МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 9-11

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-11

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(x)=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x-4$

$2\cos^2 x=1+\cos 2x$

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$

Общий период: πm, $m\in\mathbb{Z}$

$\cos 0=1$

$\cos\pi=0$

$\frac{1}{2}\cos 4x=\cos^2 2x-\frac{1}{2}$

max: 1) $\frac{1}{2}\cos 0-\frac{1}{2}\cos 0-4=-4$

1) при $x=0+\pi m$

2) $\frac{1}{2}\cos 2\pi-\frac{1}{2}\cos\pi-4=-3,5$

2) при $x=\frac{\pi}{2}+\pi m$

min: 1) при $x=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi m$

1) $-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-4=-\frac{73}{16}$

$-\frac{8}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}$ $\quad -\frac{64}{16}=-\frac{73}{16}$

2) при $x=-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi m$

2) $-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-4=-\frac{73}{16}$

Ответ:

$\max(g(x))=-3,5$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in\mathbb{Z}$

$\min(g(x))=-\frac{73}{16}$ при $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

№3

5×6, (0 и 9) $\times 12$ ....

1 местом 18-значного числа будем считать место первой ~~...~~ цифры в записи числа

на 17 месте — цифра десятков

на 18 — месте — цифра единиц

Вариантов расположения шести "5" подряд ровно 13. (ряд из ~~подряд~~ идущих "5" может начинаться на 1, 2 ... 13 месте (На 13 месте начало — на 18 — конец)

для цифр "0" и "9" остаётся 12 мест.

если 1 место свободно (там нет "5"; 12 случаев), то

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

туда ставится "9" (число не может начинаться с "0"). Остаётся 11 мест, куда в любом порядке ставятся "0" и "9". 2^{11} вариантов. Исключим вариант из 11 "9" (по условию все цифры встречаются, "9" уже стоит на 1 месте). $2^{11}-1$ вариантов.

Если на 1 месте "5" (1 вариант) то нас оставшиеся 12 мест вариантов расположения $2^{12}-2$ (исключая случаи с 12×"9" и 12×"0")

Итого чисел: $1\cdot(2^{12}-2)+12\cdot(2^{11}-1)=2^{12}+6\cdot 2^{12}-3=$

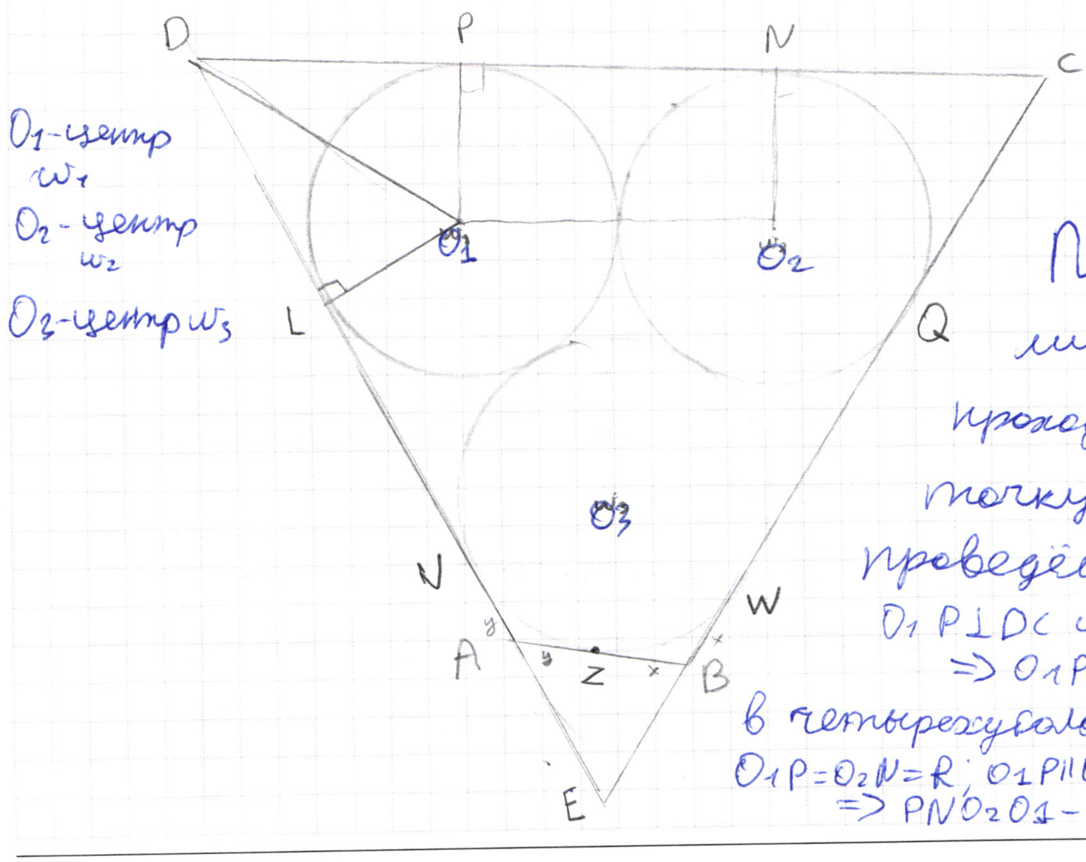
$=7\cdot 2^{12}-3=28672-3=28669$

$2^{10}=1024$
$2^{11}=2048$
$2^{12}=4096$

$$\begin{array}{r} 4096 \\ \times\ \ \ \ 7 \\ \hline 28672 \end{array}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 28669}$

№4



По теореме линия центров проходит через точку касания.

проведём O_1O_2, $O_1P \perp DC$ и $O_2N \perp DC$
$\Rightarrow O_1P \parallel O_2N$

в четырехугольнике PNO_2O_1
$O_1P=O_2N=R$; $O_1P \parallel O_2N$, $\angle O_1PN=90°$
$\Rightarrow PNO_2O_1$ – прямоугольник.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow O_1O_2 \parallel PN \Rightarrow O_1O_2 \parallel DC$.
Аналогично $O_1O_3 \parallel DA$; $O_2O_3 \parallel BC$.
продлим AD и BC до их пересечения
(они не параллельны, т.к. по транзитивности
$O_1O_3 \parallel O_2O_3$, которые имеют общую
точку)
$\angle O_3O_1O_2 = \angle(O_3O_1; DC) = \angle ADC$ (свойство секущей, O_3O_1 - секущая, $O_1O_2 \parallel DC$)
Аналогично $\angle O_1O_2O_3 = \angle DCE$
$\angle O_1O_3O_2 = \angle DEC$
$\Rightarrow \triangle O_1O_2O_3$ подобен $\triangle DCE$. $O_1O_2 = 2R$,
$\triangle O_1O_2O_3$ - равносторонний
$\Rightarrow \triangle DCE$ - равносторонний.
По свойству отрезков касательных:
$AV = AZ = y$ (обозначим) $x = ZB = BW$.
$AZ + ZB = AB = x + y$
$CW = CP$; CO_2 и DO_1 - биссектрисы
углов $= 60°$. $\triangle DO_1P = \triangle CO_2N$ по катету
и углу ($O_1P = O_2N$); ($\angle 30°$). $\Rightarrow \overset{DL}{DP} = \overset{CQ}{NC} \Rightarrow$
$\Rightarrow DN = PC$ (PN - общая; $PN = 2R = O_1O_2$)
Аналогично $LV = 2R = QW = PN$; $CW = DV$
$AD = DV + y$; $BC = CW + x = DV + x$
по усл: $AD + BC - AB - CD = 10 \Rightarrow 2DV + x + y - (x+y) - CD = 10$
$2DV - CD = 10$

$$\overset{PN=2R}{} \qquad \overset{DP=NC=CQ}{}$$

$$2DL+2\overset{\shortparallel}{LV}-2\overset{\shortparallel}{DL}-PN=10$$

$$2R=10$$

Ответ $\boxed{а)\ R=5}$

по свойству окружности, касающейся сторон угла BO_3 и AO_3 — биссектрисы $\angle DAB$ и $\angle ABC$

$\angle DAB+\angle ABC+\underset{60^\circ}{\angle ADC}+\underset{60^\circ}{\angle BCD}=$
$=360^\circ$

(равносторонний $\triangle DEC$)

$$\angle AO_3B=180-\frac{\angle DAB}{2}-\frac{\angle CBA}{2}$$

$$\underline{\angle DAB+\angle ABC=240^\circ}$$

$$\angle AO_3B=180-\frac{\angle DAB+\angle CBA}{2}$$

$$\angle AO_3B=180-\frac{240}{2}$$

$$\angle AO_3B=60^\circ$$

Ответ б) $\angle AO_3B=60^\circ$

$\cancel{\#}$

условие: $\underline{AO\cdot BO=42}$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\sin\angle AOB\cdot AO\cdot OB$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}h\cdot AB$$

$h=R$, т.к. AB — касается окружности.

$$R\cdot AB=\sin 60^\circ\cdot 42$$

$$AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{42}{5}$$

Ответ в) $AB=\sqrt{3}\cdot 4{,}2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1 = \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3}-x>1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3}-x<1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-1 \\ x+3>x^2+2x+1 \\ 2x+5 \geq \sqrt{x+3} \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x+3<x^2+2x+1 \\ 2x+5 \geq \sqrt{x+3} \end{cases} \\ \begin{cases} x>-1 \\ x+3<x^2+2x+1 \\ 2x+5 \leq \sqrt{x+3} \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x+3>x^2+2x+1 \\ 2x+5 \leq \sqrt{x+3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} x>-1 \\ x^2+x-2<0 \\ 4x^2+20x+25 \geq x+3 \end{cases} \\ 2)\begin{cases} x<-1 \\ x>-2,5 \\ x^2+x-2>0 \\ 4x^2+20x+25 \geq x+3 \end{cases} \\ 3)\begin{cases} x>-1 \\ x^2+x-2>0 \\ 4x^2+20x+25 \leq x+3 \end{cases} \\ 4)\begin{cases} x<-1 \\ x^2+x-2<0 \\ \left[\begin{array}{l} x<-2,5 \\ 4x^2+20x+25 \leq x+3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases}$$

$x+3=x^2+2x+1$

$x^2+x-2=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$ посторонний корень

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x+3>x^2 \end{array}\right. \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$x^2-x-3<0$

$D=1+12=13$

$x_{1,2}=\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x<\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$4x^2+20x+25=x+3$

$4x^2+19x+22=0$

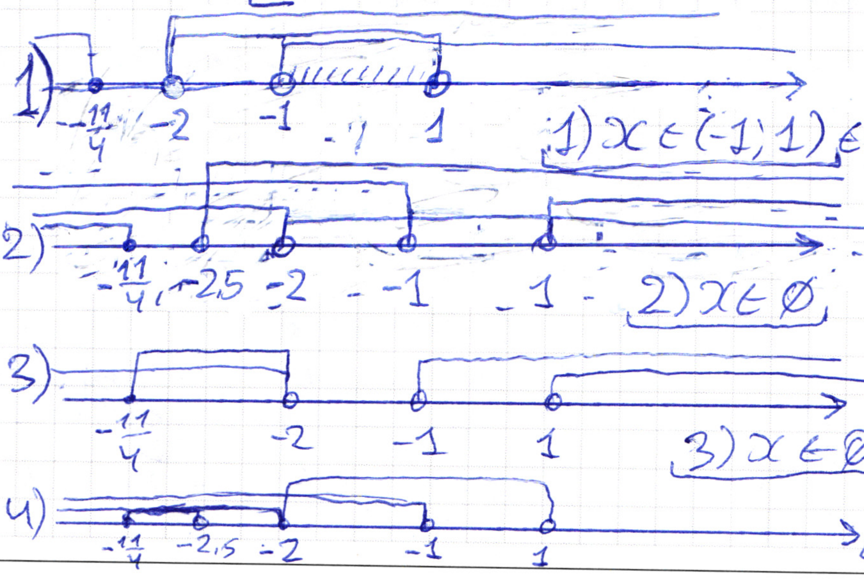
$D=361-352=9$

$x_{1,2}=\frac{-19 \pm 3}{8}$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{11}{4} \end{array}\right.$

$x^2+x-2 \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$



1) $x \in (-1;1) \in$ ОДЗ

2) $x \in \varnothing$

3) $x \in \varnothing$

4) $x \in \varnothing$

Ответ: $x \in (-1;1)$

№7

(1) [1;35]; (2) [36;70]; (3) [71;105], (4) [106;140], (5) [141;175]

Заметим, что в каждом промежутке 35 целых чисел, промежутки (1), (2), (3), (4), (5) составляют натуральный ряд от 1 до 175. Поделим каждый промежуток на 35 мест, первое (1) место у первого числа, последнее (35) — у последнего. Тогда числа, стоящие на местах одного номера отличаются на $35m$ (т.к. числа на 1 месте: 1, 36, 71, 106, 141; на 2: 2, 37, 72, 107, 142; на n: $n, n+35, n+35\cdot2, n+35\cdot3, n+35\cdot4, n+35\cdot5$) Тогда если Буратино возьмет из промежутков числа, (хотя бы 2) стоящие на местах одного номера, их разность будет делится на 35.

$\Rightarrow$ Он не должен брать числа, стоящие на одноименных местах.)

На 1 место числа вида $35m+1$, где m — номер груп (промежутка)

на 2 месте: $35m+2$

⋮

на 25 месте: $35m+25$

Выбираем 25 чисел по 5 из интервала, по 1 с каждого места.

$35m+1+35m+2 \ldots +35m+25 = 35(\underset{5}{5\cdot1}+\underset{10}{5\cdot2}+\underset{15}{5\cdot3}+\underset{20}{5\cdot4}+\underset{35}{5\cdot5}) + \frac{26\cdot25}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-11

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\sqrt{x+3}-x\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+3}} - 1$$

>0 при $x < -2{,}75$

$x > -3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

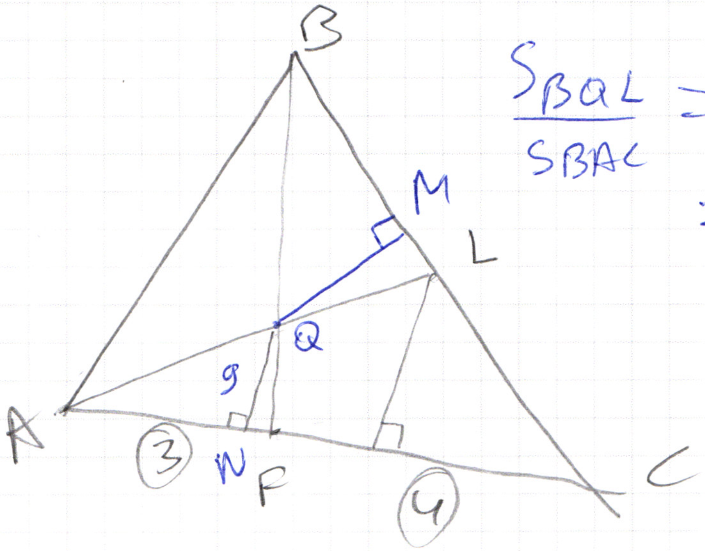
$35 \cdot 75 + 13 \cdot 25 = 2625 + 325 =$

$= 2950$

$$\begin{array}{r} \times\ 13 \\ 25 \\ \hline 65 \\ +\ 26\ \ \\ \hline 325 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 35 \\ 75 \\ \hline 175 \\ +\ 245\ \ \\ \hline 2625 \end{array}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 2950}$

№ 6



$\dfrac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow$ высоты относятся как $\sqrt{\dfrac{S_{BQL}}{S_{BAC}}}$ к

$\dfrac{QN}{QM} = \sqrt{\dfrac{S_{AQF}}{S_{BQL}}}$

$S_{ALC} = 7x \cdot R$ $\qquad S_{\cdot C}$ $\qquad \dfrac{QM}{h_{ABC}} = \dfrac{1}{4}$

$S_{AQF} = 9 \cdot 3x$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

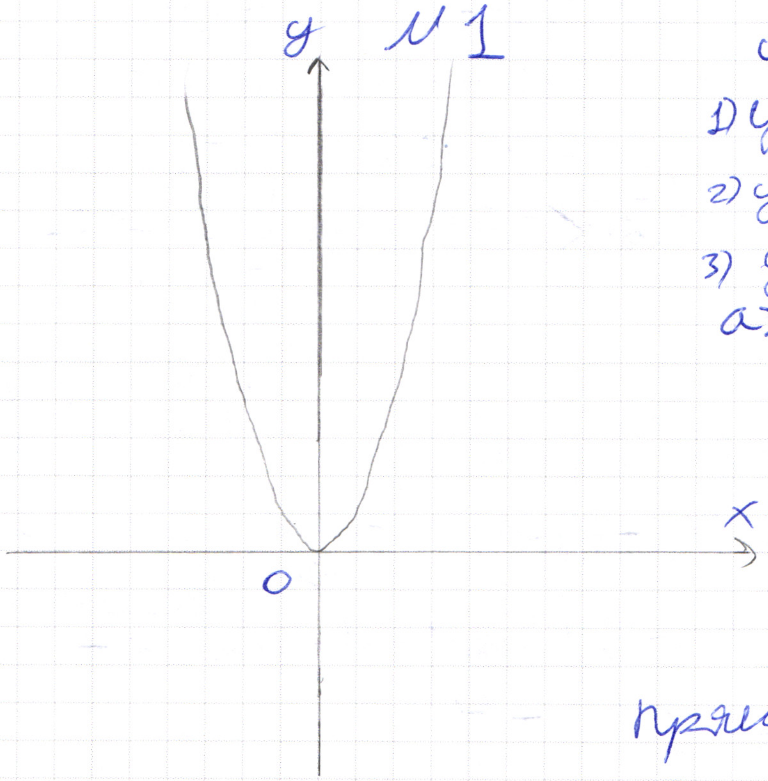
9-11

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



$y=x^2$

1) $y=169$

2) $y=64$

3) $y=a$

$a>0$, т.к $y>0$ для пересечения с параболой

точка пересечения прямых с параболой:

1) $x^2=169$ $x=\pm13$

2) $x^2=64$ $x=\pm8$

3) $x^2=a$ $x=\pm\sqrt{a}$

Прямые паралельны Ox, длина отрезков равна

1) $|-13|+|13|=26$

2) $|-8|+|8|=16$

3) $|-\sqrt{a}|+|\sqrt{a}|=2\sqrt{a}$

Треугольник со сторонами: $26; 16; 2\sqrt{a}$

тупой угол лежит напротив наибольшей стороны треугольника.

$\Rightarrow$ 1) тупой угол напротив 26, при $2\sqrt{a}<26$

2) или напротив $2\sqrt{a}$ при $2\sqrt{a}>26$

По теореме косинусов: $\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$

1) $26^2=4a+16^2-2\cos120\cdot2\sqrt{a}\cdot16$ $2\sqrt{a}<26$

2) $(2\sqrt{a})^2=26^2+16^2-2\cos120\cdot26\cdot16$ $2\sqrt{a}>26$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

1) $26^2-16^2=2\sqrt{a}\cdot 16+4a\ |:4$ $2\sqrt{a}<26$

2) $4a=26^2+16^2+26\cdot 16\ |:4$ $2\sqrt{a}>26$

обозн. $\sqrt{a}=t$

1) $13^2-8^2=8\sqrt{a}+a$ 1) $t^2+8t-105=0$ $\frac{D}{4}=16+105=121$

$t_{1,2}=-4\pm 11$

2) $a=13^2+8^2+26\cdot 4$ 2) $a=337$

$\left[\begin{array}{l} t=7 \\ t=-15 \end{array}\right.$

$169+64=233$ $233+104=337$ $15\times 15=225$

проверка

1) $2\sqrt{a}=14<26$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{a}=7 \\ \sqrt{a}=-15 \text{ — невозможно} \end{array}\right.$

2) $2\sqrt{a}<2\sqrt{225}=30>26$

$\boxed{\text{Ответ } \begin{array}{l} 1)\ a=49 \\ 2)\ a=337 \end{array}}$

№ 2

$g(x)=\sin 5x\cdot\sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3$

$\cos x$ — чётная
$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$
$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$
$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

$g(x)=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 14x)-\frac{1}{2}(1-\cos 14x)-\frac{1}{2}(1+\cos 2x)-3$

$g(x)=\frac{1}{2}\cos 4x-\cancel{\frac{1}{2}\cos 14x}-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{2}\cos 14x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x-3$

$g(x)=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x-4$

$g'(x)=-2\sin 4x+\sin 2x$ Точки перемены знака $g'(x)=0$

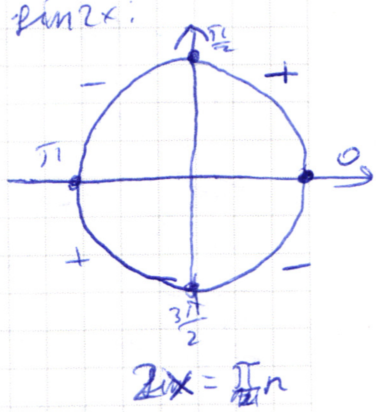
$g'(x)=-4\sin 2x\cos 2x+\sin 2x$

$-4\sin 2x\cos 2x+\sin 2x=0$

$\sin 2x(-4\cos 2x+1)=0$

$-4\sin 2x\left(\cos 2x-\frac{1}{4}\right)=0$

$\sin 2x$:



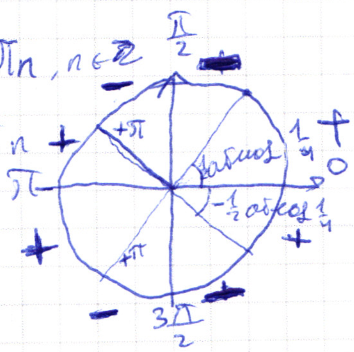
$2x=\pi n$

$x=\frac{\pi}{2}n$

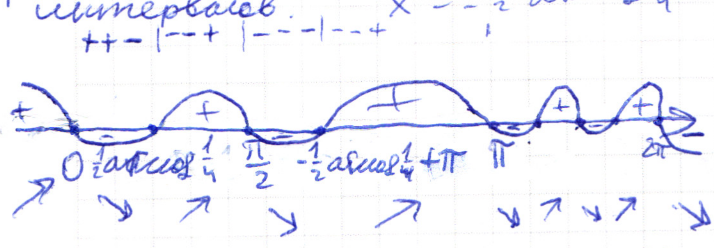
$\cos 2x=\frac{1}{4}$

$2x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n$



методом интервалов:



точки локальных максимумов: $0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi\ \ldots$

точки локальных минимумов: $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4};\ -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi;\ \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi;\ -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\ \ldots$

☐ черновик ☑ чистовик   Страница №2
(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

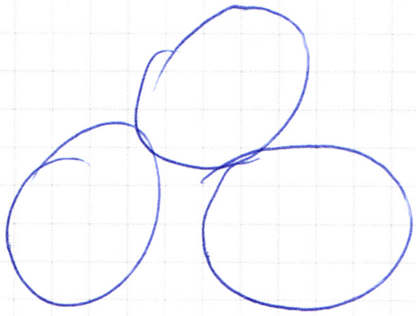
9-11

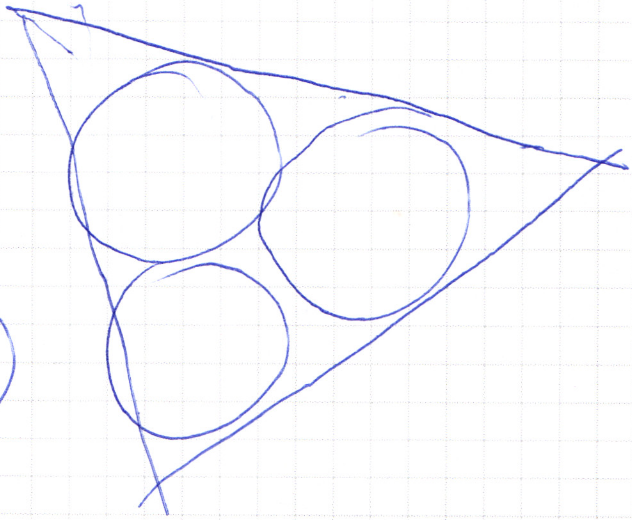
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2





0 35 70 105

140

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)