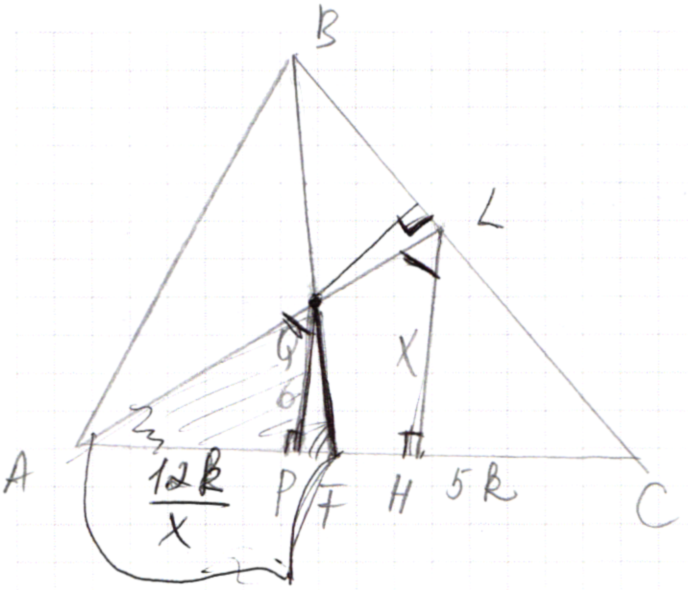
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{12}$

$\frac{S_{QLH}}{8}$

$S_{AQT} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2k = 6k$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 12k = 6xk.$

$\frac{6}{x} = \frac{AQ}{AL}$

$\frac{6}{x} = \frac{AP}{2k - AP} = 7$

$APx = 12k - 6AP$

$AP(x+6) = 12k$

$x + 4 \geq \sqrt{x+7} - x$ $\quad -\frac{24}{8}$

$2x + 4 \geq \sqrt{x+7}$ $\quad \frac{-6}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ (2x+4)^2 \geq x+7 \end{cases}$ $\quad \frac{-15 \pm 9}{8}$

15, 15, 75, 15, 225

$225 - 4 \cdot 4 \cdot 9$

16, 9, 144

16 · 9 = 144

225 − 144 = 81

$\cancel{S_0}$ $\quad \frac{AP}{\cancel{2k}} = \frac{6}{x} \cdot 2k = \frac{12k}{x}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

1) $\sin\alpha\sin\beta = \sin(x+y)\sin(x-y) = (\sin x\cos y + \cos x\sin y)\times$
$\times(\sin x\cos y - \cos x\sin y) = \sin^2 x\cos^2 y - \cos^2 x\sin^2 y =$
$= \sin^2 x\cos^2 y - (1-\sin^2 x)(1-\cos^2 y) =$
$= \sin^2 x\cos^2 y - (1-\cos^2 y - \sin^2 x + \sin^2 x\cos^2 y) =$
$= \sin^2 x\cos^2 y - 1 + \cos^2 y + \sin^2 x - \sin^2 x\cos^2 y =$
$= \sin^2 x + \cos^2 y - 1 = \sin^2 x + \cos^2 y - 1 = \sin^2 x + \cos^2 y -$
$- \sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 y - \cos^2 x = \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$

2) Значит, $\sin 3x\sin 7x = \cos^2 2x - \cos^2 5x$

3) $g(x) = \sin 3x\sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$
$= \cos^2 2x - \cos^2 5x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$
$= \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 = \cos^2 2x - (1-\cos^2 x) + 4 =$
$= \cos^2 2x - 1 + \cos^2 x + 4 = \cos^2 2x + \cos^2 x + 3$

$g(x) = \cos^2 2x + \cos^2 x + 3$

$1 \geq \cos^2 x \geq 0$ $\qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq \cos^2\alpha \leq 1$

$1 \geq \cos^2 2x \geq 0$

$2 \geq \cos^2 2x + \cos^2 x \geq 0$

$5 \geq \cos^2 2x + \cos^2 x + 3 \geq 3$

Значит, $g(x)_{min} = 3$

$g(x)_{max} = 5$.

Ответ: 3; 5.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№7.

Рассмотрим остатки от деления чисел на 45 в каждом промежутке

1) [1; 45] : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 43, 44, 0.

2) [46; 90] : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 43, 44, 0

3) [91; 135] : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 43, 44, 0

4) [136; 180] : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 43, 44, 0

5) [181; 225] ; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7..., 43, 44, 0.

Заметим, что в каждом промежутке, состоящим из 45 чисел, присутствуют все ~~нату~~ остатки по модулю 45, причем только по одному разу

Если среди выбранных тридцати чисел окажутся хотя бы два числа с одинаковыми остатками по модулю 45, то их разность будет делится на 45. Следовательно, выбирать число надо так, чтобы у каждого был свой не повторяющийся остаток при делении на 45.

Чтобы сумма была наименьшей, числа из каждого промежутка должны быть как можно меньше, поэтому начнем выбирать с самого большого промежутка. [181; 225]

Выберем первые шесть чисел, дающих остатки 1, 2, 3, 4, 5, 6 : 181, 182, 183, 184, 185, 186

Из промежутка [136; 180] уже нельзя выбрать первые шесть чисел, поэтому выбираем числа, дающие остатки 7, 8, 9, 10, 11, 12 : 142, 143, 144, 145, 146, 147

Из промежутка [91 135] нельзя выбрать первые 12 чисел, поэтому выбираем числа, дающие остатки 13, 14, 15, 16, 17, 18 : 103, 104, 105, 106, 107, 108,

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Из промежутка [46, 90] нельзя выбрать первые 18 чисел, поэтому выбираем числа, дающие остатки 19, 20, 21, 22, 23, 24 : 64, 65, 66, 67, 68, 69.

Из промежутка [1; 45] выбираем числа, дающие остатки 25, 26, 27, 28, 29, 30 : 25, 26, 27, 28, 29, 30

Значит наименьшее значение которое может принимать сумма тридцати выбранных чисел равна

$$
\begin{aligned}
S_{min} = {} & 181 + 182 + 183 + 184 + 185 + 186 + \\
& + 142 + 143 + 144 + 145 + 146 + 147 + \\
& + 103 + 104 + 105 + 106 + 107 + 108 + \\
& + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 + \\
& + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 =
\end{aligned}
$$

$$= 1101 + 867 + 633 + 399 + 165 = 3165$$

Ответ: 3165.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6 - 011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

1 2 3 ... 44 0

1 2 ...... 44 0

$C_{45}^{6} \cdot C$

136...

S

136 42

37

38

39

40

41

91 97

92 98

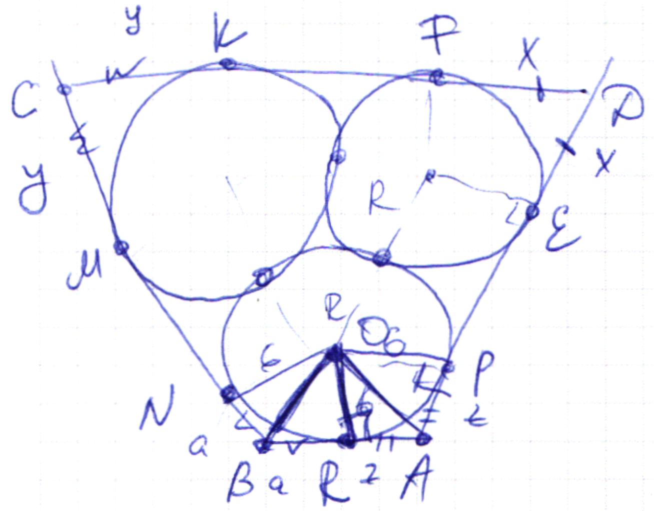
93 99

94 100

95 101

96 102

103



$AD = DE + EP + AP = x + z + EP$

$BC = BN + MN + CM = a + y + MN$

$AB = a + z$

$CD = x + y + KF$.

$EP + MN - KF = 12$.

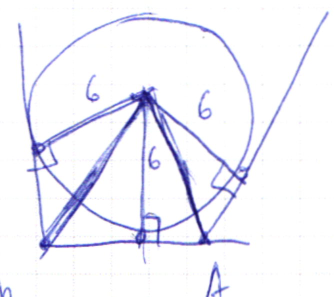
$2R + 2R - 2R = 12$

$R = 6$.

58/2

29

29



$180 - 60 = 120$.

180

$\sqrt{3} \cdot 12 \cdot 120$ B

300

$AO : MO = \sqrt{3}$.

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

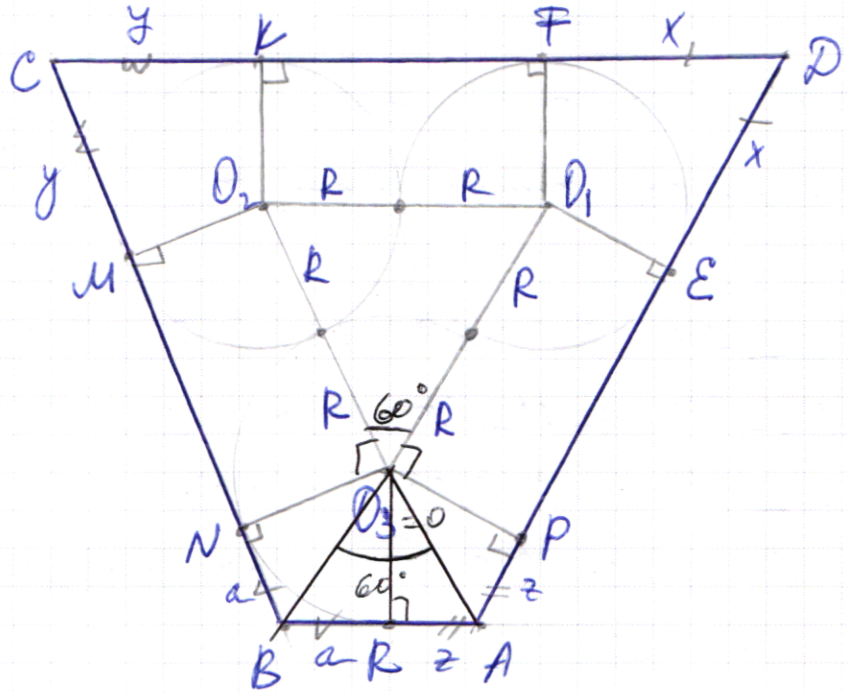
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



1) Пусть ω_1 касается CD и AD в точках F и E соотв.
ω_2 касается CD и CB в точках K и M соотв.
ω_3 касается CB, BA и AD в точках N, R, P соотв.

2) DE и DF – отрезки касательных DC и DA к ω_1. – Значит, $DE = DF = x$

3) AP и AR – отрезки касательных AD и AB к ω_3 Значит, $AP = AR = z$

4) BN и BR – отрезки касательных BA и BC к ω_3 Значит, $BN = BR = a$

5) CK и CM – отрезки касательных CD и CB к ω_2 значит, $CK = CM = y$

a) $AD + BC - AB - CD = 12$

$AD = DE + EP + AP = x + z + EP$

$BC = BN + MN + CM = a + y + MN$

$AB = a + z$

$CD = x + y + KF.$

$AD + BC - AB - CD = x + z + EP + a + y + MN - a - z -$

$- x - y - KF = EP + MN - KF = 12.$

Проведем O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3. т.к. ω_1, ω_2, ω_3 - попарно касающиеся окружности, то

$O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = R + R = 2R.$

Проведем $O_1E \perp AD$, $O_3P \perp AD \Rightarrow O_1E \parallel O_3P$, $O_1E = O_3P = R$

$O_3N \perp CB$, $O_2M \perp CB \Rightarrow O_3N \parallel O_2M$, $O_3N = O_2M = R$

$O_2K \perp CD$, $O_1F \perp CD \Rightarrow O_2K \parallel O_1F$, $O_2K = O_1F = R$

Значит, O_1O_3PE, O_2O_3NM, O_1O_2KF - прямоугольники

Значит, $O_1O_3 = PE = 2R.$

$O_2O_3 = MN = 2R$

$O_1O_2 = KF = 2R.$

Значит, $EP + MN - KF = 2R + 2R - 2R = 12$

$2R = 12$

$\boxed{R = 6.}$

б) Пусть $O_3 = O$

Рассмотрим $\triangle OO_1O_2$. $OO_1 = O_2O_1 = OO_1 = 2R \Rightarrow$

$\triangle OO_1O_2$ - равносторонний $\Rightarrow \angle O_1OO_2 = 60°.$

т.к. O_1O_3PE, O_2O_3NM - прямоугольники, то

$\angle O_1O_3P = \angle O_2O_3N = 90°.$

Значит, $\angle NOP$ в ω_3 : $\angle NOP = 360° - 60° - 90° - 90° =$

$= 120°.$

Сумма углов в пятиугольнике $NOPAB$ равна

$180°(5-2) = 3 \cdot 180° = 540°.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle PAB + \angle NBA = 540° - \angle ONB - \angle OPA - \angle NOP =$

$= 540° - 90° - 90° - 120° = 240°.$

В $\triangle AOB$: $\angle AOB = 180° - \angle OAB - \angle OBA$.

Т.к BA и BN - касательные к ω_3 то $\angle NBO = \angle ABO$

Т.к AP и AR - касательные к ω_3 то $\angle PAO = \angle BAO$.

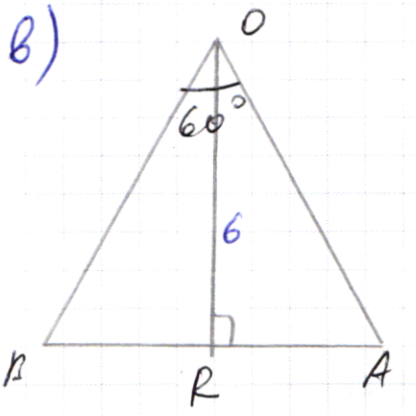
Значит, $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}\angle NBA - \frac{1}{2}\angle PAB =$

$= 180° - \frac{1}{2}(\angle NBA + \angle PAB) = 180° - \frac{1}{2}\cdot 240° =$

$= 180° - 120° = 60°.$

$\boxed{\angle AOB = 60°}$.

в)



В $\triangle AOB$ проведем $OR \perp AB$, $OR = R = 6$.

$S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot OR\cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot OR\cdot AB.$

$AO\cdot OB \sin 60° = R\cdot AB$

$AB = \dfrac{AO\cdot OB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{R} = \dfrac{58\sqrt{3}}{2\cdot 6} = \dfrac{29\sqrt{3}}{6} \cancel{= 4\frac{5}{6}}$

Ответ: а) 6

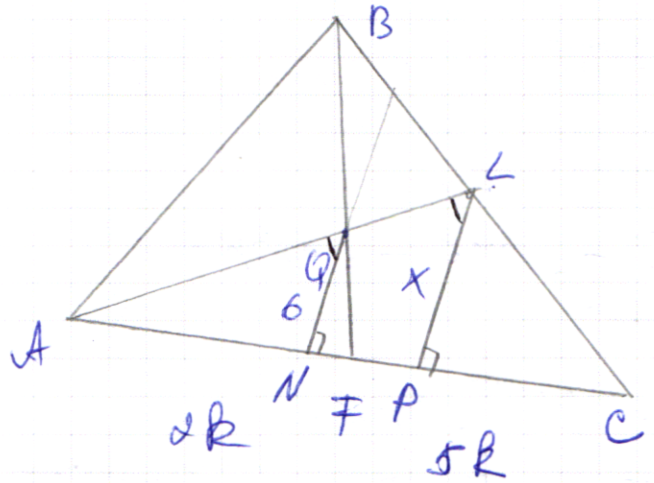
б) 60°

в) $\cancel{4\frac{5}{6}}$ $\frac{29\sqrt{3}}{6}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6



1) т.к $\frac{AF}{FC}=\frac{2}{5}$, то

$AF=2k,\ FC=5k$

2) Проведем $LP\perp AC$, $QN\perp AC$

$QN=6,\ LP=x$

$S_{AQF}=\frac{1}{2}\cdot QN\cdot AF=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2k=$
$=6k$

$S_{ALC}=\frac{1}{2}\cdot LP\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 7k\cdot x=$
$=\frac{7}{2}kx$

Рассмотрим $\triangle ANQ$ и $\triangle APL$ - прямоугольные

$\angle PAL$ - общий. Значит, $\triangle ANQ\sim\triangle APL$ (по острому углу)

Отсюда, $\frac{AN}{AP}=\frac{6}{x}=\frac{AQ}{AL}$; $\frac{AN}{AN+NP}=\frac{6}{x}$

$AN\cdot x=6AN+6NP$

$AN(x-6)=6NP$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2^4 = 16$ $\quad \frac{32}{16}$

$2^5 = 32$

$\cancel{2^{10}} = \cancel{32}\,32$

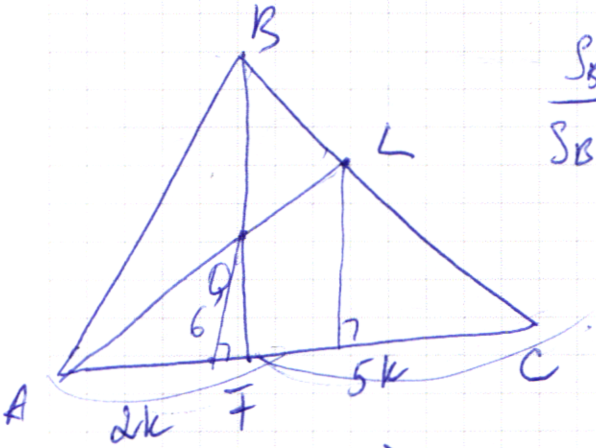
$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}\sqrt{x+7-x}$

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sqrt{x+7}>x \\ \sqrt{x+7} \neq x \\ x \geq -7 \end{cases}$ $\quad \cancel{x<0}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+7>x^2 \end{cases}$

$x^2-x-7<0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 7}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$x+4$ $\quad (\sqrt{x+7}-x)^2 = x+7-2x\sqrt{x+7}+x^2$



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

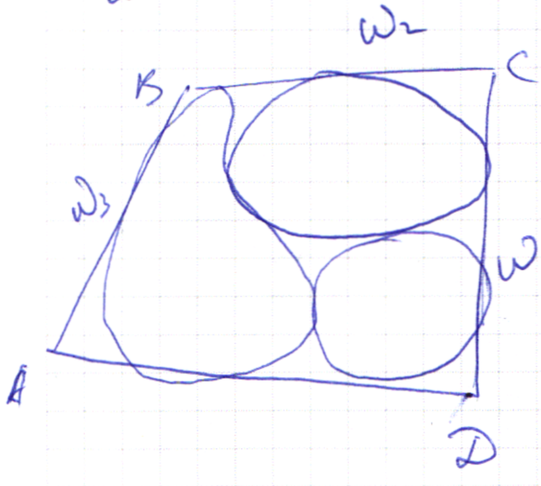
$\log_x 2$

$\log_{0,5}$

32
16
192
32
512
12
1024
512
6144
x+3

$AD+BC = AB+CD+12$

$\cancel{(4x-3x)}$ $\cancel{(4x+3x)}$



$\sin 3x \sin 7x =$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cancel{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}\right)$

$\sin(x+y)\sin(x-y)$

$(\sin\alpha+\sin\beta)^2 = \sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta$

$\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)^2-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{2}$

$\frac{AL}{LQ}\cdot\frac{QB}{BF}\cdot\frac{FC}{CA}$

$(\cos 5x-\sin x)$

$(\cos 5x+\sin x)$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$\sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y$ $\quad \sin^2 x\cos^2 y-\cancel{\sin x\cos x\sin y\cos y}+\cancel{\sin x\cos x\cos y\sin y}-\cos^2 x\sin^2 y$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

0 7 8

17 значное

$\sin^2 5x \cos^2 2x + \cos^2 x\,(1+\cos^2 5x) + 3$

7 ... $\boxed{88\,88}$

$\underbrace{8\,8\,8\,8\,8\,8\,8}_{7}$

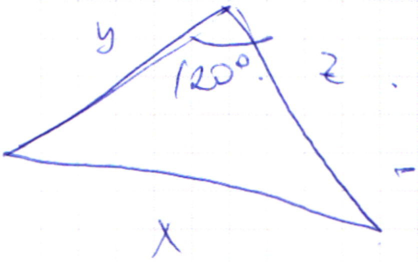
8 2

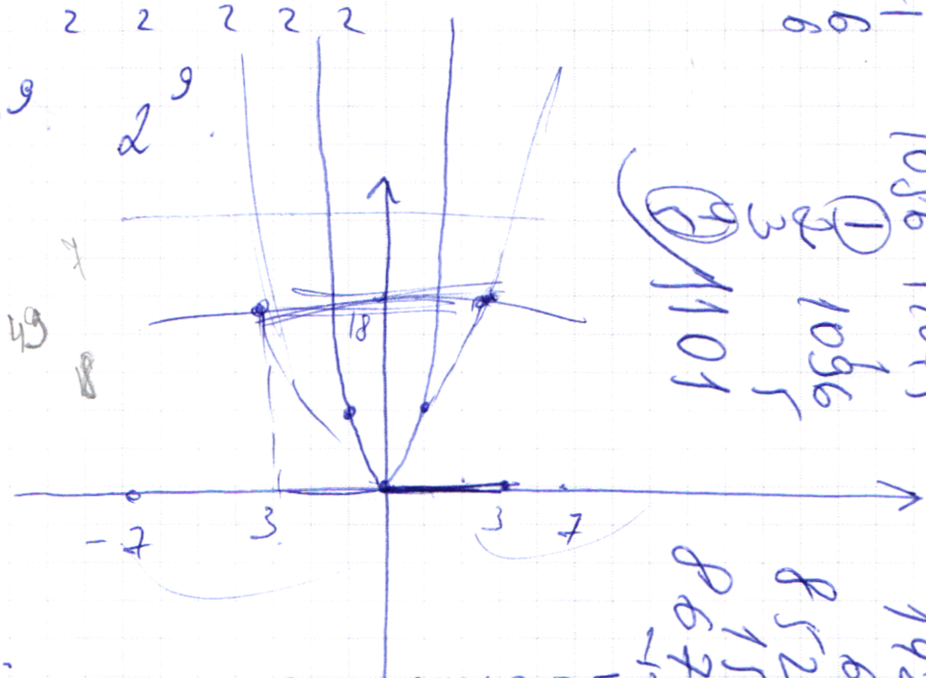
0 0 0 0 0 0 0 0 0

2 2 2 2 2 2 2 2 2

$\boxed{2^{10}}$ $\boxed{2^{9}}$ 2^{9} 2^{9}

77 A ... 77





-7 7

$98 \,|\, 2$

49

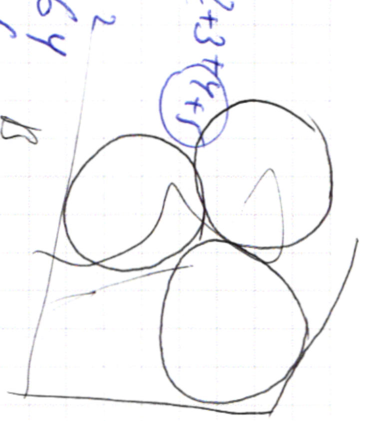
6.

14

$a = 2x^2$

$\cos 120° = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

$x^2 = 36 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14$



$196 + 4 \cdot 160$

$\sqrt{836}$

$2\sqrt{79}$

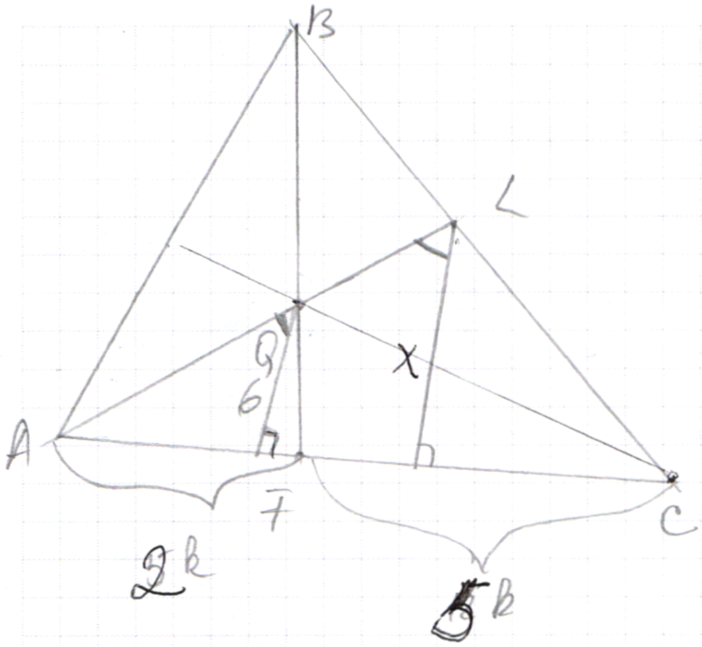
$\cos(180-\alpha)$

$30 + 30 = 120$

196 − 36 = 160

6 76

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$S_{AQ7} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2k = 6k$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 7k = \frac{7}{2} xk$

$\frac{6k}{\frac{7}{2}xk} = \frac{6 \cdot 2}{7x} = \frac{12}{7x} = k^2 = \left(\frac{6}{x}\right)^2 = \frac{36}{x^2}$

$\cancel{\frac{12}{7x} = \frac{36}{x^2}}$

$\frac{AQ}{AL} = \frac{6}{x} \quad \frac{AQ}{AQ+QL} = \frac{6}{x}$

$\sin\alpha \sin\beta$

$\frac{x+y+x-y}{2} \quad x+y-x+y \quad \frac{a}{a+b} = \frac{6}{x} \quad \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}$

$\sin(x+y)\sin(x-y)$

$(\sin x\cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y -$

$(\sin x \cos y)^2 - (\cos x \sin y)^2 \quad (\sin(x-y)\sin(x+y))$

$\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \quad \cancel{2\sin\alpha\sin\beta = \sin}$

$\left(\sin\frac{10x}{2}\cos\frac{-4x}{2}\right)^2 = (\sin 5x \cos(-2x))^2 = \sin^2 5x \cos^2 2x$

$\cos 5x \sin(-2x) = -\cos^2 5x \sin^2 2x$

$\sin^2 5x \cos^2 2x - \cos^2 5x \sin^2 2x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\cancel{\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x}$

$\cancel{\sin(5x-2x)}$

$\sin^2 5x \cos^2 2x - \sin^2 x + \cos^2 5x(1-\sin^2 2x) + 4$

$\sin^2 5x \cos^2 2x - \sin^2 x + \cos^2 x \cos^2 5x + 4,$

$\sin \qquad (1-\cos^2 x)$

$\sin(x+y)\sin(x-y) = (\sin x\cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \cos y)$

$\sin x^2 \cos^2 y - \sin \cancel{x}^2 \cancel{\cos^2 y} + \sin^2 \cancel{x} \cos^2 y + \sin^2 x \cos^2 y$

$(\sin x \cos y + \cos x \sin x y)$
$(\sin x \cos y - \cos x \sin y)$

$\sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x \cos^2 y - (1-\sin^2 x)(1-\cos^2 y) =$

$= \cancel{\sin^2 x \cos^2 y} - 1 + \cos^2 y + \sin^2 x - \cancel{\sin^2 x \cos^2 y}$

$\cancel{\sin^2 x} + \cos^2 y - \cancel{\sin^2 x} - \cos^2 x$

$\cos^2 y - \cos^2 x = \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$ ✓

$\cos^2 2x - \cos^2 5x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

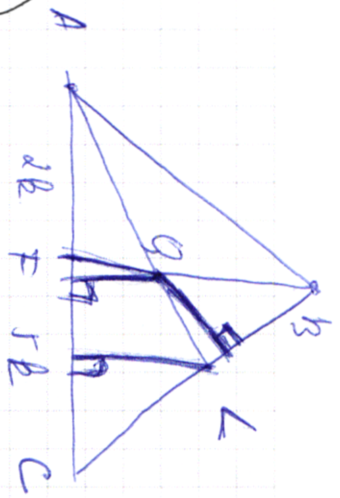
$\cos^2 2x - 1 + \cos^2 x + 4$ $\quad (\cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2})$

$\cos^2 2x + \cos^2 x + 3$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin 30 \cdot \sin 60 = \cos^2 15° - \cos^2 45°$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} =$



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{12}$

$\sin\alpha \sin\beta = \sin(x+y)\sin(x-y) = (\sin x \cos y + \cos x \sin y)$
$(\sin x \cos y - \cos x \sin y)$

$\sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y =$

$= \sin^2 x \cos^2 y - (1-\sin^2 x)(1-\cos^2 y) =$

$= \sin^2 x \cos^2 y - (1 - \cos^2 y - \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 y)$

$= \cancel{\sin^2 x \cos^2 y} - 1 + \cos^2 y + \sin^2 x - \cancel{\sin^2 x}$

$\sin^2 x + \cos^2 y - 1 = \sin^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 y$

$1 + 1$

$AD + BC - AB - CD = 12$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)