

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

13-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{1}$

$$y = 2x^2$$

Т.к. $y = 2x^2$ и $y = 98, y = 18, y = a$ пересекаются, то

$$2x^2 = 98$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm 7$$

$$2x^2 = 18$$

$$x = \pm 3$$

$$\text{вотр} = 6.$$

$$2x^2 = a.$$

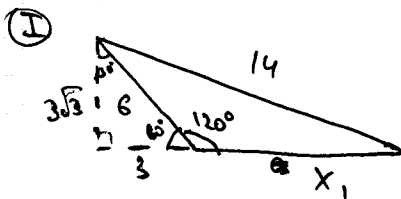
$$x = \pm \sqrt{2a}$$

$$\text{вотр} = x_1$$

(*)

Длина отрезка равна 14.

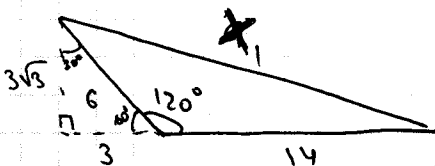
Рассмотрим 2 случая.



Находим, что

$$x_1 = \sqrt{196 - 27} - 3 = \sqrt{169} - 3 = 10 \text{ (т.к. сторона всегда } > 0.)$$

Ⓜ



Находим, что

$$x_1 = \sqrt{17^2 + 27} = \sqrt{289 + 27} = \sqrt{316} = 4\sqrt{79}$$

Подставим в (*). Получим, что $\sqrt{2a} = 5, 2a = 25, a = \frac{25}{2}$.

$$\text{2) } \sqrt{2a} = 4\sqrt{79}, 2a = 16 \cdot 79, a = 8 \cdot 79 = 632.$$

√3

Количество вариантов расположения восьмерки в 17-ти значном числе = 11

Вариантов расположения одинаковых чисел = 11 · 2.
(всех)

Вариантов расположения различных чисел = ~~2 · 11 · 128 · 11~~
126 · 11 = 1260 + 126 = 1386

Ответ: количество 17-ти значных чисел равно 1386

√5

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\frac{(x+4 - \sqrt{x+7} + x)}{(\sqrt{x+7} - x - 1)} \geq 0$$

$$\frac{(\sqrt{x+7} - 4)}{(\sqrt{x+7} - x - 1)} \leq 0$$

$$(*) \begin{cases} x+4 > 0 \\ \sqrt{x+7} - x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - 4 \geq 0 \\ \sqrt{x+7} - x - 1 < 0 \\ \sqrt{x+7} - 4 \leq 0 \\ \sqrt{x+7} - x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 9 \\ x \in (2; \infty) \\ x \leq 9 \\ \begin{cases} x \in [-7; -1) \\ x \in [-1; 2) \end{cases} \end{cases}$$

~~$x \geq 9$~~
 ~~$x \in [-7; -1) \cup [-1; 2)$~~
 ~~$x \in \emptyset$~~
 ~~$x \in [9; \infty)$~~
 $x \leq 9$

$$\begin{cases} x \in [9; \infty) \\ x \in [-7; 2) \end{cases}$$

~~$x \in [-4; 0) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; \infty)$~~

~~$x \in [-4; 0) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; \infty)$~~

$$x \in [-7; 2) \cup [9; \infty)$$

~~Ответ: $x \in [-4; 0) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; \infty)$~~

$$(*) \begin{cases} x > -4 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -7 \end{cases} \\ x > 0 \\ x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; \infty) \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} x > -4 \\ \begin{cases} x \in [-7; \infty) \\ x \in (\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \end{cases} \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} x \in [-4; 0) \\ x \in (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; \infty) \end{cases}$$

$$\frac{1+\sqrt{29}}{2} \sqrt{9} < \sqrt{29} \sqrt{17}$$

Условие (*)

$$x \in [-4; 0) \cup [9; \infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{7}$.

Итак как по условию нужно найти наименьшее значение, то первые числа это „18“, „19“, „20“, „21“, „22“, „23“, „24“, „25“, „26“. Так как они наименьшие из своего промежутка.

Нам во ~~втором~~ ^{следующих} промежутках мы исключаем числа вида $x+45$, где x - любое число из предыдущего промежутка, не берем наименьшие числа.

Тогда числа из второго промежутка будут ~~„27“, „28“, „29“, „30“, „31“, „32“, „33“, „34“, „35“, „36“, „37“, „38“, „39“, „40“, „41“, „42“, „43“, „44“, „45“, „46“, „47“, „48“, „49“, „50“, „51“, „52“, „53“, „54“, „55“, „56“, „57“.~~

Аналогично находим числа из последующих промежутков.

Их сумма будет равна:

$$\begin{aligned}
 & \cancel{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45+46+47+48+49+50+51+52+53+54+55+56+57+58+59+60+61+62+63+64+65+66+67+68+69+70+71+72+73+74+75+76+77+78+79+80+81+82+83+84+85+86+87+88+89+90+91+92+93+94+95+96+97+98+99+100+101+102+103+104+105+106+107+108+109+110+111+112+113+114+115+116+117+118+119+120+121+122+123+124+125+126+127+128+129+130+131+132+133+134+135+136+137+138+139+140+141+142+143+144+145+146+147+148+149+150+151+152+153+154+155+156+157+158+159+160+161+162+163+164+165+166+167+168+169+170+171+172+173+174+175+176+177+178+179+180+181+182+183+184+185+186+187+188+189+190+191+192+193+194+195+196+197+198+199+200} \\
 & 1+2+3+4+5+6+52+53+54+55+56+57+103+104+105+106 \\
 & +107+108+154+155+156+157+158+159+205+206+207+208+209+210 \\
 & = \cancel{21} \cdot 211 \cdot 15 = 3165
 \end{aligned}$$

$$211 \cdot 10 + 211 \cdot 5 = 2110 + 1055 = 3165$$

Ответ: 3165

$\sqrt{2}$

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$$

$$g(x) = (\sin 5x \cos 2x)^2 - (\cos 5x \sin 2x)^2 + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3.$$

$$~~g(x) = \sin^2 5x \cdot \cos^2 2x - \cos^2 5x \cdot \sin^2 2x + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3.~~$$

$$~~g(x) = \cos^2 5x \cdot (1 - \sin^2 2x) + \sin^2 5x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x + 3~~$$

$$g(x) = \cos^2 5x \cdot \cos^2 2x + \sin^2 5x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x + 3.$$

$$g(x) = \cos^2 2x + \cos^2 x + 3.$$

$$g(x) = (\cos x \sin x - \sin x \cos x)^2 + \cos^2 x + 3.$$

$$g(x) = \cos^2 x + 3.$$

$$\text{Ответ: } g(x)_{\max} = \underline{\underline{4}}, \quad g(x)_{\min} = 3.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 = 32
 4 = 4
 6 = 64
 7 = 128
 41 = 1234 = 24

11 · 9 · 2 = $\frac{11}{18} \cdot \frac{88}{198}$

11 · 18

4 · 79 = 196 - 27 = (a+3)²

169 = (a+3)²

(10+1) · (18) → $\boxed{18}$

$\boxed{a=10}$

cos 5x ~~(cos 2x)~~

g(x) = sin 3x · sin x - sin²x + cos² 5x + 4

cos(α+β) =

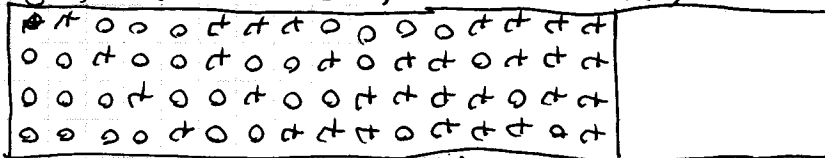
$\boxed{198}$

cos α sin β - sin α cos β

198 - 22 = $\boxed{176}$

g(x) = (sin 5x cos 2x)² - (cos 5x sin 2x)² + cos² x + cos 5x + 3

$\frac{316}{28} \cdot \frac{14}{36} = \boxed{179}$



$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 170 \\ \hline 289 \end{array}$

S_{BOE} : S_{BAE} = $\frac{5}{12}$

102

(cos x sin x - sin x cos x)²

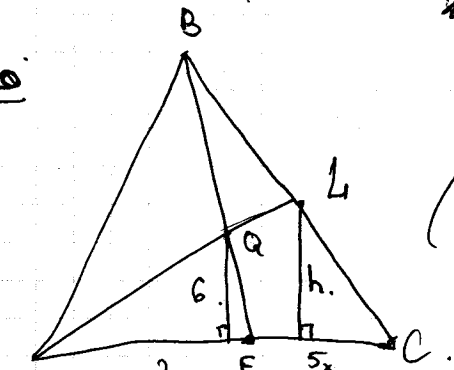
17 - 1
34 - 2
68 - 4

11 · 9 = 109

[2√33; 2√79]

$\frac{289}{17} \cdot \frac{17}{12} = \frac{289}{12}$

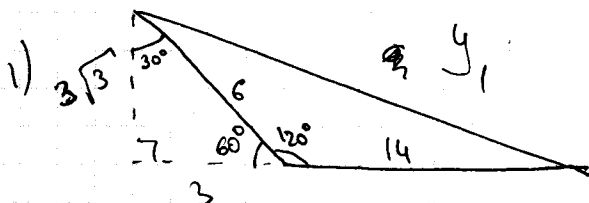
16
 3-8
 2-24
 10



ttt oot
tto oto
tot too
ooo ooo

36 - 9 = 27 = 3 · 3 · 3

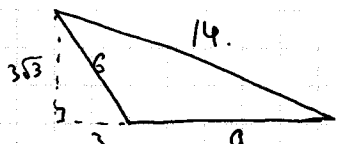
$\frac{1}{2}(1+8) \cdot 8$



11 · 7

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 170 \\ \hline 289 \end{array}$

2)



a = √(27 + 289) = √316

$\frac{119}{17} \cdot \frac{17}{2} = \frac{119}{2}$

112 + 112 + 112 + 112 + 112

y = 4√79

11 | +

2 |

3 | +

4 |

5 |

6 |

7 |

$$\sqrt{x+7} - x > 0$$

5).

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

(*)

$$(\sqrt{x+7}-x-1) / (x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0.$$

$$(\sqrt{x+7}-x-1) (\sqrt{x+7}-4) \leq 0.$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq a \\ a < 0 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+7}-x-1 > 0$$

$$\sqrt{x+7}-4 < 0$$

$$\sqrt{x+7}-x-1 < 0$$

$$\sqrt{x+4}-x \geq 0$$

(1)

$$\sqrt{x+7}-x-1 > 0$$

$$\sqrt{x+7}-4 < 0$$

$$\sqrt{x+7}-x-1 < 0$$

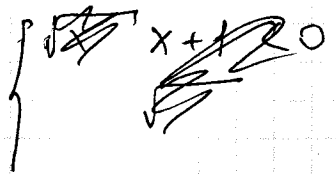
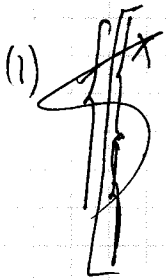
$$\sqrt{x+7}-4 \geq 0$$

$$\sqrt{x+7} > x+1$$

$$\sqrt{x+7} \leq 4$$

$$\sqrt{x+7} < x+1$$

$$\sqrt{x+7} \geq 4$$



$$-x > 0+7-1 < 0$$

$$x+7 \geq 16^9$$

$$x+7 > x^2+2x+1$$

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x+7 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x+7 > (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x \geq -7 \\ x \geq -1 \\ x \in (-3; 2) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in [-7; -1) \\ x \in [-1; 2) \end{matrix}$$

$$x^2+x-6 < 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$\begin{matrix} x = -3 \\ x = 2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x \in [-7; -1) \\ x \in [-1; 2) \\ x+7 \leq 16^9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-7; -1) \\ x \in [-1; 2) \\ x \in (-3; 2) \\ x \in (2; \infty) \\ x \geq 9 \end{cases}$$

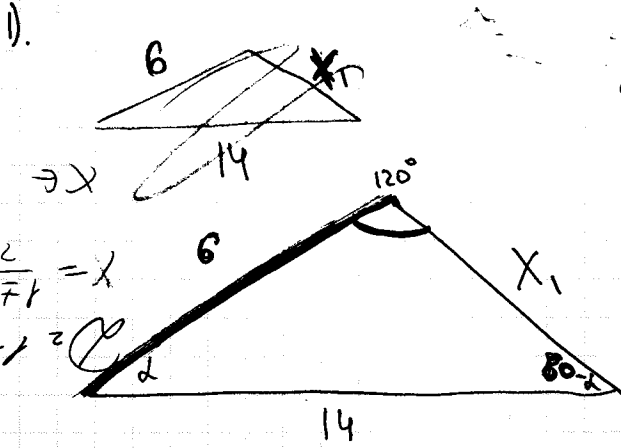
$$2) \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in [-7; -1) \\ x \in [-1; 2) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x \in \emptyset \\ x \geq -1 \\ x+4 < x^2+2x+1 \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in [9; \infty) \\ (-\infty; -3) \cup (2; \infty) \end{matrix}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



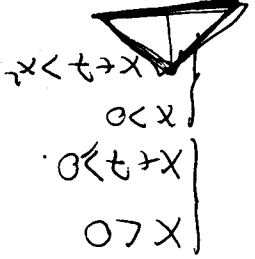
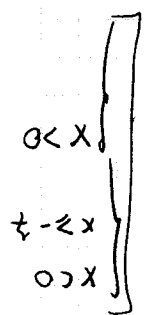
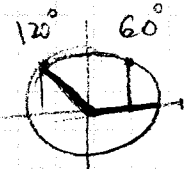
$\alpha + \beta = 60^\circ$
 $\omega = 60 - \beta$

логично косинусов
 $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} = 0$
 $a \cdot \cos d$

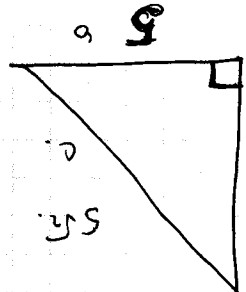
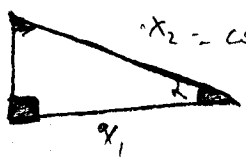
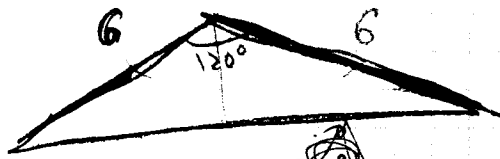


$\gamma \cos d$

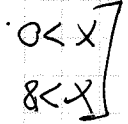
$\alpha \cdot t = x - 2x$



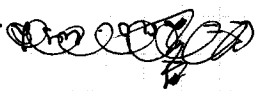
$x < t + x$



300 + 300 + 300 + 300 + 300

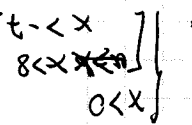


$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$



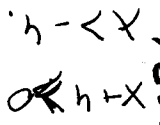
$x - t + x$

$3 - 2 - 1 = 0$



x

$c = 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin d$



$x + t + x^2 + 2x + 1$

$x < 1 + x$

$1 + x > t + x$

$$\sqrt{x+7} < x+1.$$

$$x+1 < 0$$

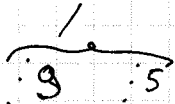
$$x \in \emptyset$$

$$x > -1$$

$$x+7 \geq 16$$

$$\therefore 45 \quad x \geq 9.$$

число кратно 9, если $\sum \dots$



$$x+1 > 0.$$

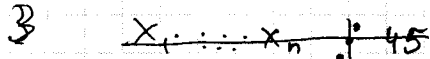
$$x+7 < x^2+2x+7$$

$$x+7 \leq 16$$

$$x \leq 9.$$

30 чисел.

$$\sqrt{4} + 3 - 1 < 0 \quad \text{уст?}$$



$$(x_1 - x_2) \cdot 45.$$

- 45
- 90
- 135
- 180
- 225

$$(-1; 2)$$

$$152 - 135 = 17$$

$$45 + 57 = 102.$$

$$7 - 4$$

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \quad 14, \quad 16, \quad 18$$

$$91 - 57$$

$$11.$$

$$107 + 45 = 152.$$

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \quad 14, \quad 16, \quad 18$$

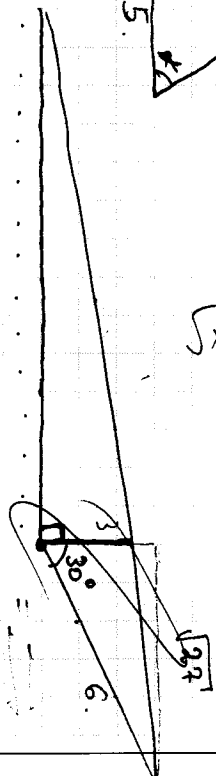
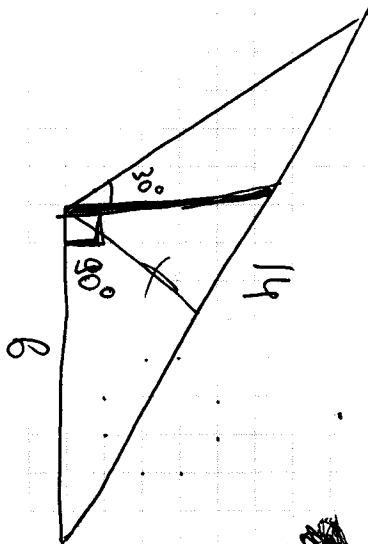
$$187$$

$$91.$$

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 154, 155
- 46, 47, 48, 49, 50, 51, 97, 98, 99, 100, 101, 102

$$159 + 45 = 204$$

$$(*) \begin{cases} x > 4. \\ x \in [-7; 0) \\ x \in [0; 3) \end{cases}$$



$$r = \cos k \cdot \frac{1}{\sin k} \cdot x$$

$$\sqrt{x+7} = x$$

$$x = -7.$$

$$r = \frac{1}{2} ab \cdot \cos k.$$

$$S = 5 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\sqrt{x+7} > x.$$

$$\begin{cases} x+7 \geq 0. \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x+7 \geq 0 \\ x \geq 0. \\ x+7 \geq x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 91 & 92 & \dots & 96 \\ 136 & 137 & & 141. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -7 \\ x \geq 0 \\ x \in (-2; 3). \end{cases}$$

$$x^2 - x - 7 < 0.$$

$$D = 1 + 28 = 29$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

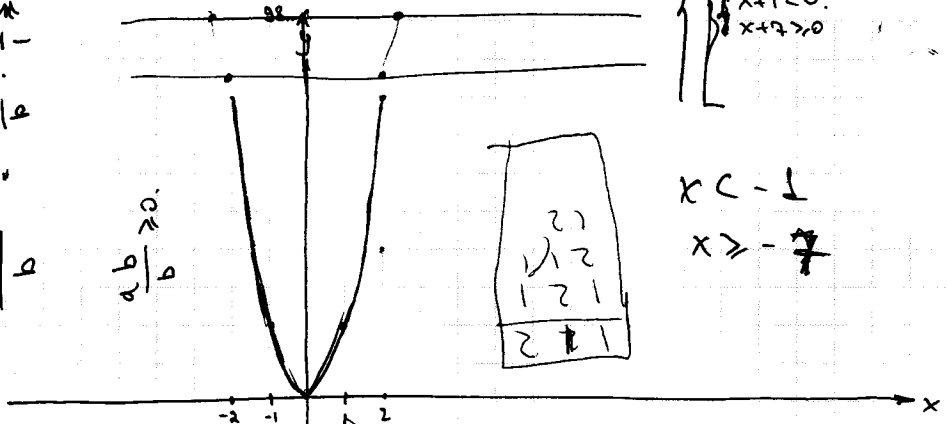
$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -2. \end{cases}$$

$$(-2; 3)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 2x^2$
 $y = 98$
 $y = 18$
 $y = a$

$a > 0$
 $b > 0$
 $c > 0$



$x \geq 9$
 $x+1 < 0$
 $x+7 > 0$
 $x < -1$
 $x \leq -7$

$$\frac{(x-7+\sqrt{x^2-14x+49})}{(x+7)} \geq \frac{\ln a}{\ln(b/a)}$$

$x \in [-7; -1)$
 $x \in [-1; 2)$
 $x \in [9; \infty)$

$\log_a b > \log_a a > 0$
 $\log_a (b/a) > 0$
 $\log_a b > 1$

$$\frac{\log_{10}(x+4) - \log_{10}(x+7-x)}{\log_{10}(x+7-x)} > 0$$

$x^2 = 49$
 $x = \pm 7$
 $x^2 = 9$
 $x = \pm 3$

$\log_a b > 1$
 $\log_a b > 9$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

1	1	2	2	2
2	2	2	2	2
3	2	2	2	2
4	2	2	2	1
5	2	2	1	2
6	1	2	2	1
7	1	2	2	1
8	2	1	2	1
9	2	1	2	1
10	2	1	2	1
11	2	1	1	1
12	1	1	1	1
13	1	1	1	1
14	1	1	1	1
15	1	1	1	1

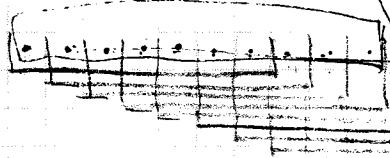
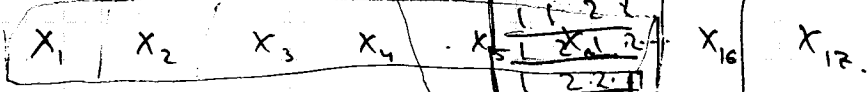
2) $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin(5x-2x) \cdot \sin(5x+2x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

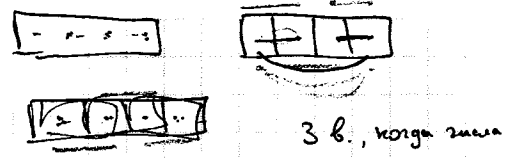
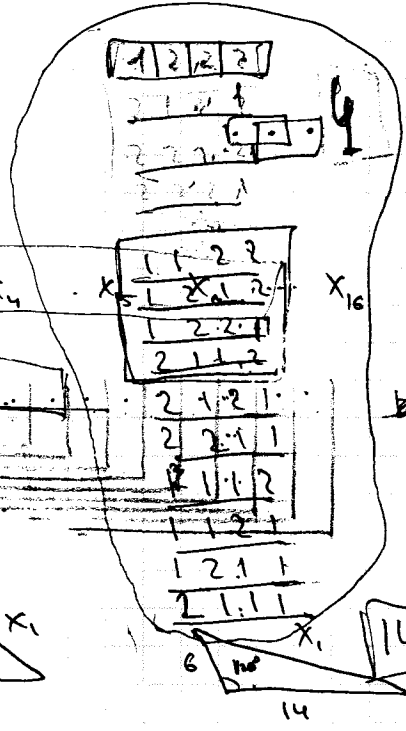
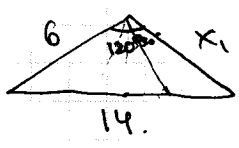
$(\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x)(\sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$
 $(\sin 5x \cos 2x)^2 - (\cos 5x \sin 2x)^2 - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

"0", "7", "8"

2.4.



- 1.
- 2.



3! расн. 2-м.

$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$

6.

11 вариантов расположения

"8888888"

$4! = 6.$

$10 \cdot 2 \cdot 11 = 220 - 2 =$

11.9!

5. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

~~$4 \cdot 4 = 16 - 2 =$~~ 12181

$\log_{(\sqrt{x+7}-x)}(x+4) \geq 1.$

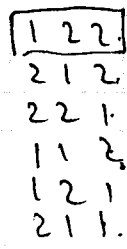
$x+4 > 0.$
 $\sqrt{x+7}-x > 0$
 $\sqrt{x+7} \neq x \neq \pm 1.$
 11 вариантов расположить ост. числа.

$(\sqrt{x+7}-x-1) / (x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0.$

$\sqrt{x+7}-x-1 \geq 0$
 $4-\sqrt{x+7} \geq 0$
 $\sqrt{x+7}-x-1 \leq 0$
 $4-\sqrt{x+7} \leq 0$

$8 \cdot 80 = 840$

$\log_{(\sqrt{x+7}-x)}(\sqrt{x+7}-x)$

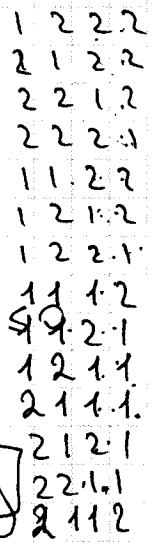


$3 \cdot 2$

$3! = 6.$

$\log_a b > e$

$(a-1)(b-a^e)$



7. (1) $\sqrt{x+1} \geq x+1$
 $\sqrt{x+7} \leq 4.$
 $\sqrt{x+7} \leq x+2$
 (2) $\sqrt{x+7} \geq 4.$

$x+1 < 0$
 $x+1 \geq 0$
 $x \in \emptyset.$
 $x+1 \geq 0$
 $x+1 \geq x^2+2x+1$

$x^2 + x$
 $x/(x+1)$
 $x \in [-1; 0].$

