

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

11-019

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

но формуле $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\text{Тогда } g(x) = \frac{1}{2} (\cos(3x - 7x) - \cos(3x + 7x)) - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} + 4 =$$

$$= \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} + 4 =$$

$$= \frac{\cos 4x - \cos 10x - 1 + \cos 2x + 1 + \cos 10x}{2} + 4 = \frac{\cos 4x + \cos 2x}{2} + 4$$

$$g(x) = \frac{\cos 4x + \cos 2x}{2} + 4$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) \right)' + 4' = \frac{1}{2} ((\cos 4x)' + (\cos 2x)') =$$

$$= \frac{1}{2} (-4 \sin 4x - 2 \sin 2x) = -(2 \sin 4x + \sin 2x)$$

$$g'(x) = -(2 \sin 4x + \sin 2x)$$

$$g'(x) = 0$$

$$2 \sin 4x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x (4 \cos 2x + 1) = 0$$

$$1) \sin 2x = 0 \quad 2) \cos 2x = -\frac{1}{4}$$

$$1) \max(g(x)) = \frac{\cos 4x + \cos 2x}{2} + 4 = \frac{1 - 2 \sin^2 2x + \cos 2x}{2} + 4 = \frac{1 + \cos 2x}{2} + 4$$

Это когда $\sin 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \pm 1$

$$1.1 \cos 2x = -1 \Rightarrow g(x) = \frac{1 - 1}{2} + 4 = 4$$

$$1.2 \cos 2x = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1 + 1}{2} + 4 = 5$$

$$\textcircled{2} \min(g(x)) = \frac{2\cos^2 2x - 1}{2} + 4 + \frac{\cos 2x}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{16} - 1}{2} + 4 - \frac{1}{8} =$$

$$\text{То когда } \cos 2x = -\frac{1}{4} = \frac{31}{8} - \frac{7}{16} = \frac{62-7}{16} = \frac{55}{16}$$

ответ:

$$\min(g(x)) = \frac{55}{16}$$

$$\max(g(x)) = 5$$

$\sqrt{5}$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sqrt{x+7} > 0 \Rightarrow x > -7 \\ x+4 > 0 \Rightarrow x > -4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-4; +\infty)$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 0 < \sqrt{x+7} - x < 1 \\ \log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \\ x > -4 \end{cases}$$

$$1) 0 < \sqrt{x+7} - x < 1$$

$$1.1) \sqrt{x+7} - x > 0 \\ x^2 - x - 7 < 0$$

$$(x - \frac{1-\sqrt{29}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{29}}{2}) < 0$$

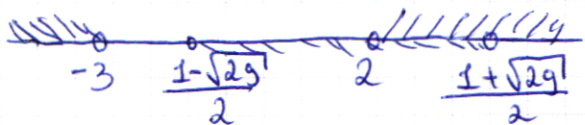
$$x \in (\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$$

$$1.2) x+1 > \sqrt{x+7}$$

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x+3)(x-2) > 0$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$$



$$x \in (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$$

$$\textcircled{2} \log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$$

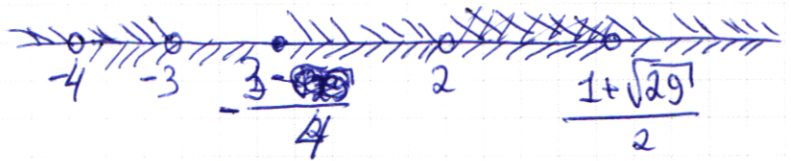
$$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$(x+3)(x+\frac{3}{4}) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$$



$$\text{ответ: } x \in (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 1 \\ \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1 \\ x > -4 \end{cases}$$

$$2.2. \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$(x+4) \geq \sqrt{x+7} - x$$

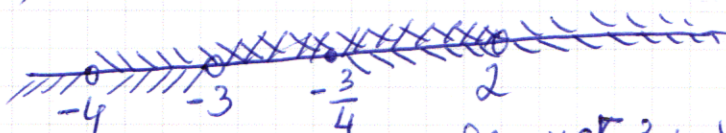
$$2x+4 \geq x+7$$

$$2.1. \begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 1 \\ x^2 + x - 6 < 0 \\ (x+3)(x-2) < 0 \\ x \in (-3; 2) \end{cases}$$

$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

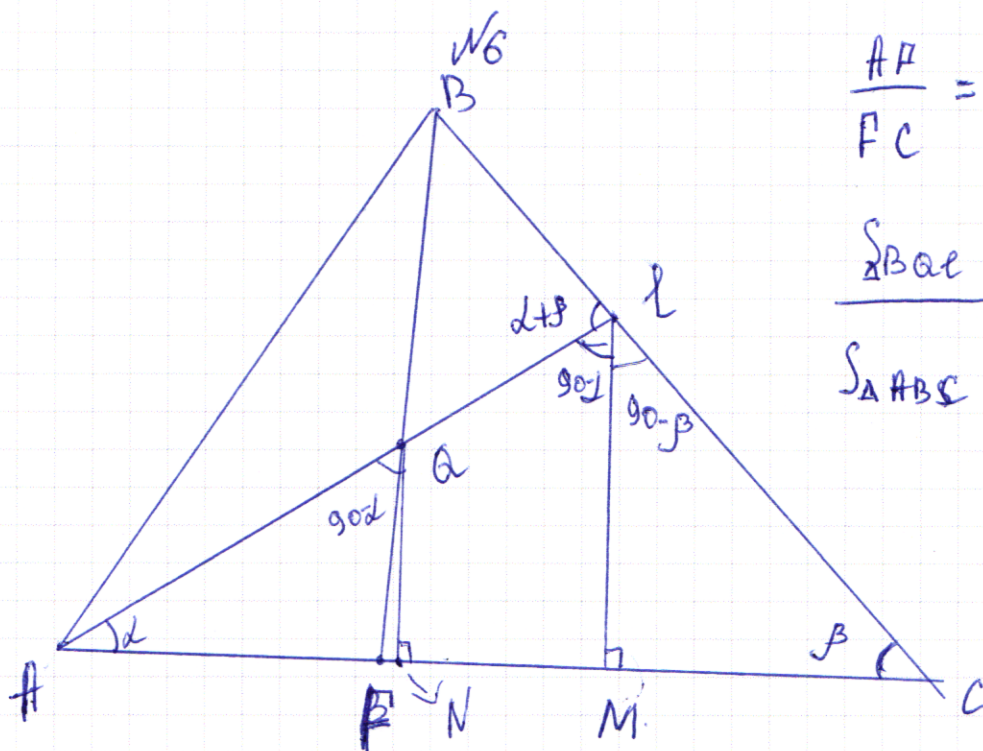
$$(x+3)(x+\frac{3}{4}) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$$



ответ $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

общий ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2) \cup (2; \frac{2+\sqrt{29}}{2})$



$$\frac{AQ}{QC} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{BQC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$$

$$QN = 6$$

$$QM = 7$$

$$\triangle AQN \sim \triangle QLM \Rightarrow \frac{QN}{LM} = \frac{AQ}{QL} \Rightarrow LM = QN \cdot \frac{QL}{AQ} = QN \cdot (1 + \frac{QC}{AQ})$$

$$S_{\triangle BQe} = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cdot BQ \cdot Qe$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot BQ \cdot Ae$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cdot Qe \cdot Ae$$

$$S_{\triangle ABC} = S_1 + S_2 = \frac{Ae}{2} \sin(\alpha + \beta) (BQ + Qe) = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cdot BC \cdot Ae$$

$$\frac{5}{12} = \frac{S_{\triangle BQe}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BQ \cdot Qe}{BC \cdot Ae}$$

$$\frac{BQ}{BC} \cdot \left(1 - \frac{AQ}{Ae}\right) = \frac{5}{12} \Rightarrow 1 - \frac{AQ}{Ae} = \frac{5 \cdot BC}{12 \cdot BQ}$$

$$\frac{AQ}{Ae} = 1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{BC}{BQ}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$\begin{aligned} \sin 3x \cdot \sin 7x &= \frac{1}{2} (\cos(3x-7x) - \cos(3x+7x)) = \\ &= \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 10x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} + 4 = \\ &= \frac{\cos 4x + \cos 2x}{2} + 4 \cdot \frac{\cos 10x - \cos 10x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{\cos 4x + \cos 2x}{2} + 4$$

$$\frac{1-8}{16} = -\frac{7}{16}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + 4 \right)' = \\ &= 1 \left(\frac{\cos 4x}{2} \right)' + \left(\frac{\cos 2x}{2} \right)' + 4' = -2 \sin 4x - \sin 2x \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\cos 2x = \pm 1$$

$$2 \sin^2 2x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x (4 \cos 2x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$2x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi k}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{4}$$

$$2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) +$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$1 - 2 \sin^2 2x + \cos 2x$$

$$\frac{2 \cos^2 2x - 1 + \cos 2x}{2} + 4 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 + 4$$

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} - 1 + 4$$

$$4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\textcircled{4}$$

$$\textcircled{5}$$

$$4 - \frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{16} = \frac{55}{16}$$

$$\log \sqrt{x+7} - x (x+4) \geq 1$$

$$\text{D3: } x+7 \geq 0 \quad \cancel{x \geq -7}$$

$$\cancel{x+7 > 0} \quad x > -4$$

$$x+4 > 0$$

$$-7 \quad -4$$

$$\text{D3: } x \in (-4; +\infty)$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 0 < \sqrt{x+7} - x < 1 \\ \log \sqrt{x+7} - x (x+4) \geq 1 \end{cases}$$

$$1) \quad x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

$$4x^2 + 16x + 16 \geq x+7$$

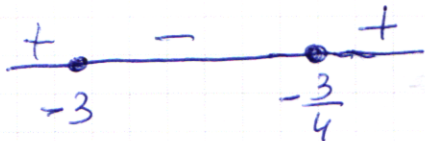
$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$D = 225 - 144 = 81$$

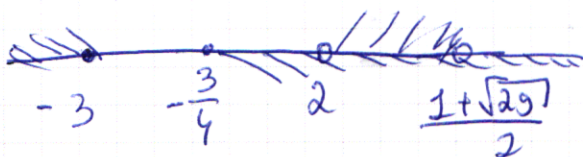
$$x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = -3$$

$$(x+3)(x+\frac{3}{4}) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$$



$$x \in (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$$

$$2) \quad \sqrt{x+7} - x > 0$$

$$x+7 > x^2$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 1 + 28 = 29$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$$

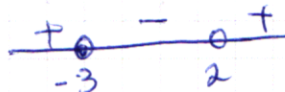
$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right)$$

$$x+1 > \sqrt{x+7}$$

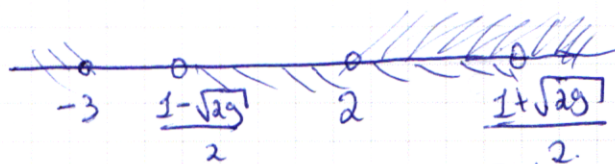
$$x^2 + 2x + 1 > x+7$$

$$x^2 + x - 6 > 0$$

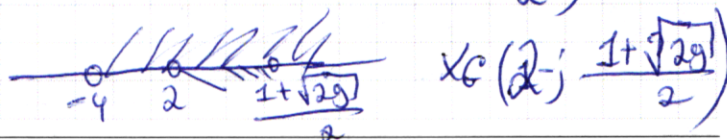
$$(x+3)(x-2) > 0$$



$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$$



$$x \in (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$$



$$x \in (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$$

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\frac{AC}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \pi} = \frac{AC}{0}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 1 \\ \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1 \\ x > -4 \end{cases}$$

1) $\sqrt{x+7} > 1+x$

$$x+7 > 1+2x+x^2$$

$$x^2+x-6 < 0$$

$$(x+3)(x-2) < 0$$



$$x \in (-3; 2)$$

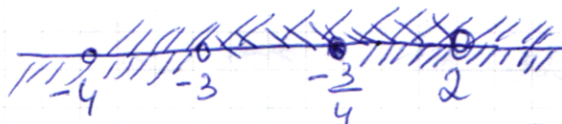
$$\textcircled{2} \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$2x+4 \geq \sqrt{7+x}$$

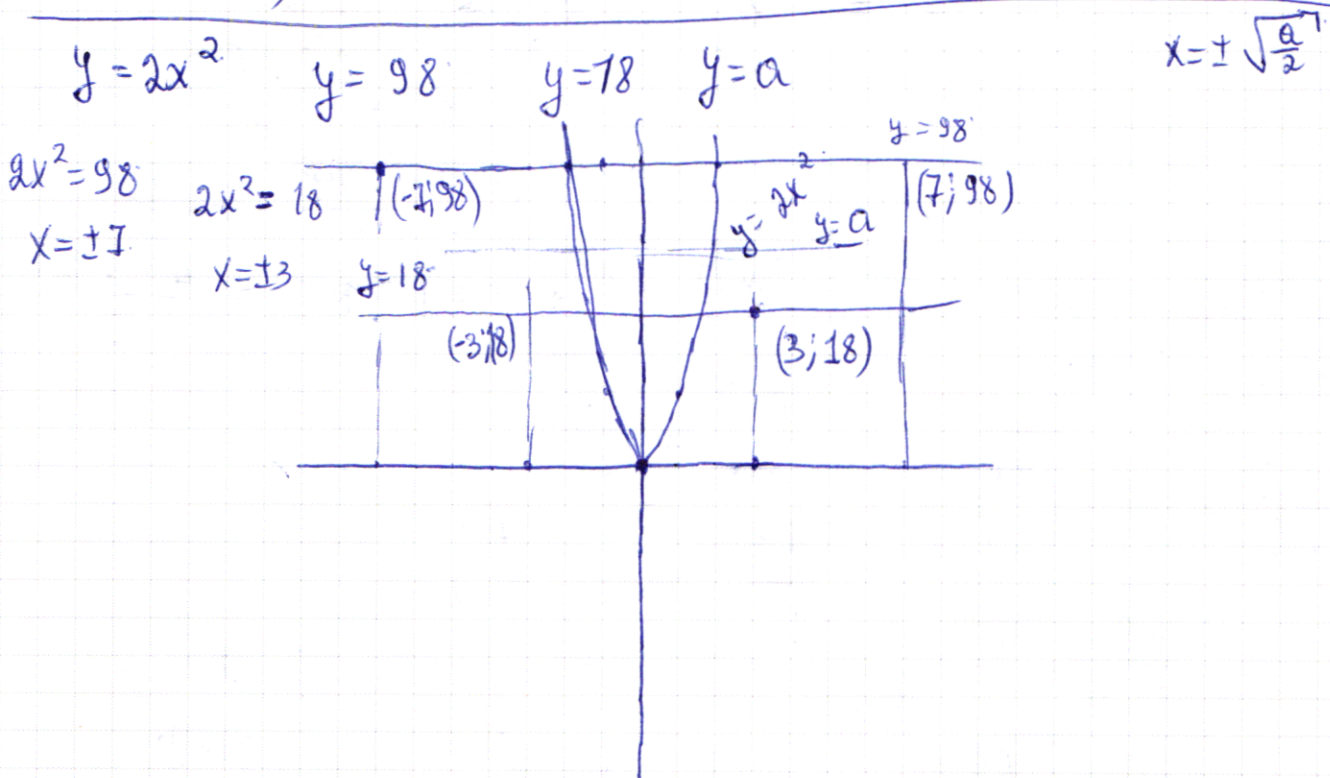
$$4x^2+15x+9 \geq 0$$

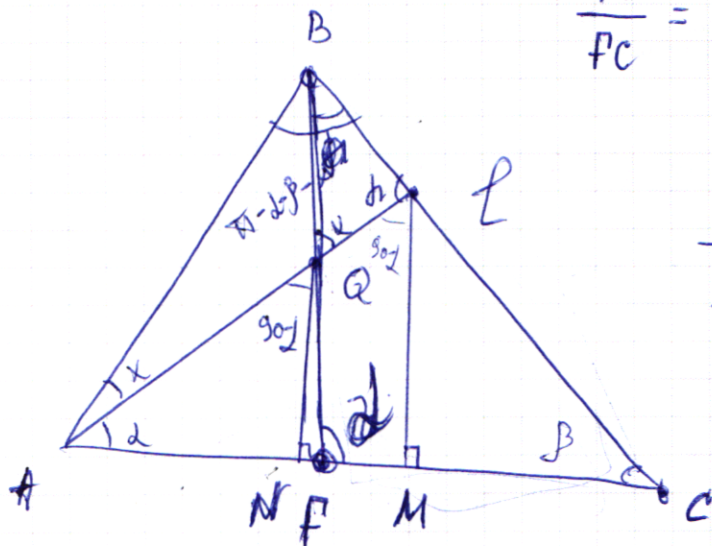
$$(x+3)\left(x+\frac{3}{4}\right) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$$

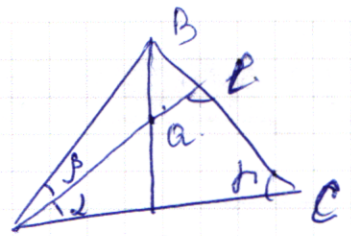


$$x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$





$$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$$



$$\frac{S_{\triangle BQl}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{12}$$

$$QN = 6$$

$$LM = ?$$

$$\frac{Be}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{lc}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

$$\frac{QN}{LM} = \frac{AQ}{AL}$$

$$LM = QN \cdot \frac{AL}{AQ} = QN \cdot \left(1 + \frac{QA}{AQ}\right)$$

$$\frac{QA}{AQ} = ?$$

$$\text{scribble} = ?$$

$$S_{\triangle BQl} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot Bl \cdot la$$

нужно

$$AF = x$$

$$\frac{x}{FC} = \frac{2}{5}$$

$$FC = \frac{5}{2}x$$



$$S_1 = \frac{Al \cdot lc}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$S_2 = \frac{Bl \cdot Al}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sin \alpha}{2} (Al \cdot lc + Al \cdot Bl) = \frac{Al \cdot Bc}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{Bl \cdot la}{Al \cdot Bc} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{la}{Al} = \frac{5}{12} \cdot \frac{Bc}{Bl}$$

$$\frac{Bl}{\sin \alpha} = \frac{Al}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{lc}{\sin \alpha} = \frac{Ac}{\sin \alpha}$$

$$\frac{Bl}{\sin \beta} = \frac{Al}{\sin(\alpha + \beta + \theta)}$$

$$\frac{lc}{\sin \alpha} = \frac{Ac}{\sin \alpha}$$

$$\frac{lc}{Bl} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha + \beta + \theta)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{lc}{Bl} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta + \theta)}{\sin \beta \cdot \sin \alpha}$$

$$\frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \alpha}$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \gamma}$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \gamma}$$

$$\frac{BC}{BE} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AC}{AB}$$

~~$$\frac{1}{2} \sin x \cdot BA \cdot AE = S_{BAE}$$~~

~~$$\frac{1}{2} \sin x \cdot BA \cdot HA = S_1$$~~

~~$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot HA \cdot BC$$~~

$$S_{BAE} = \frac{BE \cdot AE}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$S_1 = \frac{HA \cdot BE}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$S_2 = \frac{HA \cdot BC}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$S_{ABC} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2} HA \cdot BC$$

$$S_{BAE} \cdot \frac{5}{12} = \frac{BE}{BC} \cdot \frac{AE}{HA}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)